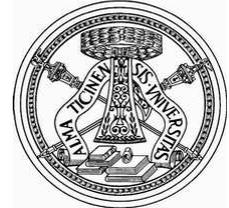


Università degli Studi di Pavia

Facoltà di Ingegneria

Corso di laurea in Ingegneria Biomedica



**MODELLIZZAZIONE MACROSCOPICA DI
MATERIALI A MEMORIA DI FORMA
FERROMAGNETICI**

Tesi di Laurea di:

Jacopo Zenzeri

Relatore: Chiar.mo Prof. Ferdinando Auricchio

Anno Accademico 2005-2006

*All'indimenticabile Amico della mia infanzia...
a colui che porterò sempre nel mio cuore
come esempio di sincerità , di spontaneità e di bontà .
A te Gianmaria*

Indice

Indice	i
Introduzione	1
Capitolo 1. I materiali ferromagnetici	4
1. Modelli microscopici per le sostanze magnetiche	4
1.1. Il momento magnetico orbitale	4
1.2. Il momento magnetico di spin	7
2. Modelli macroscopici per le sostanze magnetiche	8
2.1. I diversi tipi di sostanze magnetiche	9
3. Le equazioni di Maxwell per i materiali magnetici	9
4. Il ferromagnetismo	10
5. Energia del campo magnetico	13
6. Il ciclo di isteresi	14
7. Energia e ciclo d'isteresi	17
8. Riepilogo delle relazioni principali	19
Capitolo 2. I materiali a memoria di forma	20
1. SMA e proprie caratteristiche	22
2. Le trasformazioni martensitiche	23
3. Visione microscopica	24
4. Visione macroscopica	27
4.1. Effetto a memoria di forma in dettaglio	27
4.2. Effetto pseudo-elastico in dettaglio	30

Capitolo 3. I materiali ferromagnetici a memoria di forma	31
1. Proprietà generali dei FSMA	31
2. Breve storia dei FSMA	32
3. Struttura cristallina del Ni-Mn-Ga	33
4. L'effetto a memoria di forma ferromagnetico	36
4.1. Convenzioni utilizzate	36
4.2. Induzione della deformazione macroscopica	38
5. Attuazione statica, dinamica e pulsata del materiale	46
5.1. Attuazione statica	46
5.2. Attuazione dinamica	47
5.3. Attuazione pulsata	47
6. Modelli microscopici per FSMA	47
6.1. Il modello della frazione di volume delle varianti	48
6.2. Il modello microstrutturale	48
6.3. Il modello di Likhachev e Ullakko	49
Capitolo 4. Applicazioni degli FSMA	51
1. Applicazioni che sfruttano il FSME	51
2. Attuatori in FSMA	51
2.1. Motore lineare in FSMA	53
2.2. Valvola in FSMA	54
2.3. Pompa in FSMA	54
3. Micro-attuatori in FSMA	56
4. Applicazioni mediche	57
Capitolo 5. Un modello macroscopico per SMA	58
1. Il modello 3D a tempo continuo	58
2. Il modello 3D a tempo discreto	66
3. Il modello 1D a tempo continuo	68
4. Il modello 1D a tempo discreto	69

5. Riepilogo	71
Capitolo 6. Modelli macroscopici per FSMA	73
1. Il modello di Lagoudas	73
2. Modello $[A]$ 1D a tempo continuo per FSMA	81
3. Modello $[A]$ 1D a tempo discreto per FSMA	83
4. Generalizzazione a tempo continuo e discreto del modello $[A]$	84
5. Modello $[B]$ 1D a tempo continuo per FSMA	88
6. Modello $[B]$ 1D a tempo discreto per FSMA	90
7. Generalizzazione a tempo continuo e discreto del modello $[B]$	91
8. Riepilogo	95
Capitolo 7. Implementazione dei modelli e risultati numerici	100
1. Return-map per il modello AURICCHIO-PETRINI 3D	100
2. Return-map per il modello AURICCHIO-PETRINI 1D	103
3. Return-map per il modello $[A]$ 1D	105
4. Return-map per il modello $[B]$ 1D	107
5. Risultati numerici	110
6. Riepilogo	118
Capitolo 8. Conclusioni	122
Bibliografia	123
Ringraziamenti	128

Introduzione

I materiali attivi rappresentano oggi una classe di materiali estremamente importante dal punto di vista delle applicazioni in ambito ingegneristico. Proprio per questo, la ricerca di nuovi materiali attivi e il perfezionamento di quelli già utilizzati risultano essere molto interessanti anche per lo sviluppo di nuove tecnologie in ambito biomedico, in particolare per quanto riguarda le protesi e la chirurgia mini-invasiva. I materiali attivi sono particolari materiali che rispondono meccanicamente all'applicazione di campi esterni. L'energia applicata si può trovare nella forma di campo elettrico, di campo magnetico o di calore.



FIGURA 0.1. Schema del funzionamento di un generico materiale attivo

I materiali piezoelettrici (per esempio il PZT, $(PbZr)TiO_3$, [4]) sono una classe di materiali attivi che risponde all'applicazione di un campo elettrico attraverso il movimento dei propri ioni dalla loro posizione di equilibrio realizzando così un cambiamento macroscopico di forma. Invece i materiali magnetostrittivi (per esempio il Terfenol-D, $(TbDy)Fe_2$, [4]) rispondono all'applicazione di un campo magnetico producendo una deformazione risultante attraverso le relazioni che si vengono a creare tra struttura cristallina e orientamento della

magnetizzazione. Queste due classi di materiali producono piccole deformazioni risultanti (circa lo 0.1 – 0.2%), ma possono funzionare su un ampio range di frequenze.

I materiali che esibiscono l'effetto a memoria di forma (per esempio Nitinol, *NiTi*, [5]) costituiscono un'altra importante classe di materiali attivi. Il fenomeno principale dell'effetto a memoria di forma termoelastico, anche conosciuto come effetto a memoria di forma convenzionale, è la trasformazione martensitica. Ad alte temperature questi materiali si trovano in una fase ad alta simmetria chiamata austenite. Quando invece il materiale raggiunge una determinata temperatura, più bassa di quella austenitica, detta temperatura martensitica di inizio, passa in una fase a bassa simmetria. In questa fase, attraverso un processo cristallograficamente reversibile detto twinning si possono ottenere diverse varianti martensitiche, ognuna con una differente orientazione cristallografica. Quando il materiale viene deformato in fase martensitica avviene l'accomodamento delle diverse varianti senza la rottura dei legami chimici. Dopo il riscaldamento, il materiale ritorna alla forma originale in fase austenitica. I materiali a memoria di forma convenzionali sono molto sfruttati come materiali attivi a causa del loro ampio range di deformazione in fase martensitica. Si può arrivare a deformazioni dell'ordine del 10%, ma dipende dal tipo di lega utilizzata. Comunque per questi materiali è sempre necessario una variazione di temperatura per avere la trasformazione di fase e ottenere la deformazione desiderata. Proprio per questo, il meccanismo è caratterizzato da una cinetica lenta e da una risposta in frequenza limitata. Tutto ciò riduce il numero delle potenziali applicazioni per questi materiali. Recentemente è stata introdotta una nuova classe di materiali attivi, i materiali ferromagnetici a memoria di forma (per esempio *NiMnGa*, *NiMn₂Ga*, *FePd*, *CoNiAl*, *CoNiGa*, [4]), i quali presentano un ampio range di deformazione e un elevato range di frequenze. Le suddette proprietà fanno sì che questa nuova classe di

materiali abbia potenzialmente tantissime applicazioni.

In questa trattazione vengono analizzate le proprietà dei materiali a memoria di forma ferromagnetici ed elaborati dei modelli fenomenologici macroscopici termodinamicamente consistenti per fornirne una caratterizzazione matematica. L'elaborato è strutturato nel seguente modo:

- Capitolo 1: analisi generale delle proprietà magnetiche dei materiali e del fenomeno del ferromagnetismo;
- Capitolo 2: analisi generale delle caratteristiche dei materiali a memoria di forma convenzionali;
- Capitolo 3: caratterizzazione dei materiali a memoria di forma ferromagnetici;
- Capitolo 4: trattazione dei possibili campi applicativi per gli FSMA;
- Capitolo 5: presentazione di un modello macroscopico per SMA convenzionali;
- Capitolo 6: presentazione di un modello per FSMA ed elaborazione di nuovi modelli per FSMA;
- Capitolo 7: implementazione in matlab dei vari modelli con la tecnica del return map e discussione dei risultati ottenuti;
- Capitolo 8: conclusioni e possibili sviluppi futuri per gli FSMA.

CAPITOLO 1

I materiali ferromagnetici

La prima cosa da puntualizzare è che il comportamento magnetico della materia è spiegabile solo nell'ambito della meccanica quantistica. Per giustificare le grandezze macroscopiche utilizzate nella trattazione verranno presentati dei modelli microscopici misti per i materiali magnetici, cioè che presentano sia schemi meccanici che quantistici [1, 2, 3, 4].

1. Modelli microscopici per le sostanze magnetiche

1.1. Il momento magnetico orbitale. Nel modello di Rutherford un elettrone in un atomo è una particella di massa m e carica $-e$, in moto attorno al nucleo, carico positivamente, lungo una traiettoria pressochè circolare. Se R è il raggio di questa e ω_0 è la velocità angolare, l'elettrone possiede un'accelerazione centripeta $a_c = \omega_0^2 R$, prodotta dalla forza di attrazione coulombiana. Per tempi di misura $t \gg T$ ($T \approx 10^{-15}$ s, con T periodo di rotazione dell'elettrone), il movimento dell'elettrone è equivalente ad una spirulina di corrente, detta *corrente atomica* o *microscopica*, di intensità

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega_0}{2\pi}$$

Definiamo inoltre il *dipolo magnetico* come un insieme di due cariche magnetiche, ovvero di due poli magnetici. A questo punto si può parlare di *momento di dipolo magnetico orbitale* che consiste in un vettore $\boldsymbol{\mu}_\omega$ avente la stessa direzione del vettore che rappresenta l'area della spira di corrente atomica e intensità pari al prodotto tra la corrente atomica e l'area della spira.

Ne deduciamo quindi che:

$$\boldsymbol{\mu}_\omega = -\frac{e\omega_0}{2\pi}\pi R^2\hat{\mathbf{n}} = -\frac{e}{2m}mR^2\omega_0 = -\frac{e}{2m}\mathbf{L} = -\frac{e}{2m}\mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{L} è il momento angolare della particella (che si trova in una posizione P) rispetto al punto O (centro dell'orbita percorsa), \mathbf{p} è la quantità di moto, \mathbf{r} è la distanza \overline{OP} orientata da O a P e $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale verso l'alto.

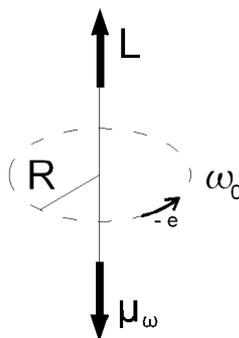


FIGURA 1.1. Momento magnetico orbitale $\boldsymbol{\mu}_\omega$ di un elettrone

Ora vediamo l'effetto di un campo magnetico esterno \mathbf{B} sul momento di dipolo magnetico orbitale. Un dipolo magnetico con momento $\boldsymbol{\mu}_\omega$ immerso nel campo \mathbf{B} subisce un momento meccanico $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\mu}_\omega \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1.2)$$

Nell'ultima parte dell'equazione (1.2) si può osservare come il momento meccanico sia posto uguale alla variazione del momento angolare \mathbf{L} . La variazione $d\mathbf{L}$ è ortogonale sia ad \mathbf{L} sia a \mathbf{B} , ne segue che si ha una precessione di \mathbf{L} attorno a \mathbf{B} con \mathbf{L} che spazza la superficie di un cono di semiapertura ϑ . Dalla figura 1.2 si può vedere che,

$$d\alpha = \frac{dL}{L \sin \vartheta}$$

da cui una pulsazione di precessione (detta *pulsazione di Larmor*) che in modulo è

$$\omega_L = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dL}{L \sin \vartheta dt} = \frac{eLB \sin \vartheta}{2mL \sin \vartheta} = \frac{e}{2m} B$$

e vettorialmente si può scrivere come

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \quad (1.3)$$

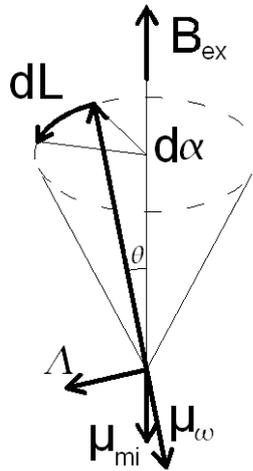


FIGURA 1.2. Schema per il calcolo della pulsazione di Larmor ω_L

Ad ω_L è associato un momento magnetico indotto $\boldsymbol{\mu}_{mi}$ che viene espresso nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\mu}_{mi} = -\frac{e}{2m} m \langle R^2 \rangle \boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e^2 \langle R^2 \rangle}{4m} \mathbf{B} \quad (1.4)$$

dove $\langle R^2 \rangle$ rappresenta la distanza quadratica media dell'elettrone dall'asse $z \parallel \mathbf{B}$ passante per il centro dell'orbita. Il momento magnetico indotto è opposto al campo magnetico applicato. Per concludere: qualsiasi sostanza immersa in un campo magnetico subisce una magnetizzazione indotta (o momento magnetico indotto) in senso opposto al campo. Tuttavia per le sostanze

ferromagnetiche sono prevalenti altri fenomeni magnetici che mascherano il magnetismo per induzione.

1.2. Il momento magnetico di spin. L'elettrone ha anche un *momento angolare intrinseco* o di *spin* \mathbf{S} che consiste in una quantità misurabile (non un vettore) descrittiva di alcune proprietà di movimento del nucleo. Perciò, accanto al momento magnetico orbitale $\boldsymbol{\mu}_\omega$ bisogna tener conto del momento magnetico di spin $\boldsymbol{\mu}_s$ che ha espressione

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{S} \quad (1.5)$$

L'elettrone in un atomo ha un *momento magnetico complessivo*

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_\omega \quad (1.6)$$

Ogni particella (atomo o molecola) di una sostanza è quindi dotata di un *momento magnetico proprio* (eventualmente nullo) $\boldsymbol{\mu}_{mp}$,

$$\boldsymbol{\mu}_{mp} = \sum_k \boldsymbol{\mu}_k \quad (1.7)$$

con $\boldsymbol{\mu}_k$ momento magnetico del k-esimo elettrone della particella. Le sostanze con $\boldsymbol{\mu}_{mp} \neq 0$ si dicono magnetiche, mentre quelle con $\boldsymbol{\mu}_{mp} = 0$ si dicono amagnetiche.

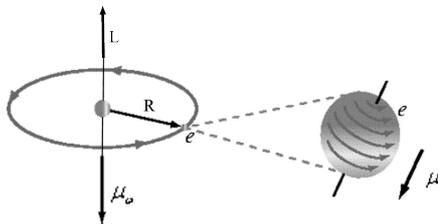


FIGURA 1.3. I momenti magnetici di un elettrone

2. Modelli macroscopici per le sostanze magnetiche

Nelle sostanze con $\mu_{mp} \neq 0$ il campo \mathbf{B} opera sul dipolo proprio della particella con un momento meccanico $\mathbf{\Lambda}$, che tende ad equiorientare μ_{mp} con il campo all'equilibrio \mathbf{B}_{eq} . \mathbf{B}_{eq} è il risultato del processo competitivo tra l'azione orientatrice del campo magnetico e l'agitazione termica che tende a rendere disordinato il sistema. Nell'interazione tra i dipoli vengono favorite le posizioni con μ_{mp} equiverso a \mathbf{B}_{eq} perchè di minima energia. In queste sostanze l'azione orientatrice è, in genere, magneticamente prevalente su quella che produce i momenti magnetici indotti, perciò le particelle tendono ad equiorientarsi con \mathbf{B}_{eq} . In definitiva, nelle sostanze con $\mu_{mp} \neq 0$ insorge, in ogni elemento $d\tau$, un momento di dipolo magnetico medio $d\mathbf{m}$ che tende ad essere orientato nello stesso verso di \mathbf{B}_{eq} .

Dal punto di vista macroscopico si può dire che, un mezzo materiale immerso in un campo magnetico \mathbf{B} è un sistema di dipoli magnetici $d\mathbf{m}$ che generano un campo magnetico \mathbf{B}' . Si può così definire la grandezza macroscopica *intensità di magnetizzazione* o *magnetizzazione* come

$$\mathbf{M} \equiv \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} \quad (1.8)$$

dove $d\tau$ è un elemento di volume. In particolare nelle sostanze ferromagnetiche, si può avere $\mathbf{M} \neq 0$ anche senza campo magnetico esterno. La magnetizzazione \mathbf{M} è una funzione del punto, di \mathbf{B} e, per alcune sostanze, anche della temperatura. Una relazione fondamentale per poi parlare di ferromagnetismo è la seguente (per mezzi lineari e isotropi):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.9)$$

con

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.10)$$

\mathbf{H} rappresenta il campo magnetico effettivo applicato al corpo mentre μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e χ_m è la *suscettività magnetica* del

mezzo che in questo caso è una quantità scalare che può essere sia positiva che negativa.

2.1. I diversi tipi di sostanze magnetiche. Le sostanze prive di momento magnetico proprio sono dette *diamagnetiche*. In presenza di un campo \mathbf{B} subiscono una debole magnetizzazione \mathbf{M} per induzione, diretta in senso opposto a \mathbf{B} . Il campo totale tende a indebolirsi. Queste sostanze sono caratterizzate da un $\chi_m = -(10^{-4} \div 10^{-9})$. Invece le sostanze *paramagnetiche* sono dotate di un momento magnetico proprio e quando sono immerse in un campo \mathbf{B} subiscono una debole magnetizzazione \mathbf{M} , per orientamento dei momenti propri, nel verso del campo. Per questi $\chi_m = +(10^{-4} \div 10^{-7})$ e dipende dalla temperatura. Infine le sostanze *ferromagnetiche* sono dotate di una elevata magnetizzazione, nel verso del campo \mathbf{B} , ed hanno spesso la caratteristica di restare magnetizzate anche quando si toglie \mathbf{B} . Sono materiali ferromagnetici il ferro, il cobalto, il nichel e le corrispondenti leghe. Sono inoltre ferromagnetici, ma al di sotto della temperatura ambiente, due terre rare, il gadolinio e il disprosio.

3. Le equazioni di Maxwell per i materiali magnetici

Un disco magnetizzato uniformemente possiamo vederlo come un circuito percorso da corrente. Partendo da questa evidenza possiamo definire le densità di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}' e \mathbf{J}'_s , distribuite rispettivamente nel volume τ e sulla superficie S del materiale. Le densità di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}' e \mathbf{J}'_s sono legate al vettore \mathbf{M} dalle relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{J}' &= \nabla \times \mathbf{M} \\ \mathbf{J}'_s &= \mathbf{M} \times \hat{n}\end{aligned}\tag{1.11}$$

dove \hat{n} è il versore normale ad S rivolto verso l'esterno. Si abbia ora un campo magnetico \mathbf{B} nello spazio in cui sono immersi dei mezzi materiali. Tutte le correnti che concorrono a creare \mathbf{B} possono dividersi in due gruppi: le correnti

di magnetizzazione, sostitutive della magnetizzazione della materia, e tutte le altre dette correnti libere. Si può considerare \mathbf{B} la sovrapposizione di due campi

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (1.12)$$

dove \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}' sono i contributi al campo totale \mathbf{B} dovuti rispettivamente alle correnti libere e alle correnti di magnetizzazione.

Le equazioni del campo \mathbf{B} in magnetostatica si scrivono:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}') \quad (1.14)$$

dove \mathbf{J} è la densità di corrente libera e \mathbf{J}' è la densità di corrente di magnetizzazione. Per la (1.14) la (1.11) si può scrivere come

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.15)$$

4. Il ferromagnetismo

Il ferromagnetismo non trova alcuna giustificazione nei modelli classici e si spiega solo in quadro quantistico. Nelle sostagne ferromagnetiche gli spin degli elettroni sono soggetti a delle interazioni quantistiche di natura non magnetica, agenti su scala atomica, dette interazioni di scambio; queste tendono ad allineare gli spin parallelamente e nello stesso verso. Anche i momenti magnetici corrispondenti sono quindi paralleli ed equiversi. Detti \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 gli spin di due elettroni vicini, l'energia di interazione si può porre nella forma

$$\Gamma = -\mathfrak{S} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \quad (1.16)$$

dove \mathfrak{S} , chiamato integrale di scambio, dipende dalla distanza dei due elettroni. Per le sostanze ferromagnetiche si ha $\mathfrak{S} > 0$; il minimo di Γ si ottiene per \mathbf{S}_1 parallelo ed equiverso a \mathbf{S}_2 . Si formano così spontaneamente delle regioni magnetizzate, dette *domini di Weiss*, orientate fra loro in modo diverso.

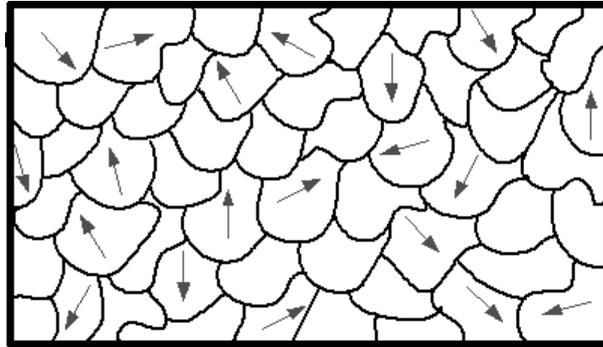


FIGURA 1.4. Schema dei domini di Weiss

L'orientamento spontaneo dei domini è comandato dalle cosiddette *direzioni di facile magnetizzazione*, legate alla struttura cristallina delle sostanze. All'interno dei domini gli spin sono tutti fra loro paralleli e producono una forte magnetizzazione del dominio. In scala macroscopica, se il ferromagnete non è stato mai sottoposto ad un campo magnetico, la magnetizzazione media è nulla. Quando si applica un campo magnetico \mathbf{H} , gli spin degli elettroni prossimi al contorno di un dominio orientato secondo \mathbf{H} , tendono a ruotare nel verso del campo, accrescendo così il dominio a spese dei domini vicini. Inizialmente si ha perciò un accrescimento dei domini già orientati secondo il campo, con un aumento abbastanza rapido di \mathbf{M} e \mathbf{H} . Successivamente, quando i domini hanno raggiunto la massima dimensione possibile, per aumentare ancora \mathbf{M} , è necessario far rotare i domini nel verso del campo. Per questa operazione occorrono campi molto più intensi e la crescita di \mathbf{M} e di \mathbf{H} è molto più lenta. Per campi sufficientemente intensi tutti i domini sono orientati nel verso di \mathbf{H} (regime di saturazione). L'andamento di \mathbf{M} in funzione di \mathbf{H} , per un materiale vergine, ossia che non è ancora mai stato sottoposto ad un campo magnetico, è mostrato in figura 1.5 (*curva di prima magnetizzazione*), dove per \mathbf{H} si intende il campo nel ferromagnete. Come si vede il comportamento

non è lineare. Ma c'è di più, se si diminuisce H , partendo dai valori di saturazione $M = M_s$, la curva di prima magnetizzazione non viene ripercorsa e, per $H = 0$, permane una magnetizzazione residua $M = M_r$.

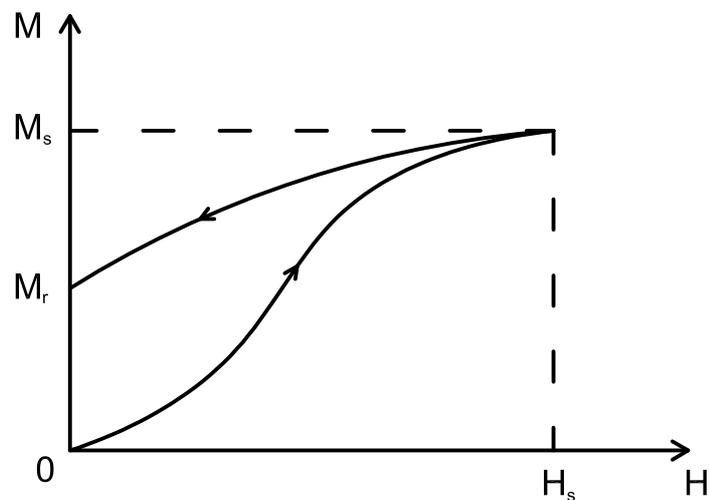


FIGURA 1.5. Curva di prima magnetizzazione

La suscettività media dei ferromagneti è dell'ordine di: $\chi_m = +(10^3 \div 10^5)$. I materiali ferromagnetici al di sopra di una temperatura critica T_c , detta *temperatura di Curie*, diventano paramagnetici. La suscettività ha l'espressione (*legge di Curie-Weiss*)

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c} \quad (1.17)$$

per $T > T_c$ e con C costante di Curie.

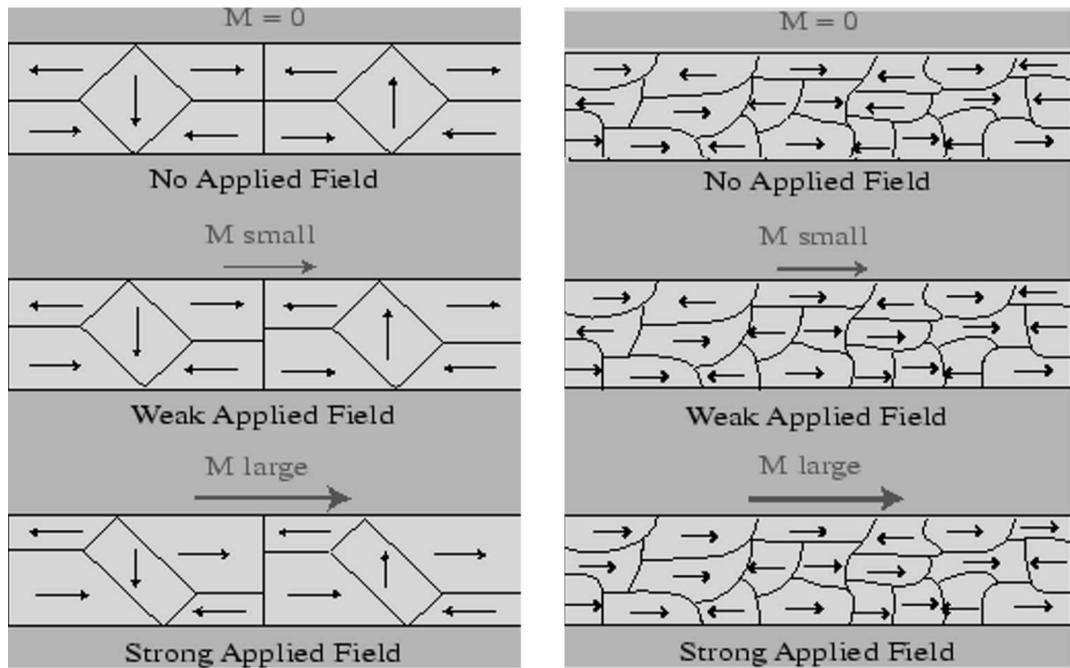


FIGURA 1.6. Modificazione dei domini in seguito all'applicazione di un campo magnetico

5. Energia del campo magnetico

E' importante definire l'energia di un campo magnetico. Per far ciò introduciamo dapprima la densità di energia del campo magnetico come,

$$W_B \equiv \frac{dU_B}{d\tau} \quad (1.18)$$

dove dU_B è l'energia del campo contenuta nel volumetto $d\tau$ e in generale,

$$U_B = \int_{\tau} W_B d\tau$$

e

$$W_B = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

Se il mezzo è isotropo,

$$W_B = \int_0^B H dB \quad (1.19)$$

e quindi

$$U_B = \int_{\tau} \int_0^B H dB d\tau \quad (1.20)$$

6. Il ciclo di isteresi

Il comportamento di un ferromagnete, a differenza di un materiale diamagnetico o paramagnetico, è *non lineare* e *a più valori* (funzione polidroma), nel senso che, per uno stesso valore del campo \mathbf{H} , si possono avere diversi valori della magnetizzazione \mathbf{M} (e di \mathbf{B}), e ciò in dipendenza della storia magnetica che ha subito il materiale. Si è soliti studiare il comportamento di un ferromagnete nel piano (\mathbf{B}, \mathbf{H}) , sottoponendo il materiale ad un campo \mathbf{H} variabile ciclicamente. \mathbf{H} può essere prodotto da un avvolgimento percorso da corrente, disposto attorno ad un cilindro o ad un toro costituiti dal materiale in esame. Il risultato dell'azione ciclica di \mathbf{H} è mostrato dal grafico di fig 1.7, denominato *ciclo di isteresi*.

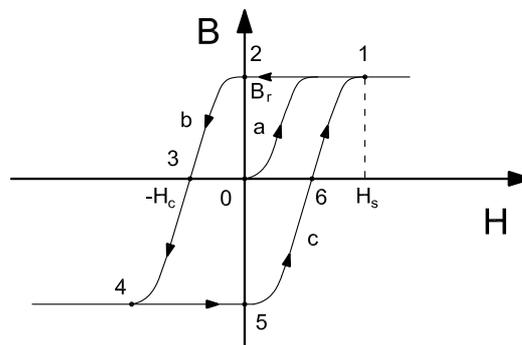


FIGURA 1.7. Ciclo di isteresi

Per descrivere il ciclo si procede nel modo seguente. Si parte da un materiale vergine (mai stato magnetizzato) in campo nullo, per il quale $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ ed $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, quindi anche $\mathbf{B} = \mathbf{0}$; successivamente lo si sottopone ad un campo \mathbf{H} crescente fino ad un valore sufficientemente elevato H_s . In questo modo si percorre la curva di prima magnetizzazione a fino al punto 1 scelto in zona di saturazione per la magnetizzazione \mathbf{M} ($\mathbf{M} = \mathbf{M}_s$) e in zona di andamento lineare per il campo \mathbf{B} . L'andamento lineare segue dalla definizione di \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.21)$$

per cui, quando $\mathbf{M} = \mathbf{M}_s = \text{cost}$, la (1.21) è una retta nel piano (\mathbf{B}, \mathbf{H}) . Se, successivamente, si diminuisce \mathbf{H} , si percorre la curva b e per $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ (punto 2) il materiale ha una magnetizzazione residua e una induzione magnetica residua $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r$. Continuando a decrescere \mathbf{H} in senso algebrico si perviene ad un valore $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_c$ (punto 3), detto *campo coercitivo*, cui corrisponde $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Infine si può arrivare, lungo la curva b , in un punto 4, simmetrico del punto 1 rispetto all'origine. Crescendo ora \mathbf{H} (in senso algebrico) si percorre la curva c , transitando per i punti 5 e 6 simmetrici, rispettivamente, dei punti 2 e 3, per raggiungere di nuovo il punto 1 e quindi completando il ciclo. Il percorso chiuso così tracciato è il ciclo di isteresi massimo del materiale o *ciclo di isteresi di saturazione*. Se ci si arresta prima sulla curva di prima magnetizzazione, si compiono cicli più piccoli interni a quello massimo. Da quanto esposto è chiaro che la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} è ploidroma e non ha significato fisico introdurre la permeabilità magnetica assoluta μ ($\mu = \mu_0 \mu_r$ con μ_r permeabilità magnetica relativa definita come $1 + \chi_m$), intendendola come proprietà del materiale. Sapendo che,

$$\mu = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}} = \mu_0 + \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} \quad (1.22)$$

Percorrendo il ciclo di isteresi di saturazione di fig 1.7, nell'ordine indicato da 0 a 6, la funzione (1.22) percorre le curve di fig 1.8 andando da $-\infty$ a $+\infty$. Così ,

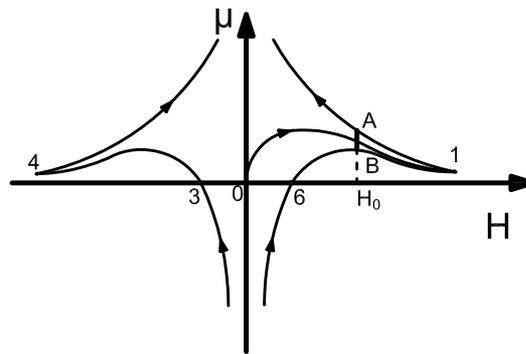


FIGURA 1.8. Andamento della funzione (1.22) quando si percorre il ciclo d'isteresi

per esempio, se il valore di H è H_0 , μ può assumere qualsiasi valore compreso nel segmento AB di figura 1.8. Il valore effettivo di μ dipende dalla storia magnetica del materiale. Si può usare ancora la quantità μ se il ciclo d'isteresi è tanto stretto da poterlo confondere con la curva di prima magnetizzazione; cosicchè, senza eccessivo errore, si può attribuire al materiale ad ogni H un valor medio $\bar{\mu}(H)$ per la permeabilità.

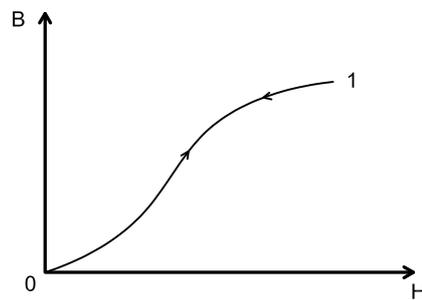


FIGURA 1.9. Ciclo d'isteresi che coincide con la curva di prima magnetizzazione

In questo quadro i materiali ferromagnetici si dividono in due classi limite: i ferromagneti dolci (soft) e i ferromagneti duri (hard). I primi hanno ciclo di isteresi molto stretto, confondibile in certi casi con la curva di prima magnetizzazione e per essi ha ancora senso introdurre una permeabilità magnetica $\bar{\mu}(\mathbf{H})$ dipendente però, anche se in modo univoco, da \mathbf{H} . I ferromagneti duri hanno invece ciclo di isteresi largo con una induzione magnetica residua elevata B_r .

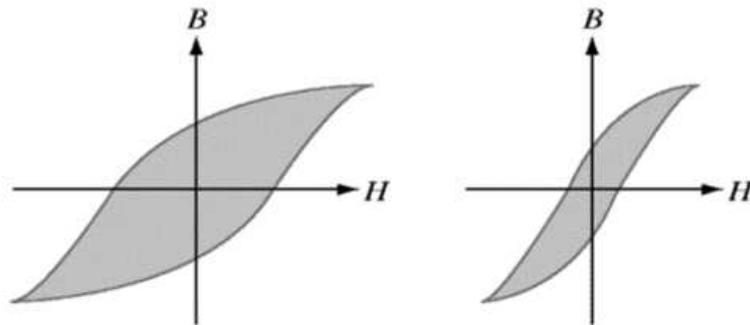


FIGURA 1.10. Ferromagneti duri e ferromagneti dolci

7. Energia e ciclo d'isteresi

Vediamo ora la relazione tra ciclo di isteresi ed energia del campo magnetico. Per un materiale isotropo la densità di energia del campo è data dalla (1.19). Nel piano (\mathbf{B}, \mathbf{H}) l'interpretazione geometrica della (1.19) è semplice. Se percorriamo, per esempio, la curva di prima magnetizzazione da 0 a 1, la (1.19) risulta proporzionale all'area sottesa dalla curva nel tratto da 0 a 1 e l'asse delle ordinate.

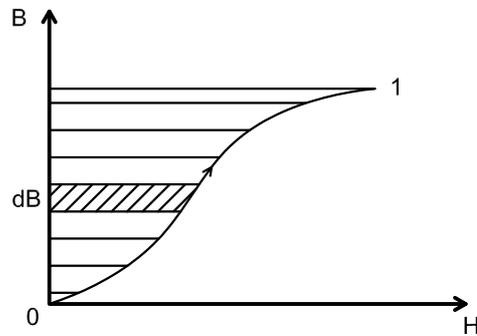


FIGURA 1.11. Densità di energia spesa quando si compie il percorso 0-1 nel ciclo

Questa densità di energia è positiva perchè sia \mathbf{H} che $d\mathbf{B}$ sono positivi, perciò è un'energia che i generatori devono spendere per portare il materiale nel punto di lavoro 1. Se diminuiamo \mathbf{H} e percorriamo la curva b vediamo che il prodotto $\mathbf{H}d\mathbf{B}$ è negativo ($\mathbf{H} > 0$, $d\mathbf{B} < 0$); viene restituita l'energia compresa tra la curva b e l'asse delle ordinate. Se ci si arresta nel punto 2 ($\mathbf{H} = 0$), non tutta l'energia spesa è stata restituita.

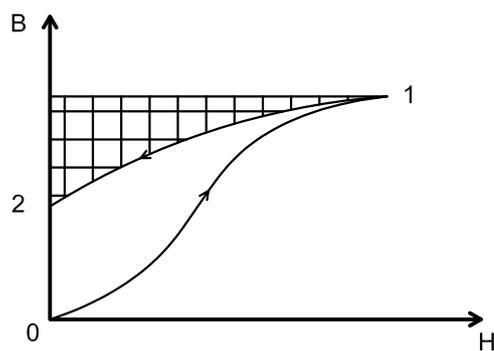


FIGURA 1.12. Densità di energia spesa (tratteggio orizzontale) o acquisita (tratteggio verticale) quando si compie il percorso 0-1-2 nel ciclo

Se si percorre l'intero ciclo (partendo da 1 e ritornandovi), si trova che si è perduta un'energia proporzionale all'area del ciclo.

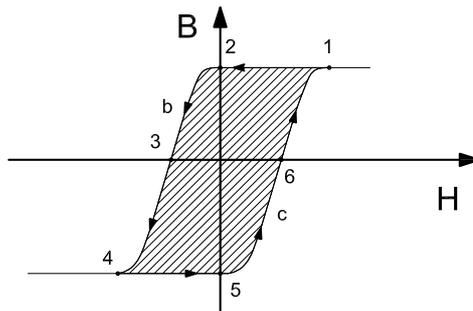


FIGURA 1.13. Densità di energia spesa quando si percorre un intero ciclo

Questa energia si è trasformata in calore: si può pensare che questo sorga da una forma di frizione che si manifesta tra i domini quando questi vengono ingranditi e rotati.

8. Riepilogo delle relazioni principali

RELAZIONI PRINCIPALI PER IL FERROMAGNETISMO

- (1.8) $M \equiv \frac{dm}{d\tau}$
- (1.9) $M = \chi_m H$
- (1.21) $B = \mu_0 (H + M)$
- (1.13) $\nabla \cdot B = 0$
- (1.15) $\nabla \times H = J$
- (1.16) $\Gamma = -\mathfrak{S} S_1 \cdot S_2$
- (1.17) $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$
- (1.20) $U_B = \int_{\tau} \int_0^B H dB d\tau$

CAPITOLO 2

I materiali a memoria di forma

In questo capitolo verranno analizzate le caratteristiche dei materiali a memoria di forma non ferromagnetici (convenzionali) così da inquadrare meglio i diversi effetti. Il termine *memoria di forma*[5, 49, 50, 51] indica la capacità di alcuni materiali di *ricordare* la configurazione iniziale e di ritornarvi, anche dopo deformazioni significative o semplicemente quando la causa deformante viene rimossa o quando sottoposti ad opportuni trattamenti termici. Tale capacità si manifesta tramite due comportamenti caratteristici:

- (1) *effetto a memoria di forma (Shape Memory Effect, SME)*: il materiale, sottoposto a sollecitazioni meccaniche a basse temperature, si deforma inelasticamente manifestando, alla rimozione del carico, deformazioni residue dette pseudoplastiche. Il riscaldamento oltre ad una temperatura limite permette però di recuperare la configurazione iniziale indeformata che viene mantenuta dopo il raffreddamento.
- (2) *pseudo-elasticità o super-elasticità (Pseudo-elastic o Super-elastic effect, PE)*: il materiale sottoposto a sollecitazione meccanica ad alte temperature raggiunge deformazioni considerevoli (anche dell'8-10%) restando in campo elastico.

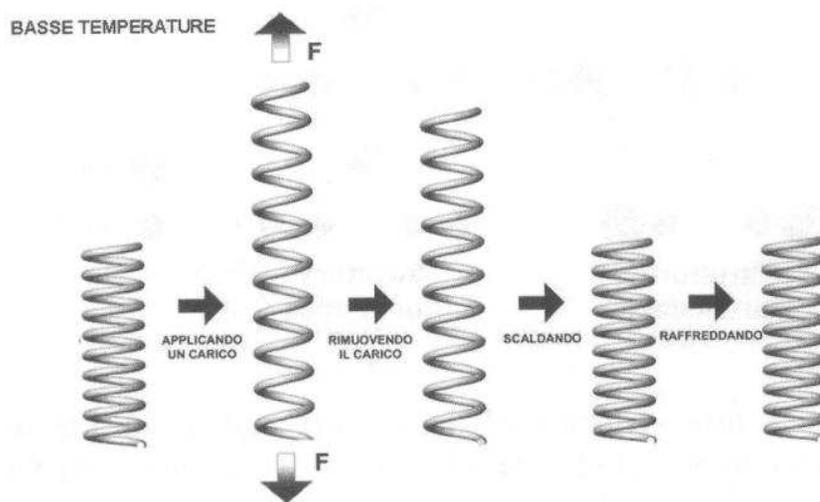


FIGURA 2.1. Effetto a memoria di forma

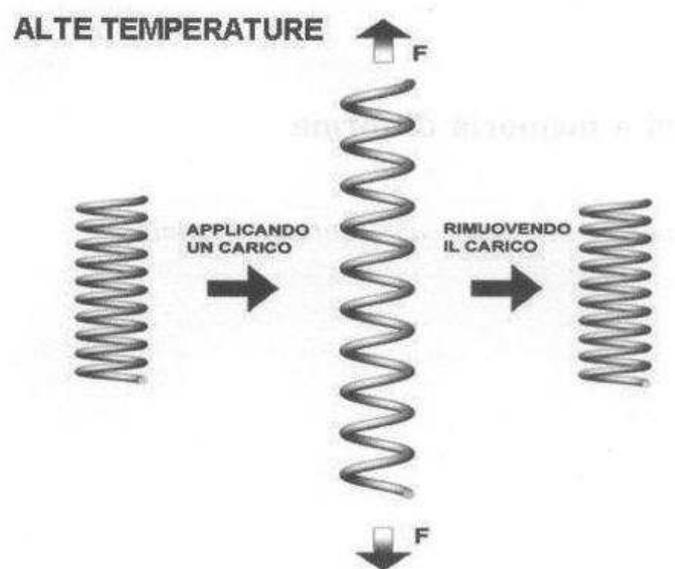


FIGURA 2.2. Effetto pseudo-elastico

1. SMA e proprie caratteristiche

I materiali a memoria di forma più utilizzati sono leghe metalliche (*Shape Memory Alloys, SMA*) e possono presentarsi sotto due fasi cristalline differenti:

- *fase genitrice* (*P* da *Parent*), stabile ad alte temperature e caratterizzata da un reticolo ad elevata simmetria. Corrisponde alla fase austenitica;

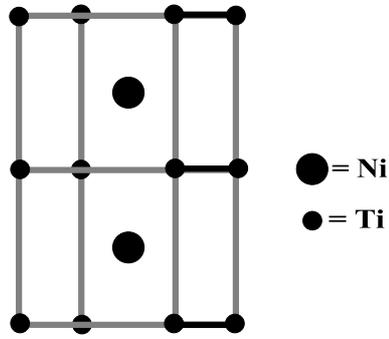


FIGURA 2.3. Struttura austenitica di uno SMA Ni-Ti

- *fase prodotto* (*M* da *Martensite*), stabile a basse temperature, caratterizzata da un reticolo cristallino con un ordine di simmetria inferiore a quello della fase P. Corrisponde alla struttura martensitica. Una stessa lega può esibire diverse varianti della struttura martensitica.

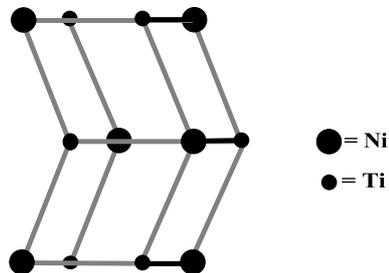


FIGURA 2.4. Struttura martensitica di uno SMA Ni-Ti

2. Le trasformazioni martensitiche

Le caratteristiche fisiche del materiale dipendono dalla fase cristallina della struttura. Alle trasformazioni martensitiche (TM), cioè alla trasformazione diretta da austenite a martensite e alla sua inversa, sono associate quindi variazioni fisiche del materiale che possono essere rilevate come indicatori della frazione martensitica ξ_M . Anche i fenomeni macroscopici della memoria di forma e della pseudo-elasticità sono dovuti allo sviluppo, a livello microscopico, di particolari TM: le trasformazioni martensitiche termoelastiche (TMT). Le trasformazioni martensitiche (TM) sono di tipo non diffusivo (*displacive transformations*): non richiedono un ampio movimento degli atomi, ma un loro coordinato riarrangiamento, con spostamenti dell'ordine di grandezza del parametro reticolare. Le trasformazioni non diffusive sono inoltre:

- *indipendenti dal fattore temporale*; non essendo necessaria la migrazione atomica, il semplice avanzamento dell'interfaccia tra le due fasi è limitato solo dalla velocità del suono nel mezzo. La trasformazione può perciò essere considerata approssimativamente istantanea e la percentuale di fase martensitica presente nel materiale dipende unicamente dal valore della temperatura e non dal tempo per cui viene mantenuta (*trasformazioni atermiche*);
- *del primo ordine*; la trasformazione diretta da fase genitrice a martensite è esotermica;
- *caratterizzate da un'isteresi termica*; la trasformazione inversa segue un percorso diverso rispetto alla trasformazione diretta essendo necessario un'energia di attivazione differente, causata da fenomeni assimilabili ad attriti interni che si oppongono all'avanzamento della trasformazione.

Si possono distinguere 4 diverse temperature caratteristiche delle TM:

- A_s : Temperatura di inizio della TM inversa ($M \rightarrow P$)
- A_f : Temperatura di fine della TM inversa ($M \rightarrow P$)
- M_s : Temperatura di inizio della TM diretta ($P \rightarrow M$)
- M_f : Temperatura di fine della TM diretta ($P \rightarrow M$)

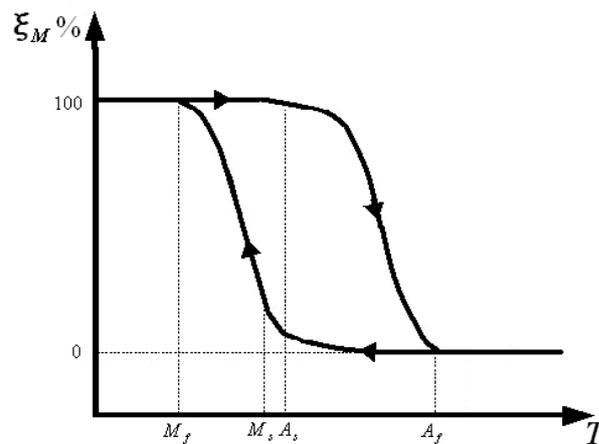


FIGURA 2.5. Andamento della frazione martensitica $\xi_M\%$ in funzione della temperatura

La memoria di forma si evidenzia in presenza di trasformazioni che siano non solo martensitiche ma anche termoelastiche (TMT), in altre parole che presentino, oltre alle proprietà delle trasformazioni martensitiche, una completa reversibilità cristallografica.

3. Visione microscopica

Cristallograficamente la trasformazione del reticolo corrispondente alla TMT può essere scomposta in due componenti indipendenti. La prima (*bain strain*) corrisponde alla variazione di forma da struttura austenitica a struttura martensitica ed implica una deformazione globale proporzionale alla dimensione della zona deformata. Schematizzando per semplicità il reticolo bidimensionalmente, questa componente induce il passaggio dalla configurazione iniziale

alla finale, secondo il grado di avanzamento della trasformazione stessa.

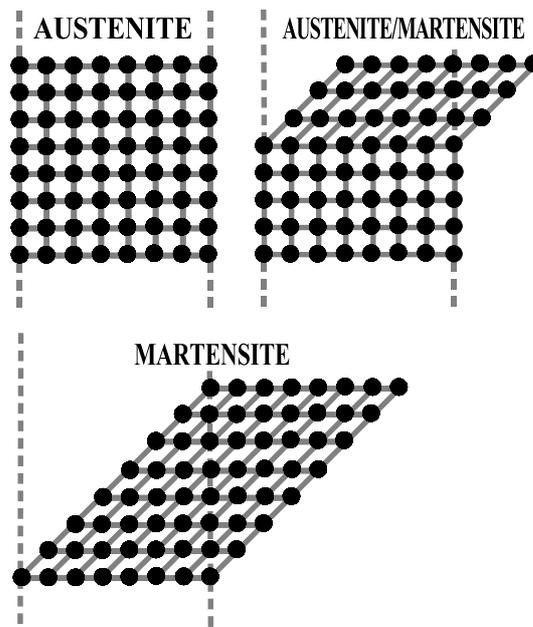


FIGURA 2.6. Bain Strain

La seconda componente di deformazione (*lattice invariant shear*) è associata al vincolo che la matrice di austenite esercita sulle placche lenticolari di martensite. La struttura cristallina martensitica ha una forma diversa rispetto alla struttura austenitica: per garantire la congruenza dell'interfaccia tra le due fasi la forma dei singoli cristalli deve modificarsi. La TMT induce quindi uno stato di sforzo interno al reticolo che porta ad una deformazione locale deviatorica. Si verifica quindi un processo cristallograficamente reversibile, detto *geminazione (twinning)*, che riesce a compensare variazioni di forma, grazie all'*accomodamento* delle diverse varianti martensitiche, senza la rottura di legami chimici o la formazione di dislocazioni.

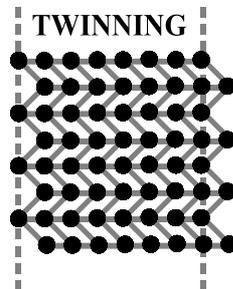


FIGURA 2.7. Lattice Invariant Strain

Se sul reticolo cristallino martensitico è applicato uno sforzo di taglio, si induce un riorientamento della martensite, favorendo quella variante (martensite monovariante) che minimizza lo stato di sforzo interno al materiale. Data la facilità di conversione tra le diverse varianti martensitiche, un carico esterno di entità limitata è in grado di generare una variazione di forma macroscopica. Questo meccanismo è chiamato *detwinning*.

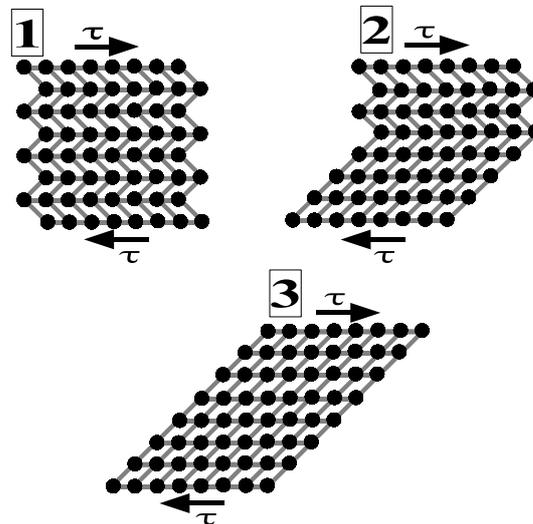


FIGURA 2.8. Detwinning

4. Visione macroscopica

4.1. Effetto a memoria di forma in dettaglio. L'effetto della memoria di forma consiste nella capacità di recuperare una deformazione imposta in fase martensitica, anche di notevole entità (alcuni materiali presentano una deformazione massima recuperabile del 15%), attraverso il riscaldamento al di sopra di A_f e discende dalla reversibilità cristallografica delle TMT. Il materiale, lavorato in fase austenitica ($T > A_f$), 'memorizza' la forma assunta alla fine della lavorazione.

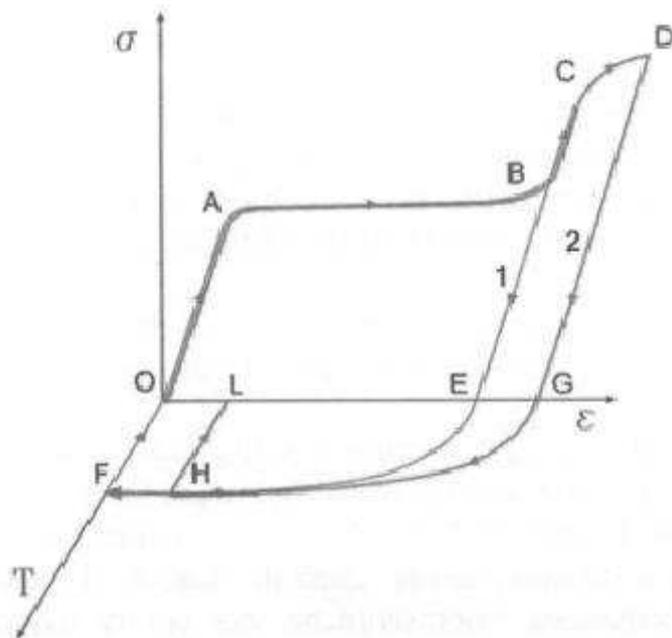


FIGURA 2.9. Effetto a memoria di forma

Le successive fasi necessarie per mettere in evidenza l'effetto SME sono:

- **Raffreddamento a sforzo nullo da $T_{iniziale} > A_f$ fino a $T < M_f$:** grazie al raffreddamento si attiva, a partire da M_s , la TMT diretta con la conseguente formazione di martensite. Le diverse varianti di

martensite equivalenti si sviluppano in modo da minimizzare gli sforzi interni e impedire la creazione di ostacoli al moto dell'interfaccia. Non si generano deformazioni macroscopiche, per cui la forma dell'oggetto rimane invariata. (TRATTO *FO*)

- **Applicazione di uno sforzo a $T < A_s$:** il materiale caricato meccanicamente in fase martensitica si deforma con meccanismi diversi al crescere del valore dello sforzo:
 - *Deformazione elastica della martensite multivariante:* per carichi inferiori ad uno sforzo limite, il materiale si deforma elasticamente rimanendo in fase martensitica. (TRATTO *OA*)
 - *Detwinning della martensite:* in corrispondenza dello sforzo limite, una ulteriore deformazione elastica richiederebbe un'energia maggiore di quella necessaria per convertire una variante di martensite in un'altra. Si assiste quindi alla crescita della variante di martensite orientata in modo favorevole rispetto alla direzione dello sforzo. Grazie all'elevata mobilità dei *twin boundaries* in questo tratto è sufficiente un piccolo aumento del carico per indurre la transizione di fase: ciò corrisponde alla presenza nella curva σ - ε di un ampio tratto a pendenza molto bassa (*plateau*). (TRATTO *AB*)
 - *Deformazione elastica della martensite monovariante:* quando il materiale si è completamente trasformato nella variante di martensite che minimizza lo stato di sforzo interno, ulteriori aumenti del carico provocano la deformazione elastica della martensite monovariante stessa. (TRATTO *BC*) Macroscopicamente, si nota un brusco aumento della pendenza della curva σ - ε che risulta simile alla pendenza nel tratto *OA*: in campo elastico, infatti, la rigidità della martensite monovariante è paragonabile a quella

della martensite multivariante.

– *Deformazione plastica della martensite monovariante*: se il carico è tale da superare il limite elastico della martensite monovariante, si inducono deformazioni plastiche con generazione e movimento delle dislocazioni. (TRATTO *CD* PERCORSO 2)

- **Rimozione del carico a $T < A_s$** : si assiste al recupero della deformazione elastica della martensite (*spring back*). (TRATTO *BE* PERCORSO 1 E TRATTO *DG* PERCORSO 2)
- **Riscaldamento al di sopra di A_f** : durante il riscaldamento viene recuperata la deformazione residua inelastica, grazie alla riconversione della martensite nella fase genitrice. (TRATTO *EF* PERCORSO 1 E TRATTO *GH* PERCORSO 2) Con il riscaldamento si recupera la deformazione dovuta al *detwinning* della martensite; qualora invece sia presente una componente di deformazione plastica, questa non viene recuperata, se non dopo particolari trattamenti termici (*annealing*) ad elevate temperature (dell'ordine dei 600°C) che riportano il materiale al suo stato originario.
- **Raffreddamento a sforzo nullo da $T_{iniziale} > A_f$ fino $T < M_f$** : raffreddando nuovamente il materiale lo si riporta in fase martensitica, senza una variazione macroscopica di forma grazie all'accomodamento delle diverse varianti di martensite. (TRATTO *OF* PERCORSO 1 E TRATTO *HL* PERCORSO 2)

4.2. Effetto pseudo-elastico in dettaglio. La pseudo-elasticità è la capacità delle SMA di deformarsi sotto l'azione di carichi meccanici e di recuperare totalmente la forma originaria anche dopo aver subito deformazioni consistenti (8-9%), a seguito della rimozione del carico. Il parametro di controllo della TMT in questo caso è lo sforzo meccanico (*Stress Induced Martensite, SIM*). Questo comportamento si manifesta per temperature T comprese tra A_f e M_d , dove :

- A_f = temperatura alla quale termina la trasformazione *martensite* \rightarrow *austenite*;
- M_d = temperatura al di sotto della quale la sollecitazione meccanica sul materiale induce la trasformazione *austenite* \rightarrow *martensite*, più vantaggiosa della deformazione plastica dell'austenite dal punto di vista energetico.

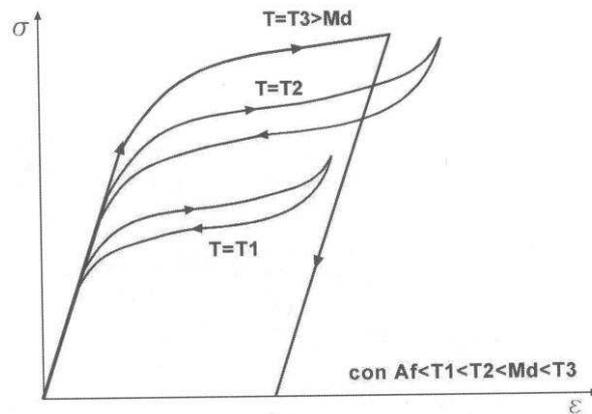


FIGURA 2.10. Effetto pseudo-elastico

Viceversa a temperature superiori a M_d , lo sforzo necessario per indurre la trasformazione di fase è superiore allo sforzo per deformare plasticamente l'austenite: in questo caso il materiale presenta un comportamento elasto-plastico.

CAPITOLO 3

I materiali ferromagnetici a memoria di forma

In questo capitolo verranno analizzate le proprietà dei materiali ferromagnetici a memoria di forma e in particolare del più importante dal punto di vista applicativo: il *NiMnGa*. Verranno analizzate le caratteristiche del materiale dal punto di vista microscopico, presentando anche alcuni modelli microscopici presenti in letteratura. Inoltre verrà anche distesamente trattato l'effetto a memoria di forma ferromagnetico.

1. Proprietà generali dei FSMA

I materiali a memoria di forma ferromagnetici presentano molte significative proprietà :

- sono ferromagnetici e quindi possiedono tutte le caratteristiche del ferromagnetismo quali, magnetizzazione residua, direzioni di facile magnetizzazione, temperatura critica di Curie T_c e comportamento isteretico;
- sono a memoria di forma e quindi presentano l'effetto a memoria di forma e la superelasticità ;
- sono ferromagnetici e a memoria di forma e quindi esibiscono l'effetto a memoria di forma ferromagnetico.

2. Breve storia dei FSMA

Il fenomeno della magnetostrizione, per il quale un campo magnetico esterno può cambiare le dimensioni di un campione di materiale, era stato osservato già da Joule nel 1842. Nei normali ferromagneti, come il Fe o il Ni , le deformazioni associate alla magnetostrizione sono dell'ordine di $10^{-4}\%$ [6], mentre materiali con una magnetostrizione eccezionalmente elevata, come per esempio il Terfenol-D ($TbDyFe$)[10], mostrano deformazioni dell'ordine del 0.1%. Nel 1996 Ullakko et al.[15, 16, 17, 25] osservarono un nuovo meccanismo di magnetostrizione che chiamarono effetto a memoria di forma magnetico (MSME) mediante il quale un campione di una lega di Ni_2MnGa di tipo Heusler subiva deformazioni dell'ordine dello 0.2%. Nel 1999 Sozinov et al.[20] osservarono deformazioni dell'ordine del 5% su un campione di martensite tetragonale di $Ni_{48}Mn_{31}Ga_{21}$ come James et al.[28]. Nel 2000 Murray et al.[7, 18, 19, 26] e Hezcko et al.[32, 33, 41, 42] misurarono una variazione di dimensioni dell'ordine del 8%. Infine nel 2001 Ullakko et al.[40] notarono una deformazione dell'ordine del 10% in un campione di martensite ortorombica $Ni_{49}Mn_{30}Ga_{21}$ a temperatura ambiente. Questo effetto, anche se in minor dimensione, venne ritrovato anche in altre leghe quali il $FePd$ [11], il $FePt$ [11], il $CoNiGa$ [12], il $NiFeGa$ [13] e il $CoNiAl$ [14]. In questa trattazione verrà analizzato solo il materiale ferromagnetico a memoria di forma più rilevante: il Ni_xMnGa .

3. Struttura cristallina del Ni-Mn-Ga

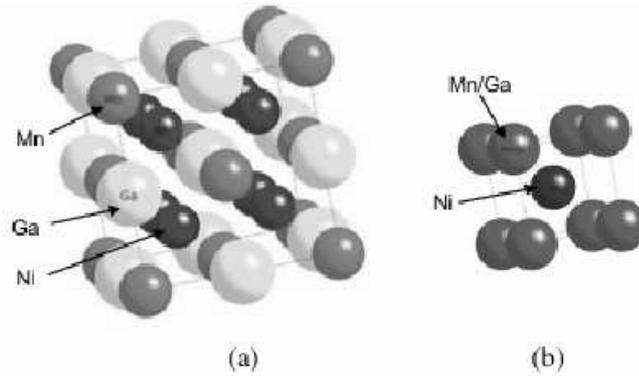


FIGURA 3.1. (a) Modello dell'austenite cubica ($Fm\bar{3}m$) che mostra un ordine di tipo $L2_1$ e (b) struttura di tipo $B2$ con simmetria $Pm\bar{3}m$

Il Ni_2MnGa è un composto intermetallico che mostra una struttura di tipo Heusler. Numerosi esperimenti hanno individuato la sua diversa struttura nelle differenti fasi in cui si va a trovare variando la temperatura. Per esempio, durante la trasformazione martensitica una certa quantità di energia viene rilasciata ed altra assorbita e questa può essere misurata da un DSC (differential scanning calorimetry) o mediante misure di suscettibilità magnetica. Questi metodi permettono inoltre di determinare le temperature per le diverse fasi e in particolare la temperatura di Curie che determina il cambiamento da ferromagnetismo a paramagnetismo. Alcuni di questi risultati vengono mostrati nella figura (3.2). Le temperature per la trasformazione martensitica sono comprese tra i 160K e i 620K e variano anche di 50° con la sola variazione dell'1% nella composizione del materiale. In aggiunta alla trasformazione da austenite a martensite sono state notate due trasformazioni intermartensitiche. La temperatura di Curie è meno sensibile al cambiamento della composizione del materiale e si trova tra 320K e 380K. La struttura cristallografica delle differenti fasi può essere studiata con tecniche a raggi X e con tecniche di diffrazione neutronica. La fase austenitica, che esiste a temperatura ambiente

per la composizione stechiometrica, mostra una simmetria $Fm\bar{3}m$ con un ordine chimico $L2_1$ come si vede nella figura (3.1). A temperature sopra circa i 1073K, gli atomi di Mn e Ga diventano disordinati, formando una struttura $B2$ con simmetria $Pm\bar{3}m$ come mostrato in figura (3.1). A temperature più basse il Ni_2MnGa subisce una trasformazione martensitica che riduce la simmetria da cubica a tetragonale.

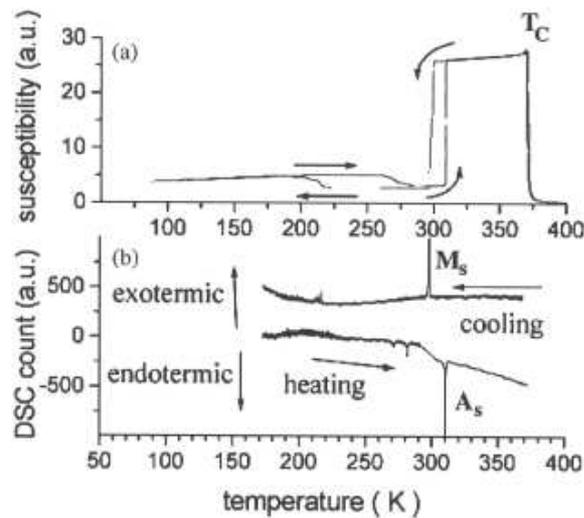


FIGURA 3.2. Esempi di suscettibilità magnetica (a) e DSC (b) mostrano le temperature di trasformazione di fase austenitica e martensitica (M_s e A_s) e la temperatura di Curie (T_C)

In realtà tre differenti strutture di martensite sono state osservate. Due hanno una simmetria tetragonale e una ortorombica. Nella prima struttura tetragonale il rapporto tra le due costanti reticolari c ed a è $c/a \approx 0.94$ (dove c è il lato più corto ed a il lato più lungo). In aggiunta a questo è presente una certa mobilità dei piani atomici. Il piano $(1\bar{1}0)$ mostra una modulazione nella direzione $[110]$ con un periodo di 5 piani atomici e la struttura così descritta prende il nome di $5M$. L'altra struttura tetragonale ha un rapporto $c/a \approx 1.2$ e può

essere definita come non modulata NM perché non è presente modulazione dei piani atomici. Infine la struttura ortorombica ha una costante di reticolo $b/a \approx 0.94$ (con b lato intermedio) e $c/a \approx 0.89$ ed è denominata $7M$ per l'analogia con la prima struttura tetragonale ma con periodo di 7 piani atomici. Il volume rimane approssimativamente costante durante tutte le trasformazioni. La prima forma di martensite che appare durante il raffreddamento dipende dalla composizione ma la stabilità delle strutture, per esempio l'ordine nel quale appaiono raffreddando, sembra essere sempre lo stesso. Questo viene mostrato in figura (3.3).

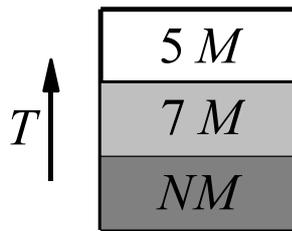


FIGURA 3.3. La stabilità delle fasi martensitiche

La struttura NM è la più stabile prima della $7M$. Se prendiamo in considerazione la struttura $5M$ osserviamo che essa si è trasformata direttamente dall'austenite. Esiste inoltre un'empirica correlazione tra le temperature di trasformazione da austenite e martensite e la prima struttura di martensite che si forma come si vede in figura (3.4).

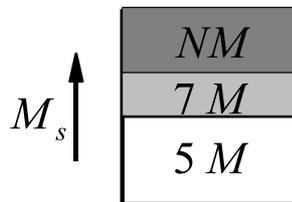


FIGURA 3.4. Relazione tra la prima struttura martensitica e la temperatura di trasformazione M_s

Le leghe che si trasformano direttamente nella struttura NM tipicamente hanno temperature di trasformazione più alte della temperatura di Curie mentre quelle che si trasformano nella $7M$ hanno un range di temperature di trasformazione più ristretto. La costante di reticolo ci dà un'informazione teorica sulla massima deformazione raggiungibile con il riarrangiamento dei piani atomici. Si può ricavare questa deformazione dalla formula:

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{c}{a} \quad (3.1)$$

Questo limite è 6% per la struttura $5M$, 10% per la $7M$ e anche più del 20% per la struttura NM . Oggi ancora l'effetto MSM non è stato rilevato in una struttura NM anche per il fatto che viene superata la temperatura di Curie e il materiale diventa paramagnetico.

4. L'effetto a memoria di forma ferromagnetico

Il termine effetto a memoria di forma ferromagnetico (FSME, *Ferromagnetic Shape Memory Effect*) indica l'induzione di una grande deformazione inelastica, nella fase martensitica del materiale, dovuta all'applicazione di un campo magnetico esterno.

4.1. Convenzioni utilizzate. Per la spiegazione di questo effetto consideriamo solo la struttura martensitica tetragonale $5M$ con la convenzione qui di seguito descritta e rappresentata in figura (3.5) e (3.6). La struttura austenitica ha una forma cubica con lato di lunghezza a_0 ; mentre, come già detto nel precedente paragrafo, nella struttura martensitica a e c rappresentano rispettivamente il lato più lungo e quello più corto. Inoltre ogni variante martensitica è magnetizzata lungo una direzione cristallografica preferenziale, chiamata anche asse di facile magnetizzazione, che nel nostro caso è parallela al lato più corto c . La magnetizzazione può essere orientata nella direzione positiva o negativa dell'asse e avere un'intensità per convenzione presa come M_{sat} . Con questa configurazione di direzioni preferenziali di magnetizzazione

ortogonali risulta evidente che l'applicazione di un campo magnetico esterno può essere utilizzata per selezionare determinate varianti invece di altre, per il fatto che l'allineamento della magnetizzazione con il campo magnetico esterno è energeticamente favorita. Per gli FSMA questo processo si riferisce al riorientamento delle varianti martensitiche indotto dall'applicazione di un campo magnetico esterno, che consiste nel meccanismo microstrutturale che produce l'effetto a memoria di forma ferromagnetico macroscopico.

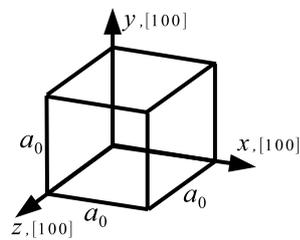


FIGURA 3.5. Austenite

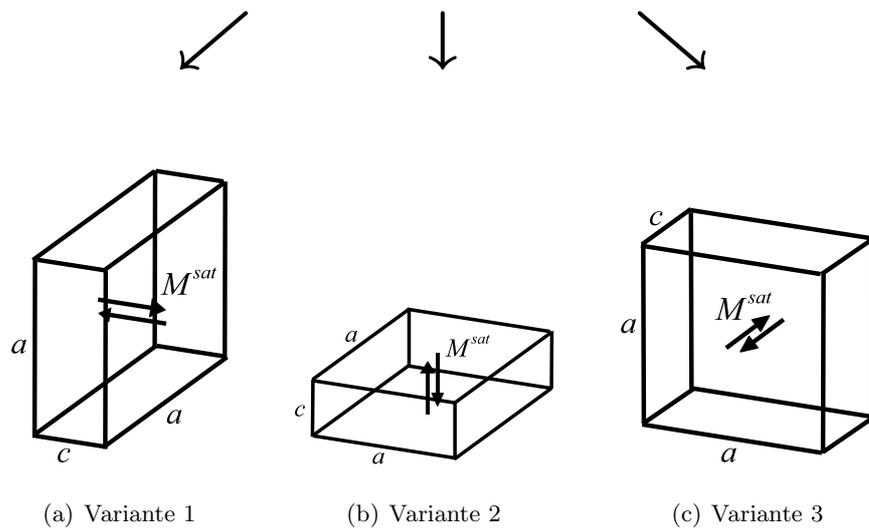


FIGURA 3.6. Martensite nelle sue diverse varianti

4.2. Induzione della deformazione macroscopica. Descriviamo ora un esperimento esemplificativo per capire il meccanismo. Per prima cosa raffreddiamo il materiale FSMA sotto l'applicazione di uno sforzo costante, inducendo così la trasformazione dalla fase austenitica a quella martensitica. Lo sforzo di compressione assiale applicato produce una configurazione a singola variante e crea quindi una microstruttura iniziale chiaramente definita. La deformazione totale che si osserva è costituita da una parte elastica, da una deformazione di trasformazione associata con la trasformazione di fase martensitica e da una deformazione di riorientamento. La deformazione di trasformazione è considerata una quantità costante per il processo di riorientamento e viene misurata durante il raffreddamento dallo stato di riferimento austenitico. La martensite completamente accomodata e riarrangiata viene interamente prodotta nella trasformazione di fase indotta dal raffreddamento sotto l'applicazione di uno sforzo e non viene ulteriormente modificata dall'applicazione del campo magnetico esterno. Precisiamo inoltre che lo sforzo viene tenuto costante durante tutto l'esperimento in un intervallo con limite inferiore dato da uno sforzo minimo σ^{sv} necessario per raggiungere la configurazione a singola variante completamente riarrangiata e un limite superiore dato da uno sforzo massimo σ^b che blocca la deformazione indotta dal campo magnetico esterno (e quindi la deformazione di riorientamento).

In figura (3.7) si può vedere, a livello microscopico, la struttura dei domini magnetici. I domini magnetici sono regioni nelle quali la magnetizzazione è omogenea e sono separati dalle pareti dei domini che sono delle regioni in cui la direzione della magnetizzazione è ruotata di 180° rispetto a quella dei domini vicini. Nella scala che abbiamo deciso di utilizzare in realtà assumiamo le pareti come linee orizzontali di spessore trascurabile. I vettori magnetizzazione dei domini sono orientati lungo la direzione orizzontale [100], la direzione dell'asse preferenziale della variante 1, e possono avere verso positivo o negativo a

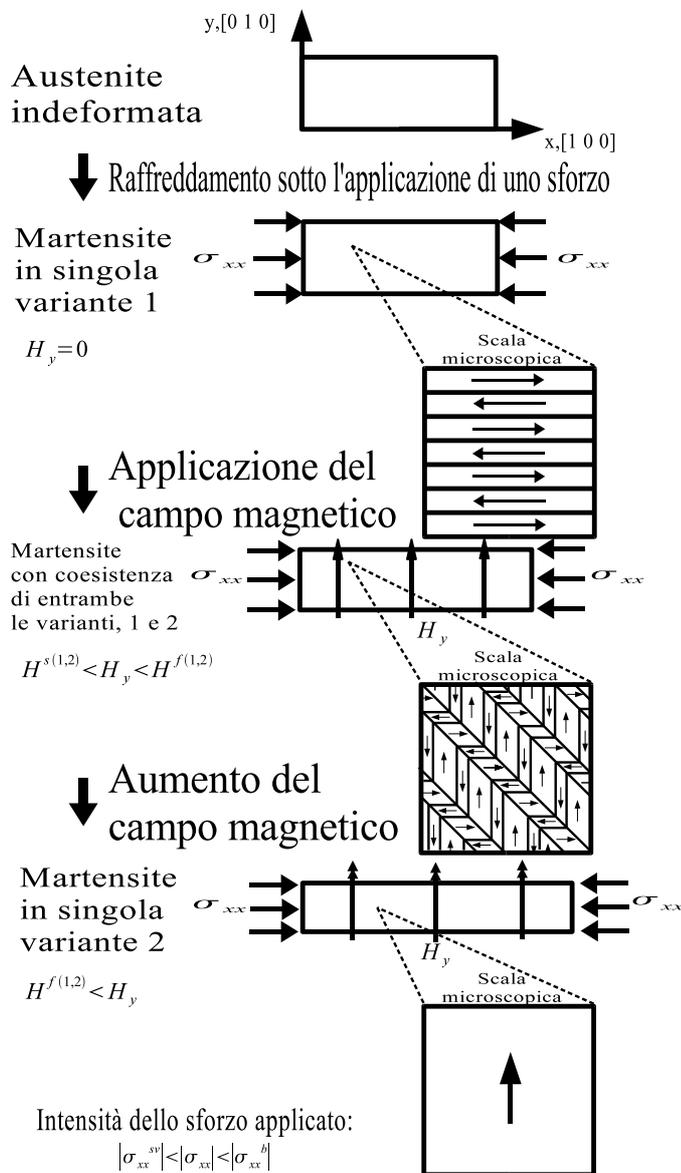


FIGURA 3.7. Schematizzazione qualitativa sia a livello macroscopico che a livello microscopico della deformazione in fase martensitica di un campione di NiMnGa sotto la progressiva azione di un campo magnetico esterno

seconda del dominio. Queste considerazioni sono dovute alla simmetria tetragonale di martensite che stiamo analizzando. Quando nella figura (3.7) non abbiamo ancora il campo magnetico esterno applicato, l'arrangiamento dei domini porta ad annullare la magnetizzazione macroscopica totale. La conseguente applicazione di un campo magnetico trasversale H_y , sopra il valore di una soglia critica induce alla formazione della variante 2. La variante 2, che si può considerare preferenziale in questo caso, cresce all'aumentare di H_y alle spese della variante 1 producendo una deformazione di riorientamento assiale. In questo processo il lato a della variante 2 sostituisce il lato c della variante 1 lungo la direzione $[100]$ portando così ad una estensione in direzione assiale e ad una contrazione in quella perpendicolare. L'evoluzione del riarrangiamento delle varianti può essere quantificato considerando la frazione di volume che cambia di queste. In figura (3.8) sono rappresentate qualitativamente le curve campo magnetico-deformazione assiale per diversi livelli di sforzo applicato. Per un generico ciclo di isteresi utilizziamo i valori di soglia $H^{s(1,2)}$ e $H^{f(1,2)}$ per indicare il passaggio dalla variante 1 alla variante 2 e $H^{s(2,1)}$ e $H^{f(2,1)}$ per indicare il passaggio inverso. I simboli s e f indicano l'inizio e la fine dei singoli processi di riorientamento. L'accomodamento microstrutturale per un livello di campo magnetico intermedio $H^{s(1,2)} < H_y < H^{f(1,2)}$ è mostrato nella terza parte della figura (3.7). In questo stato entrambe le varianti coesistono e formano una configurazione accomodata. Si deve notare inoltre che, per ogni variante, i domini magnetici in generale hanno differenti frazioni di volume che portano ad una magnetizzazione macroscopica non nulla. In questo modo, grazie all'applicazione del campo magnetico esterno, il materiale viene sia magnetizzato che deformato. Si vede dalla figura (3.8) che la massima deformazione di riorientamento come anche la dimensione e la forma dei cicli d'isteresi dipende dal carico applicato. L'applicazione di un campo magnetico nella direzione opposta produce la stessa risposta isteretica di deformazione.

Questa è solo un'idealizzazione e in realtà bisognerebbe considerare non simmetrica la risposta ad un campo magnetico positivo rispetto ad uno negativo e dipendente dalla particolare combinazione di cicli che precede l'applicazione del campo magnetico.

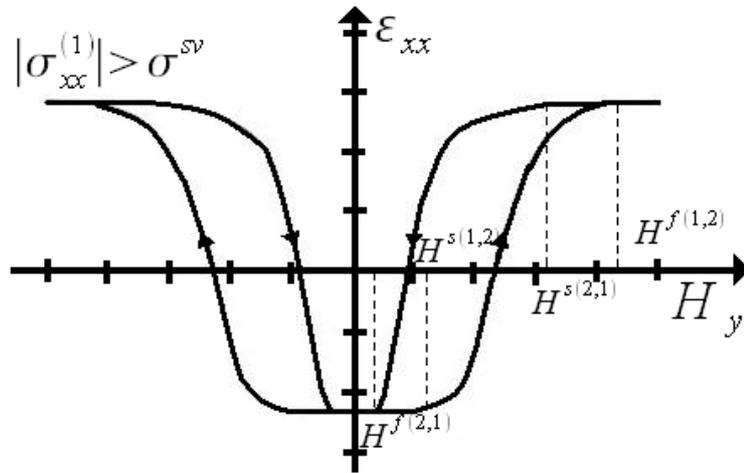


FIGURA 3.8. Relazione tra campo magnetico trasversale H_y applicato e deformazione assiale ε_{xx} con differenti carichi assiali applicati σ_{xx}^i

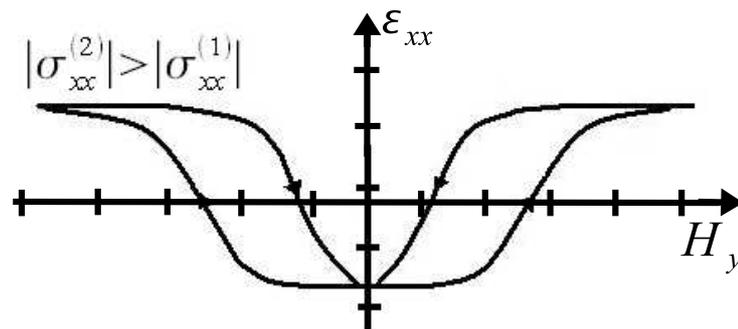


FIGURA 3.9. Relazione tra campo magnetico trasversale H_y applicato e deformazione assiale ε_{xx} con differenti carichi assiali applicati σ_{xx}^i

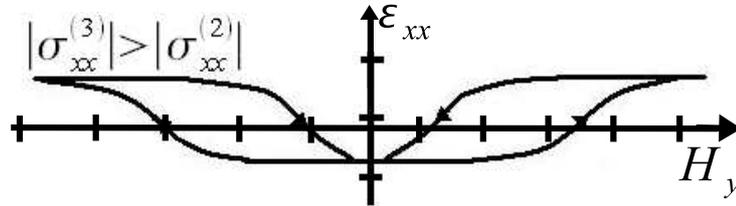


FIGURA 3.10. Relazione tra campo magnetico trasversale H_y applicato e deformazione assiale ε_{xx} con differenti carichi assiali applicati σ_{xx}^i

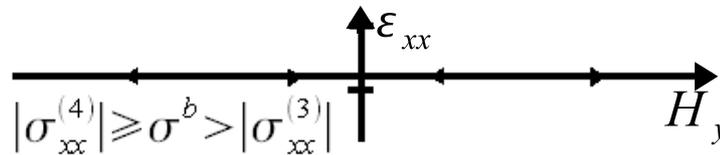


FIGURA 3.11. Relazione tra campo magnetico trasversale H_y applicato e deformazione assiale ε_{xx} con differenti carichi assiali applicati σ_{xx}^i

Ora passiamo all'analisi dell'evoluzione della microstruttura magnetica nel processo di magnetizzazione dell'FSMA. In generale il processo di magnetizzazione di un FSMA coinvolge vari meccanismi che portano all'allineamento della magnetizzazione macroscopica con il campo magnetico esterno. Questi meccanismi includono la formazione e la redistribuzione delle varianti martensitiche, il movimento dei domini magnetici e la rotazione del vettore magnetizzazione dal suo asse preferenziale. Per capire meglio l'influenza della magnetizzazione utilizziamo come valore di sforzo applicato un valore maggiore a quello critico che sopprime l'effetto di deformazione indotto da campo magnetico ($|\sigma_{xx}| > \sigma^b$). In questo modo possiamo osservare l'evoluzione della rotazione del vettore magnetizzazione a livello macroscopico che porta alla formazione di varianti e non permette il riorientamento di quelle già esistenti. Il processo di magnetizzazione in questo caso coincide con quello di un convenzionale materiale ferromagnetico ed è stato già dettagliatamente discusso nel capitolo 1.

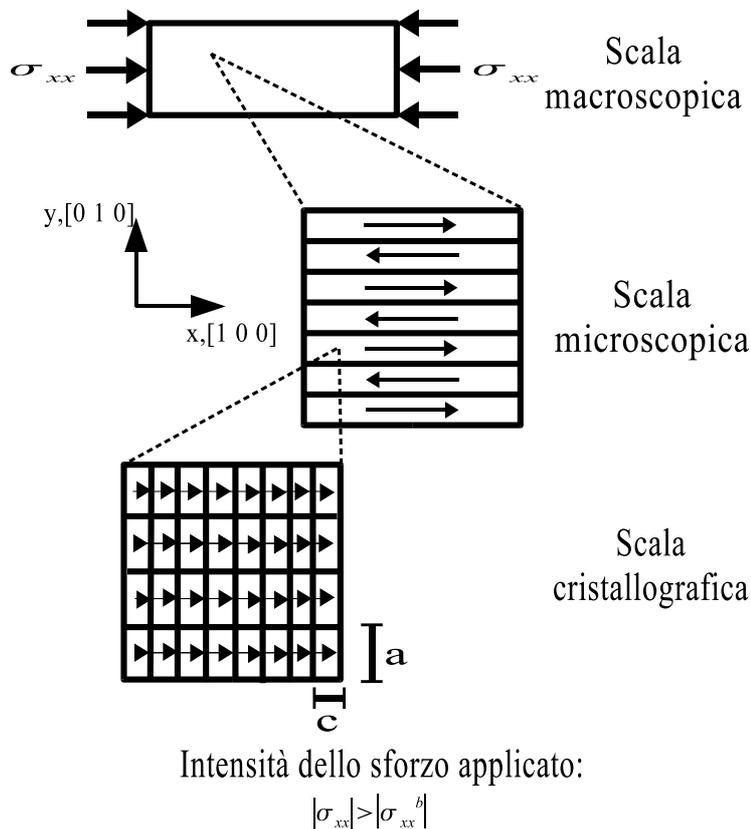


FIGURA 3.12. Variante 1 della fase martensitica sotto l'applicazione di un elevato carico esterno

In figura (3.9) è rappresentata la configurazione iniziale del nostro esperimento dove al campione di materiale FSMA è stato applicato uno sforzo di compressione molto elevato e tale da bloccare il riorientamento delle varianti. Come si può notare nella scala cristallografica, i domini magnetici generalmente contengono numerose celle unitarie. Osserviamo ora due situazioni esemplificative per spiegare il fenomeno: la magnetizzazione di una singola variante martensitica lungo due specifiche direzioni cristallografiche.

- Magnetizzazione lungo l'asse di compressione (easy axis):

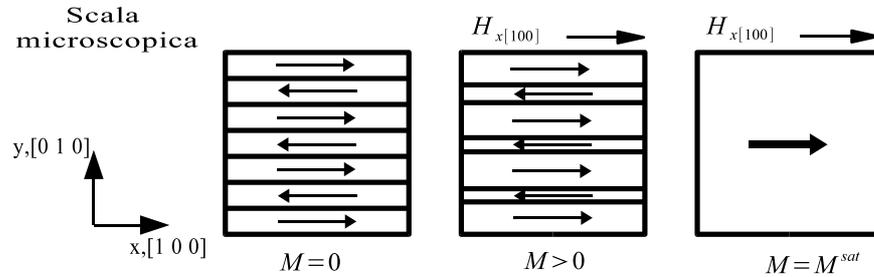


FIGURA 3.13. Magnetizzazione lungo l'asse di compressione

La figura (3.10) mostra schematicamente la distribuzione dei domini magnetici per differenti valori di campo magnetico applicato lungo la direzione [100]. Il punto di partenza è lo stesso di quello presentato in figura (3.9). E' importante notare che, per arrivare alla magnetizzazione di saturazione, si sfrutta la reversibilità a 180° dei domini magnetici. Questo processo inoltre richiede quindi un basso apporto di energia. La cosa che è importante notare è che non sono associati cambiamenti magnetostrittivi convenzionali al meccanismo di movimento dei domini a 180° .

- **Magnetizzazione lungo l'asse perpendicolare (hard axis):**

Come evidenziato dalla figura (3.11), nessun meccanismo di movimento dei domini è possibile per posizionare la magnetizzazione lungo la direzione [010]. La magnetizzazione in entrambe le tipologie di domini deve ruotare dall'asse di compressione. La rotazione della magnetizzazione per una variante martensitica richiede del lavoro contro l'energia magnetocristallina anisotropica. Questo tipo di lavoro richiede un apporto di energia maggiore rispetto a quella richiesta per il movimento dei domini.

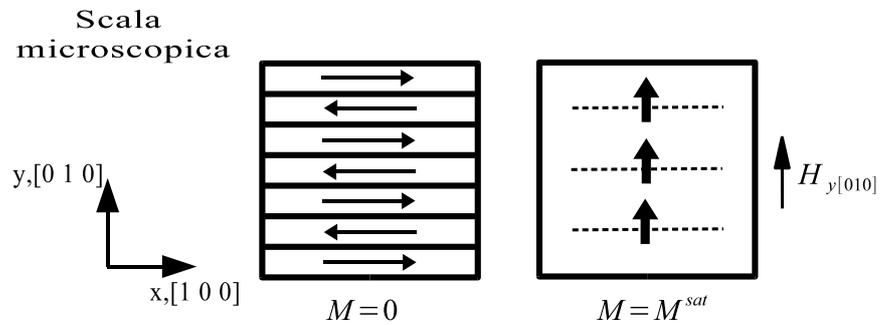


FIGURA 3.14. Magnetizzazione lungo l'asse perpendicolare

5. Attuazione statica, dinamica e pulsata del materiale

In questo paragrafo verranno analizzati i diversi comportamenti del materiale conseguentemente a tre tipi di attivazione: quella statica, quella dinamica e quella pulsata. Inoltre va precisato che questi esperimenti sono stati effettuati su un singolo cristallo di Ni-Mn-Ga.

5.1. Attuazione statica. Il meccanismo è già stato distesamente trattato nel paragrafo precedente e qui verranno forniti anche dei risultati numerici. Murray et al.[7, 19] hanno studiato il fenomeno della deformazione indotta da campo magnetico su un singolo cristallo di Ni-Mn-Ga applicando vari sforzi statici uniassiali. Per i carichi più piccoli, 0.34 MPa, il materiale mostra la massima deformazione teorica (6%) della struttura martensitica tetragonale ma non recupera la forma originale quando viene rimosso il campo magnetico. In questo caso, il campo magnetico applicato è in grado di superare lo sforzo meccanico esterno ma il carico applicato non è abbastanza grande per far tornare il materiale alla configurazione iniziale. Aumentando il carico statico meccanico la deformazione residua diminuisce con una completa cancellazione a circa 1.43 MPa. Come si superano 1.43 MPa l'effetto di induzione della deformazione inizia a decrescere. In questo caso, il campo magnetico non può sopraffare l'intero carico applicato e quindi non è possibile raggiungere la deformazione massima. Con carichi superiori a 2 MPa, sono state osservate deformazioni molto piccole perché l'energia magnetica immessa nel sistema non riesce a superare il carico applicato. E' importante notare che, aumentando il campo applicato, non si produce una deformazione addizionale. Un'altra cosa importante da notare è la presenza di una soglia per cui si ha l'attuazione magnetica e non sono state osservate deformazioni quando è stato applicato un campo magnetico inferiore alla soglia.

5.2. Attuazione dinamica. La deformazione dinamica del Ni-Mn-Ga fu caratterizzata per la prima volta da Henry et al.[48]. In questi esperimenti il carico statico è stato sostituito da una molla così da consentire un'attuazione alternata. Per piccoli carichi esterni lo sforzo in uscita è piccolo perchè il campione non recupera completamente la forma, come visto nel caso statico. Quando il carico esterno supera 1.5 MPa diminuisce la deformazione residua e aumenta quella risultante. Valori più alti di carichi applicati rischiano di bloccare il movimento delle varianti e diminuisce così la deformazione risultante. Come visto precedentemente nel caso di carico statico il campo che induce deformazione mostra una soglia per l'attuazione. Quando questa viene raggiunta non vengono osservati più cambiamenti di dimensioni. La massima deformazione misurata con un carico alternato è decisamente minore di quella misurata da Murray con il carico statico.

5.3. Attuazione pulsata. Marioni et al.[47] hanno sperimentato un'attuazione con un campo pulsato in un singolo cristallo di Ni-Mn-Ga. Usando un campo magnetico pulsato con periodo di 620 μs e diversi picchi di ampiezza, venne documentato il movimento di singole varianti. E' chiaro da questo lavoro che gli allungamenti osservati sono dovuti ai movimenti delle singole varianti. Il movimento dei bordi è correlato con la presenza di ostacoli discreti che impediscono il movimento delle varianti. Quando l'ampiezza del campo pulsato viene aumentata alcune varianti sono in grado di superare gli ostacoli ed avviare il movimento delle varianti.

6. Modelli microscopici per FSMA

Vengono presentati adesso 3 esempi di modelli fenomenologici a livello microscopico per materiali a memoria di forma ferromagnetici, in particolare per singoli cristalli di Ni-Mn-Ga.

6.1. Il modello della frazione di volume delle varianti. Questo modello è stato elaborato inizialmente da O’Handley et al.[38, 47] e poi ripreso da Ullakko et al.[20] Esso tiene in considerazione l’energia di tipo Zeeman, quella magnetica anisotropica, quella interna per il recupero elastico e gli sforzi esterni applicati. Utilizzando un semplice sistema di due varianti, la deformazione indotta dal campo magnetico applicato può essere scritta come funzione della frazione di volume di ogni variante (f_i):

$$\varepsilon(H) = \varepsilon_0 \delta f = \frac{2K_u h (1 - h/2) - \sigma \varepsilon_0}{C_{eff} \varepsilon_0} \quad (3.2)$$

dove ε_0 è la deformazione di trasformazione, K_u la costante di anisotropia, δf è $f_1 - 1/2$, h è il campo che si è ridotto definito come:

$$h = \frac{M_s H}{2K_u}$$

e C_{eff} è il modulo effettivo del materiale riarrangiato tenendo conto delle zone che non sono attive. Un difetto di questo modello si ritrova nel fatto che non tiene conto del fenomeno di soglia del campo magnetico applicato rilevato invece con gli esperimenti.

6.2. Il modello microstrutturale. Questo modello termodinamico del meccanismo di movimento delle varianti è stato formulato da Mullner et al.[21, 37] La densità di energia che è stata considerata è l’energia di tipo Zeeman (MH) e la costante magnetica di anisotropia (K_u). La densità totale di energia viene poi scomposta nelle sue componenti ortogonali. Lo sforzo di taglio sul piano di riarrangiamento delle varianti è dato da:

$$\tau_{mag} = \frac{E_{mag}}{s} = \begin{cases} \frac{\mu_0 M H}{s} \left(1 - \frac{\mu_0 M H}{4K_u} \right) & \text{per } H \leq H_{sat} \\ \frac{K_u}{s} & \text{per } H > H_{sat} \end{cases} \quad (3.3)$$

dove s è la deformazione di taglio, E_{mag} la densità totale di energia, H il campo magnetico applicato e H_{sat} il campo magnetico quando è saturato.

Con l'applicazione ciclica del campo magnetico si ha uno sforzo magnetico di taglio definito come,

$$\tau_{mag}(\gamma) = \tau_{mag} \times f(\gamma) \quad (3.4)$$

dove $f(\gamma) = -\cos(-2\gamma)$ e γ è l'angolo del campo magnetico preso rispetto all'asse longitudinale del campione.

6.3. Il modello di Likhachev e Ullakko. Nel 2000, Likhachev e Ullakko[40] hanno ottenuto un'espressione della deformazione indotta da campo magnetico partendo da considerazioni generali. Le proprietà meccaniche ($\sigma(\varepsilon, h)$) e magnetiche ($m(\varepsilon, h)$), dove ε e h rappresentano la deformazione e la densità del flusso di campo magnetico, sono state ottenute imponendo come vincolo la regola di Maxwell per cui

$$\frac{\partial \sigma}{\partial m} = -\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}. \quad (3.5)$$

L'espressione risultante che descrive lo sforzo indotto dall'applicazione del campo magnetico è la seguente:

$$\sigma^{mag}(h) = \frac{g_t(h) - g_a(h)}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^h m_t(h)dh - \int_0^h m_a(h)dh}{\varepsilon_0} \quad (3.6)$$

dove $m_a(h)$ e $m_t(h)$ rappresentano le curve di magnetizzazione per la variante con assi di magnetizzazione rispettivamente in direzione assiale (easy axis) e in direzione longitudinale (hard axis); ε_0 rappresenta invece la deformazione cristallografica limite o la deformazione massima indotta da campo magnetico. Per la deformazione meccanica è stata adottata una funzione, introdotta da Fermi in altri contesti, per cui

$$\varepsilon^{mec} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \exp\left(\frac{\pm \sigma_0 - \sigma}{\Delta \sigma}\right)} \quad (3.7)$$

dove σ è lo sforzo nella direzione [001], σ_0 e $\Delta\sigma$ sono dei parametri caratteristici definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_0 - 2\Delta\sigma \\ \sigma_f &= \sigma_0 + 2\Delta\sigma\end{aligned}\tag{3.8}$$

con σ_s e σ_f rispettivamente lo sforzo iniziale e quello finale per il riarrangiamento delle varianti. E' evidente che questo modello mette in risalto il comportamento isteretico del materiale.

CAPITOLO 4

Applicazioni degli FSMA

Verranno qui di seguito presentate alcune possibili applicazioni dei FSMA, con particolare riferimento agli attuatori[63, 65], un accenno ai micro-attuatori[64] ed alcune particolari applicazioni mediche[5, 62].

1. Applicazioni che sfruttano il FSME

Alcune applicazioni che sfruttano l'effetto a memoria di forma ferromagnetico si ritrovano in svariati campi dell'ingegneria. Per esempio si possono realizzare anelli per tubature o per serraggi di schede hardware. Raffreddando l'anello lo si porta in fase martensitica e si applica un campo magnetico adatto per la deformazione che si vuole ottenere. A questo punto si applica l'anello tra due tubature o nella circuiteria che si vuole serrare; quando l'anello è posizionato correttamente si applica un campo magnetico tale da avere un recupero totale della forma originaria e tramite riscaldamento si riporta il materiale in fase austenitica. I vantaggi di questa tecnica sono la semplicità e la velocità della procedura, è richiesto poco lavoro per l'operatore, bisogna utilizzare semplici strumenti per l'installazione. In più l'operazione di assemblaggio è possibile sotto un ampio range di temperature e di condizioni di carico magnetico.

2. Attuatori in FSMA

L'unica industria che per ora ha investito sugli attuatori in FSMA è l'AdaptaMat Ltd. ma i risultati sono già molto promettenti. IL cambiamento di forma in materiali in FSMA può avvenire in differenti modi, per esempio

deformandolo lungo la direzione assiale oppure flettendolo. Comunque l'uso più frequente di questi materiali è negli attuatori lineari per il movimento assiale. La topologia del più comune circuito magnetico per attuatori FSMA si può vedere qui sotto in figura (4.1):

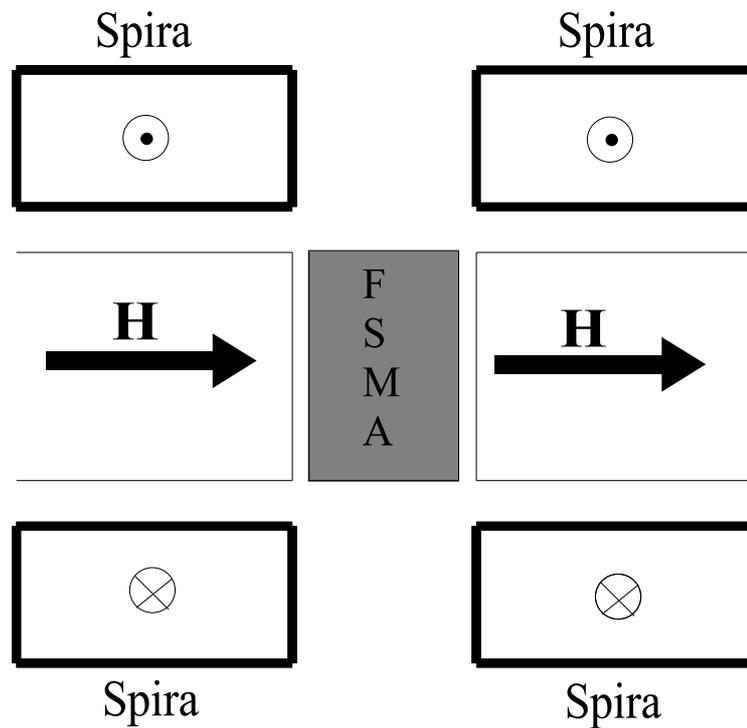


FIGURA 4.1. Circuito magnetico per attuatori FSMA

In questa topologia l'elemento FSMA è situato nel nucleo ferromagnetico e il campo magnetico esterno viene generato attraverso le spire. Il circuito elettrico connesso alla spira vede questo tipo di configurazione come un induttore. L'intensità del campo magnetico nell'elemento dipende praticamente solo dalla corrente. La differenza di potenziale applicata è vista come un ritardo dall'elemento quindi è meglio pilotare l'elemento con un generatore di corrente. Quando esposto al campo magnetico l'elemento FSMA genera uno sforzo

meccanico. Questo sforzo è una funzione dell'intensità del campo magnetico e quindi della corrente immessa. Quindi quando noi controlliamo la corrente, in realtà possiamo controllare l'accelerazione dell'attuatore. Questa relazione influenza il controllo di posizione dell'attuatore. Per le applicazioni di controllo di posizione è utile includere una misura esterna di posizione dal momento che il movimento nell'attuatore FSMA dipende dalla forza che si oppone all'elemento FSMA. Un diagramma per il controllo di posizione potrebbe quindi essere il seguente:

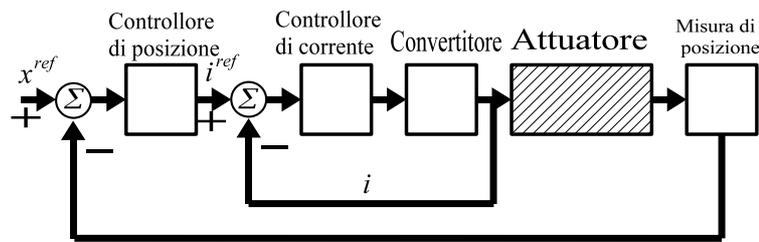


FIGURA 4.2. Schema a blocchi per il controllo di posizione

Inoltre dal momento che il cambiamento di forma è relativamente grande, l'attuatore può essere spesso usato senza nessuna amplificazione meccanica. In questa trattazione analizzeremo tre diversi attuatori: un motore lineare, una valvola e una pompa.

2.1. Motore lineare in FSMA. Come si vede in figura (4.3) il motore lineare è costituito di quattro parti: l'attuatore FSMA, una pinza anteriore, una pinza posteriore e un asse. Il motore viene progettato seguendo il principio del movimento del verme. La pinza posteriore è connessa all'attuatore ed è inizialmente chiusa. Grazie all'effetto a memoria di forma ferromagnetico l'attuatore muove la pinza anteriore, in questo momento aperta, che scorre sull'asse. Quando è stata raggiunta la deformazione voluta dell'elemento FSMA

viene chiusa la pinza anteriore e aperta quella posteriore che, attraverso il recupero di forma, si muove in avanti sull'asse.

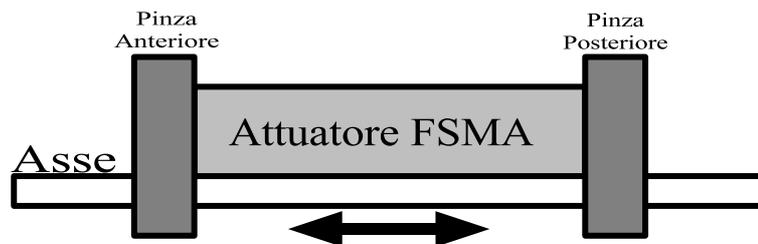


FIGURA 4.3. Motore lineare che utilizza FSMA

2.2. Valvola in FSMA. L'attuatore in FSMA può essere usato in una valvola proporzionale per il controllo del flusso dell'aria. Come si vede in figura (4.4) la valvola è costituita dall'attuatore FSMA, da una molla e da un pistone. Supponiamo che la valvola sia chiusa, che il pistone sia abbassato e che quindi l'elemento FSMA si trovi in configurazione non deformata. Applicando un campo magnetico e quindi una corrente attraverso la spira dell'attuatore, l'elemento FSMA si deforma e il pistone sale permettendo l'apertura della valvola e la fuoriuscita dell'aria. Grazie alla molla, durante il processo di recupero della forma, il pistone scende, così da permettere la chiusura della valvola.

2.3. Pompa in FSMA. La pompa in FSMA dimostra la possibilità di sfruttare tutte le direzioni lungo le quali si deforma l'elemento FSMA. Come si vede in figura (4.5) questo sistema è costituito da due parti: l'elemento FSMA e quattro camere separate. L'elemento FSMA, disposto al centro delle quattro camere, grazie alle sue proprietà può riempire e svuotare le camere con una certa frequenza. Questo meccanismo può generare pressione.

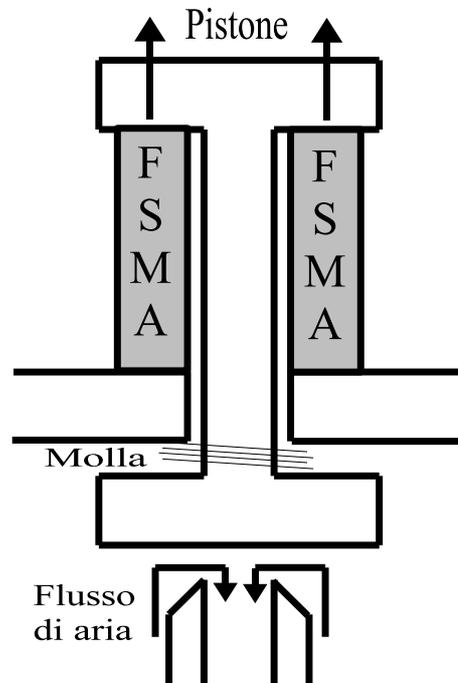


FIGURA 4.4. Valvola che utilizza FSMA

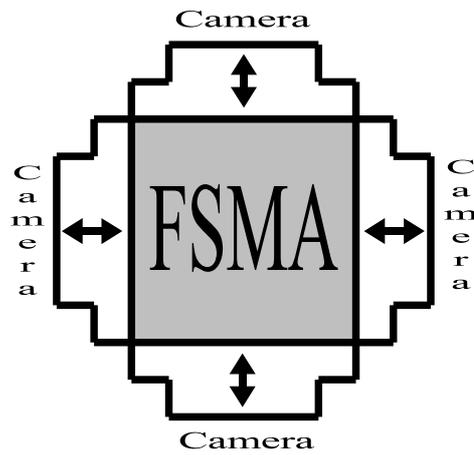


FIGURA 4.5. Pompa che utilizza FSMA

3. Micro-attuatori in FSMA

Le leghe a memoria di forma convenzionali e ancor più quelle ferromagnetiche avranno e hanno avuto già tuttora, un sostanziale impatto in robotica, dove tutti gli elementi meccanici hanno di solito il problema di dover essere i più ridotti possibili di dimensioni. Hitachi Electrical Co. ha già realizzato



FIGURA 4.6. Esempio di mano robotica

qualche hanno fa una mano robotica con 13 gradi di libertà con le dimensioni di un quella umana con SMA convenzionali. Il problema con gli SMA convenzionali è però la loro lentissima cinetica e proprio per questo sicuramente nel campo della robotica umanoide il futuro sarà rappresentato dagli FSMA capaci di un range di frequenze molto elevato. Per concludere i micro-attuatori SMA e FSMA mostrano una intrinseca capacità per il controllo delle forze applicate, una proprietà di rilevante interesse per le applicazioni di robotica avanzata. Per esempio, i robot in SMA e FSMA possono impugnare una palla morbida con delicatezza e una palla dura stringendo più forte.

4. Applicazioni mediche

Per quanto riguarda le applicazioni mediche, gli FSMA possono essere utilizzati in micropompe oppure per endoscopi o cateteri attivi. Per quanto riguarda le micropompe il meccanismo utilizzato è lo stesso delle pompe già discusse precedentemente. Invece per quanto riguarda gli endoscopi e i cateteri attivi si sfrutta la caratteristica degli FSMA di deformarsi, grazie alla variazione dell'intensità del campo magnetico esterno applicato.

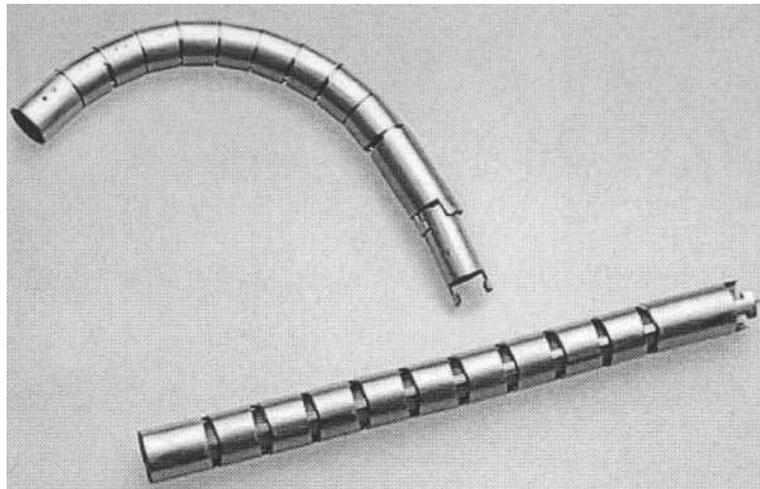


FIGURA 4.7. Esempio di endoscopio attivo

Un modello macroscopico per SMA

In questo capitolo verrà presentato un modello macroscopico termomeccanico tridimensionale per SMA convenzionali sviluppato dapprima da Souza e poi perfezionato da Auricchio et al.[49, 50, 51]. Nel capitolo 6 verranno presentate le opportune modifiche di questo per la presentazione di un modello macroscopico per FSMA. Vengono mostrate ora la formulazione 3D a tempo continuo e discreto e poi quella 1D a tempo continuo e discreto del modello per SMA convenzionali.

1. Il modello 3D a tempo continuo

Per modellizzare uno SMA convenzionale sono state identificate 2 variabili di controllo e una interna. Come variabili di controllo assumiamo il tensore della deformazione ε e la temperatura assoluta T ; invece come variabile interna assumiamo il tensore della deformazione di trasformazione \mathbf{e}^{tr} . Il tensore \mathbf{e}^{tr} descrive la deformazione associata alla trasformazione di fase. E' importante però notare che, con una sola variabile interna, è possibile distinguere tra una generica fase genitrice (non associata ad alcuna deformazione macroscopica) e una generica fase prodotto (associata invece ad una deformazione macroscopica). Una prima condizione vincolante su \mathbf{e}^{tr} è la seguente:

$$0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (5.1)$$

dove ε_L rappresenta la massima deformazione di trasformazione raggiunta durante un test uniassiale e può essere considerata un parametro caratteristico del materiale.

In questo modello assumeremo di trovarci in un regime di piccole deformazioni perchè terremo conto del fatto che in molte applicazioni abbiamo grandi spostamenti ma piccole deformazioni indotte. Possiamo ora esprimere una funzione di energia libera Ψ per materiale SMA convenzionale policristallino attraverso il seguente potenziale convesso:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e}^{tr}, T) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \Psi_{id} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) \quad (5.2)$$

Per i tensori del secondo ordine $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ utilizziamo la decomposizione standard (parte deviatorica e volumetrica) per cui,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\theta}{3}\mathbf{1} + \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s} \end{cases} \quad (5.3)$$

dove $\mathbf{1}$ è il tensore identità del secondo ordine, p e θ le componenti volumetriche ed \mathbf{e} e \mathbf{s} le componenti deviatoriche.

Andiamo ora a specificare le varie componenti del potenziale convesso:

- (1) l'energia elastica di deformazione Ψ_{el} , dovuta alla deformazione termoelastica del materiale:

$$\Psi_{el} = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) \quad (5.4)$$

dove K è il modulo volumetrico, G il modulo di taglio, α il coefficiente di espansione termica e T_0 la temperatura assoluta di riferimento;

- (2) l'energia chimica Ψ_{ch} , associate alla trasformazione martensitica indotta termicamente:

$$\Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr}\| \quad (5.5)$$

dove β è un parametro del materiale legato alla dipendenza dello sforzo dalla temperatura, M_f la temperatura di transizione per la trasformazione martensitica e $\langle \bullet \rangle$ la parte positiva dell'argomento

definita come

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.6)$$

- (3) l'energia di deformazione di trasformazione Ψ_{tr} , dovuta al riarrangiamento delle varianti:

$$\Psi_{tr} = \frac{1}{2}h \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 \quad (5.7)$$

dove h è un parametro del materiale che esprime la pendenza della fase lineare tra sforzo e deformazione di trasformazione in relazione al caso uniassiale;

- (4) l'energia libera Ψ_{id} , dovuta alla variazione di temperatura rispetto allo stato di riferimento in cui $T = T_0$ considerando un solido ideale incomprimibile:

$$\Psi_{id} = (u_0 - T\eta_0) + c \left[(T - T_0) - T \ln \frac{T}{T_0} \right] \quad (5.8)$$

dove c è la capacità del calore, u_0 l'energia interna allo stato di riferimento e η_0 l'entropia allo stesso stato;

- (5) $\mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})$ rappresenta la funzione indicatrice introdotta per soddisfare i vincoli della norma del tensore della deformazione di trasformazione:

$$\mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.9)$$

La funzione di energia libera totale così ottenuta è la seguente:

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e}^{tr}, T) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \beta \langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr}\| + \\ & \frac{1}{2}h \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + (u_0 - T\eta_0) + c \left[(T - T_0) - T \ln \frac{T}{T_0} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Derivando la Ψ rispetto alle diverse variabili si possono ottenere le relazioni costitutive:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = \frac{\partial \Psi}{\partial e} = 2G(e - e^{tr}) \\ \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \eta_0 + 3\alpha K \theta - \beta \|e^{tr}\| \frac{\langle T - M_f \rangle}{|T - M_f|} + c \ln \frac{T}{T_0} \\ \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial e^{tr}} = \mathbf{s} - \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(e^{tr})}{\partial \|e^{tr}\|} \right] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \end{cases} \quad (5.11)$$

dove η è l'entropia e \mathbf{X} una forza termodinamica associata al tensore della deformazione di trasformazione e denominata sforzo di trasformazione. Inoltre risulta che,

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(e^{tr})}{\partial \|e^{tr}\|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ +\mathcal{R} & \text{se } \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \\ \emptyset & \text{se } \|e^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.12)$$

L'equazione (5.11) può essere anche scritta come,

$$\mathbf{X} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \quad (5.13)$$

dove

$$\boldsymbol{\alpha} = [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \quad (5.14)$$

con

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } 0 \leq \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.15)$$

Per completare il modello formuliamo una legge di evoluzione per e^{tr} :

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.16)$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta}F = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

dove F è una funzione limite e $\dot{\zeta}$ un parametro di consistenza plastica. Dopo numerose prove sperimentali si è notato il comportamento asimmetrico in compressione e in tensione degli SMA convenzionali e questo ha suggerito di modellizzare i materiali come isotropici con una superficie di tipo Prager-Lode. Quindi si è poi scelta la seguente equazione di campo:

$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \quad (5.18)$$

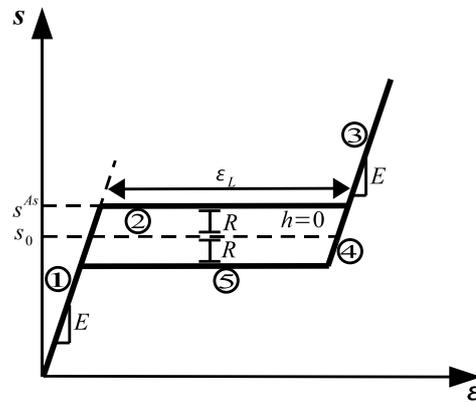
dove J_2 e J_3 rappresentano la seconda e la terza invariante del tensore \mathbf{X} e sono definiti come,

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^2 : \mathbf{1}) \\ J_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{X}^3 : \mathbf{1}) \end{cases} \quad (5.19)$$

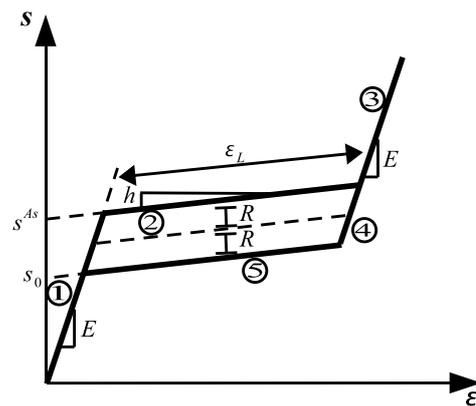
mentre R è il raggio del dominio elastico e m un parametro del materiale che viene posto $m \leq 0.46$ per garantire la convessità della superficie. Le quantità R e m possono essere dedotte anche dalle seguenti formule,

$$\begin{cases} R = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \\ m = \sqrt{\frac{27}{2}} \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \end{cases} \quad (5.20)$$

dove σ_t è lo sforzo uniassiale critico in tensione e σ_c lo sforzo uniassiale critico in compressione. Il modello presentato può quindi descrivere l'effetto a memoria di forma, la superelasticità, la risposta asimmetrica a test di trazione e compressione e la percentuale di sforzo dovuta all'accoppiamento termo-meccanico. Le figure seguenti rappresentano i diversi aspetti.



(a)



(b)

FIGURA 5.1. Schema dell'effetto pseudo-elastico ($T = A_f$) nel caso in cui h sia 0 (a) o diverso da 0 (b). 5 fasi: **1** Deformazione elastica dell'austenite; **2** Trasformazione da austenite a martensite in singola variante; **3** Deformazione elastica della martensite in singola variante; **4** Recupero della deformazione elastica; **5** Recupero della deformazione di trasformazione ottenuta rimuovendo il carico.

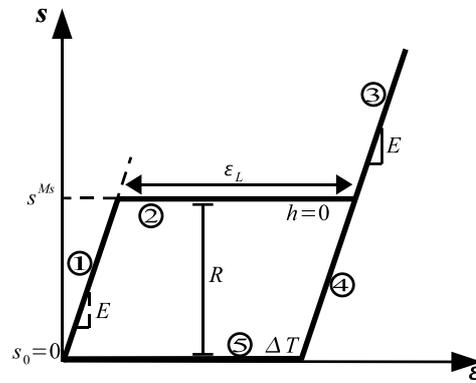


FIGURA 5.2. Schema dell'effetto a memoria di forma ($T = M_f$): **1** Deformazione elastica della martensite multi-variante; **2** Trasformazione da martensite multi-variante a martensite singola variante; **3** Deformazione elastica della martensite singola variante; **4** Recupero della deformazione elastica; **5** Recupero della deformazione di trasformazione termicamente.

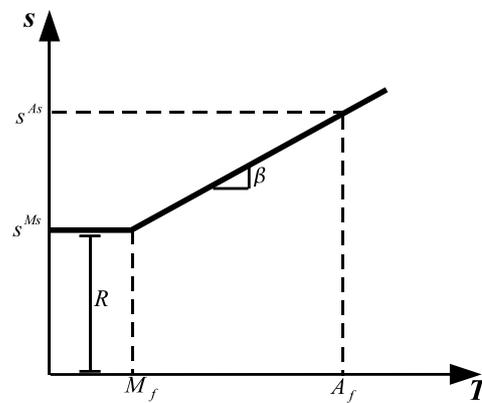


FIGURA 5.3. Relazione tra la parte deviatorica dello sforzo e la temperatura.

Trattiamo ora i vantaggi e gli svantaggi di questo modello. Iniziamo dagli svantaggi:

- il modello non tiene conto della dipendenza di alcuni parametri materiali nella specifica miscela all'interno della fase austenite-martensite. Per esempio non descrive la differenza tra modulo elastico in fase austenitica e in fase martensitica;
- come già accennato in precedenza, il modello non distingue tra austenite e martensite riarrangiata e non da una descrizione dettagliata delle singole varianti di martensite disponibili in una singola lega;
- il modello è sviluppato in regime di piccole deformazioni.

Invece i vantaggi sono i seguenti:

- la caratterizzazione tensoriale della variabile interna permette di descrivere in una forma approssimata il processo di riorientamento della martensite. Infatti un materiale caratterizzato da uno specifico valore di e^{tr} mostra un processo matematicamente riassumibile con

$$\begin{cases} \|e^{tr}\| = \text{cost} \\ e^{tr} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.21)$$

Il fatto che la norma di e^{tr} rimanga costante indica la presenza di una frazione costante di martensite nel materiale e di un cambiamento della direzione di e^{tr} descrivendo così una riorientazione nella fase prodotto;

- la descrizione della dipendenza lineare, che ha lo sforzo critico, dalla temperatura, indicato dal fattore $\beta \langle T - M_f \rangle$ nell'equazione;
- il modello è termodinamicamente consistente perchè soddisfa la seconda legge della termodinamica nella forma della disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$D = D_m + D_{th} \geq 0 \quad (5.22)$$

dove D è la somma della dissipazione meccanica D_m e di quella termica D_{th} . In particolare:

$$D_m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} - \eta \dot{T} = \mathbf{X} : \mathbf{e}^{tr} \geq 0 \quad (5.23)$$

mentre considerando la legge di Fourier per la conduzione del calore $\mathbf{q} = -K^{th} \nabla T$ dove K^{th} è un parametro positivo e isotropico di conduttività termica. La dissipazione termica diventa:

$$D_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (5.24)$$

- appartiene alla classe dei modelli dissipativi.

2. Il modello 3D a tempo discreto

Per semplificare la risoluzione algoritmica del modello, trattiamo il problema non lineare come un problema implicito a tempo discreto guidato dalla deformazione. In particolare andiamo a suddividere il nostro intervallo di interesse $[0, T]$ in sottointervalli e andiamo a risolvere il problema dell'evoluzione su un generico sottointervallo $[t_n, t_{n+1}]$. Per semplicità adottiamo la seguente convenzione:

$$\begin{cases} a_n = a(t_n) \\ a = a(t_{n+1}) \end{cases} \quad (5.25)$$

La tecnica per la risoluzione successiva del problema verrà analizzata in dettaglio nel capitolo 7. In questa trattazione considereremo costante la temperatura e nota in ogni sottointervallo. Le relazioni costitutive a tempo discreto ottenuto saranno allora le seguenti:

$$\begin{cases} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{X} = \mathbf{s} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|\mathbf{e}^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \end{cases} \quad (5.26)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.27)$$

e come legge evolutiva e condizioni di Kuhn-Tucker discrete,

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0 \\ \Delta\zeta \geq 0 \\ \Delta\zeta F(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

dove $\Delta\zeta = (\zeta - \zeta_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\zeta} dt$ è il parametro di consistenza nell'integrazione del tempo.

Per il tempo discreto nasce un problema dal punto di vista computazionale, in quanto \mathbf{X} dipende dalla derivata di $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ che discretamente non è definita in alcuni punti. Allora sostituiamo la norma euclidea $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ con la norma regolarizzata $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}$ definita come,

$$\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} = \|\mathbf{e}^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|\mathbf{e}^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \quad (5.29)$$

dove δ è un parametro definito dall'utente. Per grandi valori di \mathbf{e}^{tr} la norma regolarizzata coincide con la norma euclidea; per piccoli valori di \mathbf{e}^{tr} la differenza tra $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ e $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}$ è misurata dal parametro δ e tende a zero quando $\delta \rightarrow 0$. In più la quantità $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}$ è sempre differenziabile e $\mathbf{e}^{tr} = 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Quindi la quantità $\partial\|\mathbf{e}^{tr}\|/\partial\mathbf{e}^{tr}$ è sempre definita. Per avere un'idea riguardo al significato fisico del parametro δ e come sceglierlo, consideriamo un processo per cui $\mathbf{e}^{tr} \rightarrow 0$ lungo una determinata direzione, per esempio $\mathbf{e}^{tr} = \pi \mathbf{d}$ con \mathbf{d} fissato $\|\mathbf{d}\| = 1$ quando $\pi \rightarrow 0$. Per questo processo è facile mostrare che:

$$\lim_{\pi \rightarrow 0^+} \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} = \lim_{\pi \rightarrow 0^+} \left[\pi - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\pi + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \right] = \frac{\delta^2}{1-\delta} \quad (5.30)$$

La scelta di δ deve quindi soddisfare la seguente condizione:

$$\overline{\|\mathbf{0}\|} = \frac{\delta^2}{1-\delta} \ll \varepsilon_L \quad (5.31)$$

3. Il modello 1D a tempo continuo

La derivazione del modello 1D dal modello 3D è quasi immediata. In questo caso però non consideriamo la temperatura T come variabile ma fissata. Per il modello 1D la variabile di controllo risulterà la deformazione totale ε mentre la variabile interna sarà la deformazione di trasformazione ε^{tr} . Per ε^{tr} il vincolo diventa:

$$|\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \quad (5.32)$$

Il potenziale convesso sarà ,

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^{tr}) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (5.33)$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{el} = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 \\ \Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| \\ \Psi_{tr} = \frac{1}{2} h (\varepsilon^{tr})^2 \\ \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.34)$$

dove E rappresenta il modulo di Young mentre gli altri parametri sono gli stessi del modello 3D. In definitiva quindi il potenziale sarà :

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^{tr}) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 + \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| + \frac{1}{2} h (\varepsilon^{tr})^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (5.35)$$

Le relazioni costitutive derivate saranno le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h \varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \end{array} \right. \quad (5.36)$$

con

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.37)$$

La legge di evoluzione e la funzione limite saranno,

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \dot{\zeta} \frac{X}{|X|} \\ F(X) = |X| - R \end{cases} \quad (5.38)$$

Completiamo infine il modello con le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

4. Il modello 1D a tempo discreto

Utilizziamo le stesse convenzioni del modello 3D e assumiamo, per le stesse considerazioni, come modulo regolarizzato la seguente funzione:

$$\overline{|a|} = \sqrt{|a|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \quad (5.40)$$

e quindi per il nostro caso sarà :

$$\overline{|\varepsilon^{tr}|} = \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \quad (5.41)$$

Le relazioni costitutive a tempo discreto quindi saranno:

$$\begin{cases} \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ X = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h \varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \end{cases} \quad (5.42)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (5.43)$$

mentre la legge evolutiva, la funzione limite e le condizioni di Kuhn -Tucker discrete saranno,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \\ F(X) = |X| - R \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta\zeta \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \Delta\zeta F(X) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.44)$$

5. Riepilogo

MODELLO AURICCHIO-PETRINI 3D A TEMPO CONTINUO

Variabili di controllo: ε, T Variabile interna: e^{tr}

Relazioni costitutive:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = \frac{\partial \Psi}{\partial e} = 2G(e - e^{tr}) \\ \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial e^{tr}} = s - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \sigma} \quad \text{con} \quad F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases}$$

MODELLO AURICCHIO-PETRINI 3D A TEMPO DISCRETO

Variabile di controllo: ε Variabile interna: e^{tr}

Relazioni costitutive:

$$\begin{cases} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = 2G(e - e^{tr}) \\ \mathbf{X} = s - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ \gamma \geq 0 \\ \|e^{tr}\| = \|e^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|e^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$e^{tr} = e_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \sigma} \quad \text{con} \quad F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F(\mathbf{X}) = 0 \end{cases}$$

MODELLO AURICCHIO-PETRINI 1D A TEMPO CONTINUO**Variabile di controllo:** ε **Variabile interna:** ε^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \dot{\zeta} \frac{X}{|X|} \quad \text{con} \quad F(X) = |X| - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases}$$

MODELLO AURICCHIO-PETRINI 1D A TEMPO DISCRETO**Variabile di controllo:** ε **Variabile interna:** ε^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ X = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| = \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{X}{|X|} \quad \text{con} \quad F(X) = |X| - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F(X) = 0 \end{cases}$$

CAPITOLO 6

Modelli macroscopici per FSMA

In questo capitolo verrà dettagliatamente trattato un modello macroscopico per materiali a memoria di forma ferromagnetici al fine di formulare nell'ultimo, e più ampio paragrafo, nuovi possibili modelli da verificare, in un secondo momento, numericamente e poi sperimentalmente.

1. Il modello di Lagoudas

Lagoudas et al.[58] hanno formulato un modello fenomenologico macroscopico termodinamicamente consistente a tempo continuo per materiali a memoria di forma ferromagnetici. Dal punto di vista termodinamico è stata definita una funzione di energia libera di Gibbs G che dipende dalle variabili di stato di controllo quali la temperatura assoluta T , il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ e il campo magnetico \mathbf{H} e dalle variabili di stato interne quali il tensore della deformazione di riorientamento inelastico $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ e un generico set di variabili $\boldsymbol{\zeta}$. L'energia libera di Gibbs è relazionata all'energia interna $u = \hat{u}(s, \boldsymbol{\varepsilon}^{te}, \mathbf{M}, \boldsymbol{\varepsilon}^r, \boldsymbol{\zeta})$ attraverso la seguente trasformazione di Legendre:

$$G = \hat{G}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \boldsymbol{\varepsilon}^r, \boldsymbol{\zeta}) = u - sT - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{te} - \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad (6.1)$$

dove s è l'entropia, ρ la densità, $\boldsymbol{\varepsilon}^{te}$ il tensore della deformazione termoelastica, μ_0 la permeabilità magnetica nel vuoto e \mathbf{M} la magnetizzazione. Ipotizzando un regime di piccole deformazioni il tensore della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ può essere decomposto nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{te} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr} \quad (6.2)$$

dove come stato di riferimento è stato assunta la fase austenitica indeformata. La deformazione termoelastica ε^{te} è la parte reversibile del tensore della deformazione totale ε , mentre la parte irreversibile è caratterizzata dalla deformazione di riorientamento ε^r e dalla deformazione di trasformazione $\bar{\varepsilon}^{tr}$. La barra indica che la quantità rimane costante durante tutto il processo di riorientamento rimanendo il materiale nella fase martensitica ($\dot{\bar{\varepsilon}}^{tr} = 0$). Presentiamo ora le leggi della termodinamica appositamente adattate a questo contesto. La prima legge della termodinamica afferma che:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{M}} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r^h \quad (6.3)$$

dove \mathbf{q} è il vettore flusso di calore e r^h una sorgente di calore. Invece la seconda legge della termodinamica può essere formulata in termini di produzione di entropia interna γ nel seguente modo:

$$\gamma := \dot{s} - \frac{r^h}{T} + \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (6.4)$$

Utilizzando la prima e la seconda legge della termodinamica appena presentate possiamo derivare la disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\begin{aligned} & -\rho \left(s + \frac{\partial G}{\partial T} \right) \dot{T} - \left(\varepsilon^{te} + \rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \left(\mu_0 \mathbf{M} + \rho \frac{\partial G}{\partial \mathbf{H}} \right) \dot{\mathbf{H}} \\ & + \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^r} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r - \rho \frac{\partial G}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

da cui possiamo ricavare le varie relazioni costitutive:

$$s = -\frac{\partial G}{\partial T}; \quad \varepsilon^{te} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \mu_0 \mathbf{M} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \mathbf{H}} \quad (6.6)$$

Invece per $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r$ e $\dot{\zeta}$ rimane il seguente vincolo,

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r - \rho \frac{\partial G}{\partial \zeta} \cdot \dot{\zeta} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad \text{con } \boldsymbol{\sigma}^{eff} := \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^r} \quad (6.7)$$

Ora dobbiamo definire il set di parametri ζ che permette di definire la funzione di energia libera che tenga conto dello sviluppo della deformazione di

riorientamento e della magnetizzazione associata all'effetto a memoria di forma magnetico. Verranno aggiunte anche altre variabili di stato interne per modellizzare la rotazione locale della magnetizzazione dall'asse di facile magnetizzazione. Le variabili di controllo già derivate dalla funzione di Gibbs sono l'entropia s , la deformazione termoelastica $\boldsymbol{\varepsilon}^{te}$ e la magnetizzazione \mathbf{M} (derivato dalla temperatura assoluta T , lo sforzo meccanico $\boldsymbol{\sigma}$, l'intensità del campo magnetico \mathbf{H}). Per definire le variabili interne analizziamo per semplicità un caso 2D dove coesistono due varianti martensitiche e due domini magnetici. La variante 1 è magnetizzata lungo la direzione x ([100]) mentre la variante 2 lungo la direzione y ([010]). I domini magnetici sono definiti dall'orientamento della magnetizzazione. Il dominio magnetico 1 si riferisce alle parti della microstruttura magnetica nelle quali la magnetizzazione, quando è allineata con l'asse preferenziale, è orientata nella direzione negativa rispetto alle coordinate di riferimento, e il dominio magnetico 2 quando punta nell'altra direzione. Vengono allora introdotte due nuove variabili interne oltre alla deformazione di orientamento $\boldsymbol{\varepsilon}^r$: la frazione scalare di volume martensitico nella variante 2, ξ , e la frazione di volume del dominio magnetico 2, α . Coerentemente per la variante 1 avremo $(1 - \xi)$ e per il dominio magnetico 1 $(1 - \alpha)$. Infine, come variabili interne, si introducono gli angoli θ_i , con $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2})$, dove i si riferisce a una delle 4 sottoregioni indicate nella figura (6.1). Per questa configurazione microstrutturale le 4 distinte direzioni di magnetizzazione hanno i seguenti vettori di magnetizzazione,

$$\begin{cases} \mathbf{M}^1 := \mathbf{M}^{V_1 D_1} = M^{sat} (-\cos(\theta_1)\mathbf{e}_x - \sin(\theta_1)\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{M}^2 := \mathbf{M}^{V_2 D_1} = M^{sat} (\sin(\theta_2)\mathbf{e}_x - \cos(\theta_2)\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{M}^3 := \mathbf{M}^{V_1 D_2} = M^{sat} (\cos(\theta_3)\mathbf{e}_x + \sin(\theta_3)\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{M}^4 := \mathbf{M}^{V_2 D_2} = M^{sat} (-\sin(\theta_4)\mathbf{e}_x + \cos(\theta_4)\mathbf{e}_y) \end{cases} \quad (6.8)$$

dove M^{sat} è la magnetizzazione di saturazione e e_x, e_y i versori degli assi coordinati di riferimento. La magnetizzazione effettiva del materiale sarà definita nel seguente modo:

$$\mathbf{M} = (1 - \xi) [(1 - \alpha) \mathbf{M}^1 + \alpha \mathbf{M}^3] + \xi [(1 - \alpha) \mathbf{M}^2 + \alpha \mathbf{M}^4] \quad (6.9)$$

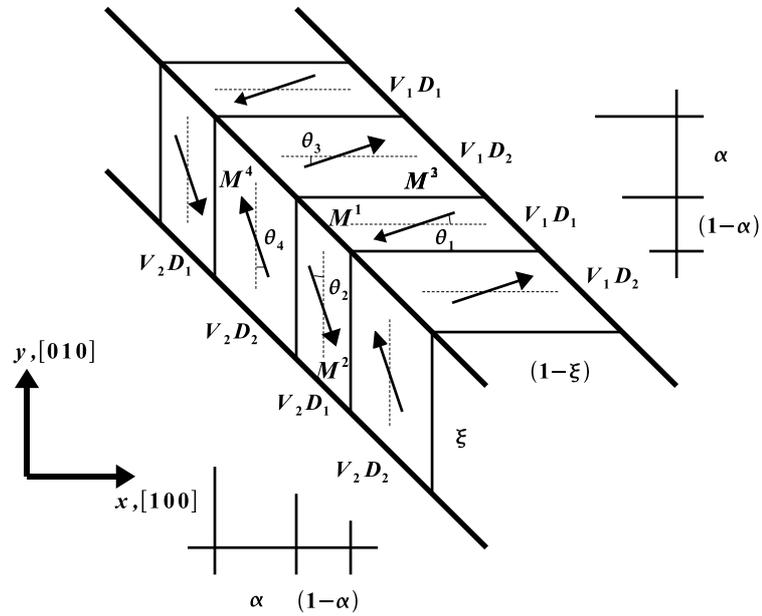


FIGURA 6.1. Schematizzazione dei domini magnetici e delle varianti martensitiche

La funzione di energia di Gibbs è costruita mediante la media pesata del contributo di ogni variante, più un termine che tiene conto delle interazioni delle varianti martensitiche:

$$\begin{aligned} G = \hat{G}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \boldsymbol{\varepsilon}^r, \alpha, \theta_j) &= \xi G^{V_2}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \alpha, \theta_2, \theta_4) \\ &+ (1 - \xi) G^{V_1}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \alpha, \theta_1, \theta_3) + G^{\xi-mix}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^r) \quad \text{con } j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (6.10)$$

dove

$$G^{V_i} = -\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{S}^{V_i} \boldsymbol{\sigma} + (1 - \alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^{V_i D_1} \cdot \mathbf{H} + G^{an, V_i D_1} \right] \\ + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^{V_i D_2} \cdot \mathbf{H} + G^{an, V_i D_2} \right] + G^{\alpha-mix}(\alpha) + G_0(T) \quad (6.11)$$

con $i = 1, 2$

Qui \mathcal{S}^{V_i} indica il tensore di compliance elastica della variante i mentre $G^{\alpha-mix}$ tiene conto delle interazioni dei differenti domini magnetici. La quantità scalare G_0 è un valore di riferimento dell'energia libera di Gibbs che include il cambiamento dovuto alla trasformazione di fase da austenite a martensite. Siccome il processo di riorientamento è considerato isoterma, G_0 è una costante. Per l'energia magnetocristallina non isotropica G^{an} per simmetria assiale abbiamo:

$$G^{an} = \sum_{n=0}^N K_n \sin^{2n}(\theta) \quad (6.12)$$

I termini di interazione $G^{\xi-mix}$ e $G^{\alpha-mix}$ possono essere considerati come composti da funzioni nella forma,

$$\begin{cases} G^{\xi-mix} = \frac{1}{\rho} f^{\xi}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^r) \\ G^{\alpha-mix} = \frac{1}{\rho} f^{\alpha}(\alpha) \end{cases} \quad (6.13)$$

La forma esplicita dell'energia totale libera di Gibbs sarà ,

$$G = \hat{G}(T, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \boldsymbol{\varepsilon}^r, \alpha, \theta_j) \\ = -\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{S} \boldsymbol{\sigma} + \xi \left[(1 - \alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{H} + G^{an,2}(\theta_2) \right] + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^4 \cdot \mathbf{H} + G^{an,4}(\theta_4) \right] \right] \\ + (1 - \xi) \left[(1 - \alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^1 \cdot \mathbf{H} + G^{an,1}(\theta_1) \right] + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M}^3 \cdot \mathbf{H} + G^{an,3}(\theta_3) \right] \right] \\ + \frac{1}{\rho} f^{\xi}(\xi, \boldsymbol{\varepsilon}^r) + \frac{1}{\rho} f^{\alpha}(\alpha) + G_0(T) \quad \text{con} \quad \mathcal{S} := \mathcal{S}^{V_1} + \xi \Delta \mathcal{S} = \xi (\mathcal{S}^{V_2} - \mathcal{S}^{V_1}) \quad (6.14)$$

Da questa energia si possono derivare tutte le relazioni costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \eta = -\frac{\partial G}{\partial T} = -\frac{\partial G_0}{\partial T} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{te} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\sigma} \\
 \boldsymbol{M} = -\frac{\rho}{\mu_0} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{H}} = \xi [(1-\alpha) \boldsymbol{M}^2 + \alpha \boldsymbol{M}^4] + (1-\xi) [(1-\alpha) \boldsymbol{M}^1 + \alpha \boldsymbol{M}^3] \\
 \quad = M^{sat} \xi [(1-\alpha) (\sin(\theta_2) \boldsymbol{e}_x - \cos(\theta_2) \boldsymbol{e}_y) + \alpha (-\sin(\theta_4) \boldsymbol{e}_x + \cos(\theta_4) \boldsymbol{e}_y)] \\
 \quad + M^{sat} (1-\xi) [-(1-\alpha) (\cos(\theta_1) \boldsymbol{e}_x + \sin(\theta_1) \boldsymbol{e}_y) + \alpha (\cos(\theta_3) \boldsymbol{e}_x \\
 \quad + \sin(\theta_3) \boldsymbol{e}_y)] \\
 \tilde{\boldsymbol{\pi}}^r := \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^r} = \boldsymbol{\sigma}^{eff} \\
 \tilde{\pi}^\xi := -\rho \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Delta S} \boldsymbol{\sigma} - \rho \left[(1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{H} + G^{an,2}(\theta_2) \right] \right. \\
 \quad + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \boldsymbol{M}^4 \cdot \boldsymbol{H} + G^{an,4}(\theta_4) \right] \left. \right] + \rho \left[(1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \boldsymbol{M}^1 \cdot \boldsymbol{H} + G^{an,1}(\theta_1) \right] \right. \\
 \quad + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} \boldsymbol{M}^3 \cdot \boldsymbol{H} + G^{an,3}(\theta_3) \right] \left. \right] - \frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} \\
 \pi^\alpha := -\rho \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \rho \xi \left[G^{an,2}(\theta_2) - G^{an,4}(\theta_4) + \frac{\mu_0}{\rho} (\boldsymbol{M}^4 - \boldsymbol{M}^2) \cdot \boldsymbol{H} \right] \\
 \quad + \rho (1-\xi) \left[G^{an,1}(\theta_1) - G^{an,3}(\theta_3) + \frac{\mu_0}{\rho} (\boldsymbol{M}^3 - \boldsymbol{M}^1) \cdot \boldsymbol{H} \right] - \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} \\
 \pi^{\theta_1} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_1} = -\rho (1-\xi) (1-\alpha) \left[\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\sin(\theta_1) H_x + \cos(\theta_1) H_y] \right. \\
 \quad \left. + \frac{\partial G^{an,1}}{\partial \theta_1} \right] \\
 \pi^{\theta_2} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_2} = -\rho \xi (1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [\cos(\theta_2) H_x + \sin(\theta_2) H_y] + \frac{\partial G^{an,2}}{\partial \theta_2} \right] \\
 \pi^{\theta_3} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_3} = -\rho (1-\xi) \alpha \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\sin(\theta_3) H_x + \cos(\theta_3) H_y] + \frac{\partial G^{an,3}}{\partial \theta_3} \right] \\
 \pi^{\theta_4} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_4} = -\rho \xi \alpha \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\cos(\theta_4) H_x - \sin(\theta_4) H_y] + \frac{\partial G^{an,4}}{\partial \theta_4} \right]
 \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Le quantità che sono state definite $\tilde{\pi}^r$, $\tilde{\pi}^\xi$ e π^α possono essere interpretate come driving forces termodinamiche rispettivamente per il processo di riorientamento delle varianti e il movimento dei domini magnetici. Con queste definizioni la disuguaglianza di Clausius-Duhem può essere riscritta nel seguente modo:

$$\tilde{\pi}^r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r + \tilde{\pi}^\xi \dot{\xi} + \pi^\alpha \dot{\alpha} + \sum_{n=1}^4 \pi^{\theta_i} \dot{\theta}_i \geq 0 \quad (6.16)$$

dove il gradiente di temperatura è considerato ininfluenza. Da osservazioni fisiche è ragionevole che le rotazioni della magnetizzazioni sono termodinamicamente reversibili e quindi non contribuiscono alla produzione di entropia. In altri termini,

$$\pi^{\theta_i} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_i} = 0 \quad (6.17)$$

Quindi la nuova disuguaglianza sarà :

$$\tilde{\pi}^r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r + \tilde{\pi}^\xi \dot{\xi} + \pi^\alpha \dot{\alpha} \geq 0 \quad (6.18)$$

L'equazione (6.17) rappresenta un set di quattro relazioni per determinare i 4 angoli θ_i . Le rimanenti variabili di stato interne $\boldsymbol{\varepsilon}^r$, ξ e α sono associate a dissipazioni energetiche. Viene quindi definita per $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ una legge di evoluzione:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \mathbf{\Lambda}^r \dot{\xi} \quad (6.19)$$

dove $\mathbf{\Lambda}^r$ è un tensore di deformazione di riorientamento che definisce la direzione nella quale la deformazione di riorientamento si sviluppa in base al campo magnetico applicato. Nel caso particolare di $\mathbf{\Lambda}^r$ costante, possiamo scrivere la deformazione totale come,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{\Lambda}^r \xi + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{tr} \quad (6.20)$$

e la driving force termodinamica totale come,

$$\pi^\xi := \boldsymbol{\sigma}^{eff} : \mathbf{\Lambda}^r - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi} = \tilde{\pi}^r : \mathbf{\Lambda}^r + \tilde{\pi}^\xi \quad (6.21)$$

Da queste considerazioni e utilizzando le equazioni (6.17), (6.18) e (6.19) possiamo infine scrivere la disuguaglianza di Clausius-Duhem come:

$$\pi^\xi \dot{\xi} + \pi^\alpha \dot{\alpha} \geq 0 \quad (6.22)$$

Da questa disuguaglianza è evidente che le driving forces π^ξ e π^α sono termodinamicamente coniugate alle variabili di stato interne ξ e α . Si può inoltre assumere che i processi dissipativi associati al movimento delle varianti e dei domini magnetici sono disaccoppiati cosicché entrambi i termini al primo membro della disuguaglianza devono essere soddisfatti separatamente. Possiamo ora procedere a definire una funzione di riorientamento in termini di driving force termodinamica come,

$$\Phi^\xi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) = \begin{cases} \pi^\xi - Y^\xi, & \dot{\xi} > 0 \\ -\pi^\xi - Y^\xi, & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

dove la quantità scalare positiva Y^ξ è correlata fisicamente alle dissipazioni interne associate al movimento delle varianti. Il processo di riorientamento è soggetto a vincoli riguardo a una dissipazione massima di riorientamento che possono essere espressi tramite le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\xi} \geq 0 \\ \Phi^\xi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\xi \dot{\xi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi} \leq 0 \\ \Phi^\xi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\xi \dot{\xi} = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Infatti in regime elastico dove $\Phi^\xi < 0$ abbiamo $\dot{\xi} = 0$; il successivo processo di riorientamento è caratterizzato invece da $\Phi^\xi = 0$ e $\dot{\xi} > 0$ e infine nel processo inverso abbiamo $\Phi^\xi = 0$ e $\dot{\xi} < 0$.

In analogo può essere formulata una funzione associata al movimento dei domini,

$$\Phi^\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) = \begin{cases} \pi^\alpha - Y^\alpha, & \dot{\alpha} > 0 \\ -\pi^\alpha - Y^\alpha, & \dot{\alpha} < 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

e anche qui possono essere definite le condizioni di Kuhn-Tucker,

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \geq 0 \\ \Phi^\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\alpha \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\alpha} \leq 0 \\ \Phi^\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\alpha \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Per questo modello per FSMA tra i vantaggi abbiamo già parlato del fatto che sia termodinamicamente consistente. Invece tra gli svantaggi dobbiamo notare che non è stata data particolare enfasi nella distinzione tra il comportamento del singolo cristallo di materiale e di quello policristallino. Per approfondire le conoscenze riguardo l'evoluzione della struttura dei domini magnetici si sono anche fatti esperimenti con tecniche come l'Atomic Force Microscopy (AFM) o la Interference-Contrast-Colloid (ICC) ma ancora non sono chiari alcuni aspetti. In particolare, non si è capito fino a che punto influisca il riarrangiamento dei domini magnetici nel processo di riorientamento. Alcuni ricercatori ritengono che i domini magnetici non favorevoli vengano praticamente eliminati con l'applicazione di campi magnetici relativamente bassi[52, 53, 54]; mentre altri ritengono che questi domini assumano un'importanza fondamentale nel processo di riorientamento[35, 36, 40].

2. Modello [A] 1D a tempo continuo per FSMA

Verrà ora presentato un nuovo modello per FSMA che si basa sul modello Auricchio-Petrini 1D. Per questo nuovo modello per FSMA, denominato modello [A], le variabili di controllo scelte sono la deformazione totale ε e il campo magnetico esterno applicato effettivo H mentre la variabile interna sarà la deformazione di trasformazione ε^{tr} che, a meno di un parametro n si ipotizzerà coincidere con la magnetizzazione M . Per ε^{tr} il vincolo sarà sempre:

$$|\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \quad (6.27)$$

dove ε_L potrebbe coincidere, o risultare proporzionale, alla magnetizzazione di saturazione M_s . Il potenziale convesso sarà ,

$$\Psi(\varepsilon, H, \varepsilon^{tr}) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \Psi_{mag} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (6.28)$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{el} = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 \\ \Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| \\ \Psi_{tr} = \frac{1}{2} h (\varepsilon^{tr})^2 \\ \Psi_{mag} = \frac{m}{2} (H + n\varepsilon^{tr})^2 \\ \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.29)$$

dove E rappresenta il modulo di Young, H il campo magnetico effettivo, m e n due parametri di consistenza mentre tutti gli altri parametri sono gli stessi del modello Auricchio-Petrini 1D. In definitiva quindi il potenziale sarà :

$$\Psi(\varepsilon, H, \varepsilon^{tr}) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 + \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| + \frac{1}{2} h (\varepsilon^{tr})^2 + \frac{m}{2} (H + n\varepsilon^{tr})^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (6.30)$$

Si ipotizza inoltre che:

$$\left\{ \begin{array}{l} n\varepsilon^{tr} = M \\ m = \mu_0 \end{array} \right. \quad (6.31)$$

dove M è la magnetizzazione e μ_0 la permeabilità magnetica nel vuoto. Le relazioni costitutive derivate saranno le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial H} = m (H + n\varepsilon^{tr}) = \mu_0 (H + M) \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - nB - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \end{array} \right. \quad (6.32)$$

con

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.33)$$

La legge di evoluzione e la funzione limite saranno,

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \dot{\zeta} \frac{X}{|X|} \\ F(X) = |X| - R \end{cases} \quad (6.34)$$

Completiamo infine il modello con le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

Il modello sembra avere un significato fisico in quanto $B = \mu_0 (H + M)$ è una relazione base per i materiali ferromagnetici. Il modello inoltre è termodinamicamente consistente in quanto la funzione di snervamento F garantisce la convessità del potenziale Ψ che quindi sarà sempre positivo.

3. Modello [A] 1D a tempo discreto per FSMA

Utilizzando le stesse convenzioni del modello Auricchio-Petrini 1D assumiamo, per le stesse considerazioni, come modulo regolarizzato di ε^{tr} la seguente funzione:

$$\overline{|a|} = \sqrt{|a|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \quad (6.36)$$

e quindi per il nostro caso sarà :

$$\overline{|\varepsilon^{tr}|} = \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \quad (6.37)$$

Le relazioni costitutive a tempo discreto quindi saranno:

$$\begin{cases} \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = m (H + n\varepsilon^{tr}) \\ X = \sigma - nB - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{\sqrt{|\varepsilon^{tr}| + \delta}} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \end{cases} \quad (6.38)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.39)$$

mentre la legge evolutiva, la funzione limite e le condizioni di Kuhn -Tucker discrete saranno,

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \\ F(X) = |X| - R \\ \begin{cases} \Delta\zeta \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \Delta\zeta F(X) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.40)$$

4. Generalizzazione a tempo continuo e discreto del modello [A]

La riformulazione del modello [A] in 3D risulta immediata. Specifichiamo che saranno utilizzate tutte le convenzioni del modello Auricchio-Petrini 3D e del modello [A] 1D. Le variabili di controllo saranno il tensore della deformazione ε e il campo magnetico effettivo \mathbf{H} ; invece come variabile interna assumiamo il tensore della deformazione di trasformazione \mathbf{e}^{tr} . Una prima condizione vincolante su \mathbf{e}^{tr} è la seguente:

$$0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (6.41)$$

dove ε_L rappresenta la massima deformazione di trasformazione raggiunta durante un test uniassiale e può essere considerata un parametro caratteristico del materiale.

Possiamo ora esprimere la funzione di energia libera Ψ per materiale FSMA attraverso il seguente potenziale convesso:

$$\Psi(\varepsilon, \mathbf{H}, \mathbf{e}^{tr}) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \Psi_{mag} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) \quad (6.42)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{el} = \frac{1}{2}K\theta^2 + G \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) \\ \Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr}\| \\ \Psi_{tr} = \frac{1}{2}h \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 \\ \Psi_{mag} = \frac{1}{2}\mu_0 (\mathbf{H} + n\mathbf{e}^{tr}) \\ \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.43)$$

La funzione di energia libera totale così ottenuta è la seguente:

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, \mathbf{H}, \mathbf{e}^{tr}) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \beta \langle T - M_f \rangle \|\mathbf{e}^{tr}\| + \\ & \frac{1}{2}h \|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 (\mathbf{H} + n\mathbf{e}^{tr})^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Derivando la Ψ rispetto alle diverse variabili si possono ottenere le relazioni costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K[\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ \mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{B} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}} = \mu_0 (\mathbf{H} + n\mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - n\mathbf{B} - \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \|\mathbf{e}^{tr}\| + \frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})}{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|} \right] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \end{array} \right. \quad (6.45)$$

dove \mathbf{X} una forza termodinamica associata al tensore della deformazione di trasformazione e denominata sforzo di trasformazione. Inoltre risulta che,

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})}{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ +\mathcal{R} & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L \\ \emptyset & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.46)$$

L'equazione (5.11) può essere anche scritta come,

$$\mathbf{X} = \mathbf{s} - n\mathbf{B} - \boldsymbol{\alpha} \quad (6.47)$$

dove

$$\boldsymbol{\alpha} = [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|\mathbf{e}^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \quad (6.48)$$

con

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } 0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.49)$$

Per completare il modello formuliamo una legge di evoluzione per \mathbf{e}^{tr} :

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.50)$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases} \quad (6.51)$$

dove $\dot{\zeta}$ un parametro di consistenza plastica e F è la funzione di snervamento definita come:

$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \quad (6.52)$$

dove J_2 e J_3 rappresentano la seconda e la terza invariante del tensore \mathbf{X} e sono definiti come,

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^2 : \mathbf{1}) \\ J_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{X}^3 : \mathbf{1}) \end{cases} \quad (6.53)$$

mentre R è il raggio del dominio elastico e m un parametro del materiale.

Ora passiamo alla formulazione discreta del modello 3D. Le relazioni costitutive a tempo discreto ottenuto saranno le seguenti:

$$\begin{cases} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + n\mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{X} = \mathbf{s} - n\mathbf{B} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|\mathbf{e}^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \end{cases} \quad (6.54)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.55)$$

e come legge evolutiva e condizioni di Kuhn-Tucker discrete,

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0 \\ \Delta\zeta \geq 0 \\ \Delta\zeta F(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

dove $\Delta\zeta = (\zeta - \zeta_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\zeta} dt$ è il parametro di consistenza nell'integrazione del tempo.

Per il tempo discreto nasce un problema dal punto di vista computazionale, in quanto \mathbf{X} dipende dalla derivata di $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ che discretamente non è definita in alcuni punti. Allora sostituiamo la norma euclidea $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ con la norma regolarizzata $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}$ definita come,

$$\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} = \|\mathbf{e}^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|\mathbf{e}^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \quad (6.57)$$

dove δ è un parametro definito dall'utente.

5. Modello [B] 1D a tempo continuo per FSMA

Anche questo secondo modello per FSMA, che è stato denominato modello [B], si basa sul modello Auricchio-Petrini 1D. In questo caso, riprendendo le considerazioni fatte da Lagoudas riguardo al suo modello, si sono scelte due variabili interne distinte: la deformazione di trasformazione ε^{tr} e la magnetizzazione M . Si è ipotizzato infatti che, oltre al processo di riorientamento dei domini che porta poi al riarrangiamento delle varianti, vi è anche un processo di formazione delle varianti nella direzione cristallograficamente favorevole quando coincide una direzione di facile magnetizzazione e viene applicato un campo magnetico esterno proprio in questa direzione. Quindi in questo modello si è deciso di modificare il potenziale convesso del modello Auricchio-Petrini 1D al fine di simulare questo duplice fenomeno. Le variabili di controllo che sono state scelte sono la deformazione totale ε e il campo magnetico esterno applicato effettivo H . Per ε^{tr} il vincolo sarà sempre:

$$|\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \quad (6.58)$$

Il potenziale convesso sarà ,

$$\Psi(\varepsilon, H, \varepsilon^{tr}, M) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \Psi_{tr,mag} + \Psi_{mag} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (6.59)$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{el} = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 \\ \Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| \\ \Psi_{tr} = \frac{1}{2} h (\varepsilon^{tr})^2 \\ \Psi_{tr,mag} = \frac{1}{2} \alpha (M)^2 \\ \Psi_{mag} = \frac{m}{2} (H + nM^z)^2 \\ \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.60)$$

dove E rappresenta il modulo di Young, H il campo magnetico effettivo, m, n, z tre parametri di consistenza ancora da identificare mentre tutti gli altri parametri sono gli stessi del modello Auricchio-Petrini 1D. Come si nota dall'equazione (6.42) sono stati aggiunti due contributi alla nostra funzione di densità di energia Ψ : Ψ_{mag} dovuta al riorientamento dei domini magnetici e $\Psi_{tr,mag}$ dovuta alla variazione di magnetizzazione. In definitiva quindi il potenziale sarà :

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, H, \varepsilon^{tr}, M) = & \frac{1}{2}E (\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 + \beta \langle T - M_f \rangle |\varepsilon^{tr}| + \frac{1}{2}h (\varepsilon^{tr})^2 \\ & + \frac{1}{2}\alpha (M)^2 + \frac{m}{2} (H + nM^z)^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \end{aligned} \quad (6.61)$$

Si ipotizza inoltre che $m = \mu_0$ con μ_0 permeabilità magnetica nel vuoto. Le relazioni costitutive derivate saranno le seguenti:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial H} = m (H + nM^z) + \alpha M = \mu_0 (H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ X_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial M} = -nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) - \alpha M \end{cases} \quad (6.62)$$

con

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.63)$$

La leggi di evoluzione e la fusione di snervamento saranno,

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1} = \dot{\zeta} \frac{X_1}{|X_1|} \\ \dot{M} = \dot{\zeta} \kappa \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_2} = \dot{\zeta} \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \\ F(X_1, X_2) = |X_1| + \kappa |X_2| - R \end{cases} \quad (6.64)$$

dove κ è un modulo di riscaldamento per l'effetto della magnetizzazione e R è lo stesso del modello Auricchio-Petrini 1D. Completiamo infine il modello con

le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta}F = 0 \end{cases} \quad (6.65)$$

Il modello inoltre è termodinamicamente consistente in quanto la funzione di snervamento F garantisce la convessità del potenziale Ψ che quindi sarà sempre positivo.

6. Modello $[B]$ 1D a tempo discreto per FSMA

Utilizzando le stesse convenzioni del modello Auricchio-Petrini 1D dobbiamo regolarizzare il modulo di ε^{tr} e anche quello di X_2 perchè è stato visto che presenta punti di non derivabilità :

$$\overline{|a|} = \sqrt{|a|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \quad (6.66)$$

e quindi per il nostro caso sarà :

$$\begin{aligned} \overline{|\varepsilon^{tr}|} &= \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \\ \overline{|X_2|} &= \sqrt{|X_2|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \end{aligned} \quad (6.67)$$

Le relazioni costitutive a tempo discreto quindi saranno:

$$\begin{cases} \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = m (H + nM^z) + \alpha M = \mu_0 (H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{\sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta}} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ X_2 = -nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) - \alpha M \end{cases} \quad (6.68)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.69)$$

mentre le leggi evolutive e la funzione di snervamento discrete saranno:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X_1}{|X_1|} \\ M = M_n + \Delta\zeta \kappa \frac{X_2}{\sqrt{|X_2|^2 + \delta}} \\ F(X_1, X_2) = |X_1| + \kappa |X_2| - R \end{cases} \quad (6.70)$$

Completiamo con le condizioni di Kuhn-Tucker discrete:

$$\begin{cases} \Delta\zeta \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \Delta\zeta F = 0 \end{cases} \quad (6.71)$$

7. Generalizzazione a tempo continuo e discreto del modello [B]

Riformuliamo infine il modello [B] in 3D. Specifichiamo, come per il modello [A], che saranno utilizzate tutte le convenzioni del modello Auricchio-Petrini 3D e del modello [B] 1D. Le variabili di controllo saranno il tensore della deformazione ε e il campo magnetico effettivo \mathbf{H} ; invece come variabili interne assumiamo il tensore della deformazione di trasformazione \mathbf{e}^{tr} e il vettore magnetizzazione \mathbf{M} . Una prima condizione vincolante su \mathbf{e}^{tr} è la seguente:

$$0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L \quad (6.72)$$

Esprimiamo ora la funzione di energia libera Ψ per materiale FSMA attraverso il seguente potenziale convesso:

$$\Psi(\varepsilon, \mathbf{H}, \mathbf{e}^{tr}) = \Psi_{el} + \Psi_{ch} + \Psi_{tr} + \Psi_{tr,mag} + \Psi_{mag} + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) \quad (6.73)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{el} = \frac{1}{2}K\theta^2 + G \|e - e^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) \\ \Psi_{ch} = \beta \langle T - M_f \rangle \|e^{tr}\| \\ \Psi_{tr} = \frac{1}{2}h \|e^{tr}\|^2 \\ \Psi_{tr,mag} = \frac{1}{2}\alpha M^2 \\ \Psi_{mag} = \frac{1}{2}\mu_0 (\mathbf{H} + nM^z)^2 \\ \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(e^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|e^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{se } \|e^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.74)$$

La funzione di energia libera totale così ottenuta è la seguente:

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon, \mathbf{H}, e^{tr}) = & \frac{1}{2}K\theta^2 + G \|e - e^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \beta \langle T - M_f \rangle \|e^{tr}\| + \\ & \frac{1}{2}h \|e^{tr}\|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 (\mathbf{H} + nM^z)^2 + \frac{1}{2}\alpha M^2 + \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(e^{tr}) \end{aligned} \quad (6.75)$$

Derivando la Ψ rispetto alle diverse variabili si possono ottenere le relazioni costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ \mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - e^{tr}) \\ \mathbf{B} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}} = \mu_0 (\mathbf{H} + nM^z) + \alpha M \\ \mathbf{X}_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial e^{tr}} = \mathbf{s} - \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(e^{tr})}{\partial \|e^{tr}\|} \right] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ = \mathbf{s} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ \mathbf{X}_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial M} = -nzM^{z-1} (\mathbf{B} - \alpha M) - \alpha M \end{array} \right. \quad (6.76)$$

Inoltre risulta che,

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})}{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ +\mathcal{R} & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L \\ \emptyset & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| > \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.77)$$

e

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{se } 0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.78)$$

Per completare il modello formuliamo una legge di evoluzione per \mathbf{e}^{tr} e \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^{tr} &= \dot{\zeta} \frac{\partial F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_1} \\ \dot{\mathbf{M}} &= \dot{\zeta} \kappa \frac{\partial F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_2} \end{aligned} \quad (6.79)$$

e le condizioni di Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases} \quad (6.80)$$

dove $\dot{\zeta}$ un parametro di consistenza plastica e F è la funzione di snervamento definita come:

$$F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \|\mathbf{X}_1\| + \kappa \|\mathbf{X}_2\| - R \quad (6.81)$$

Ora passiamo alla formulazione discreta del modello 3D. Le relazioni costitutive a tempo discreto ottenuto saranno le seguenti:

$$\begin{cases} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + n\mathbf{M}^z) + \alpha\mathbf{M} \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{s} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|\mathbf{e}^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \\ \mathbf{X}_2 = -nz\mathbf{M}^{z-1}(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{M}) - \alpha\mathbf{M} \end{cases} \quad (6.82)$$

con

$$\begin{cases} \gamma \geq 0 \\ \|e^{tr}\| \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (6.83)$$

e come legge evolutiva e condizioni di Kuhn-Tucker discrete,

$$\begin{cases} e^{tr} = e_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{\partial F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_1} \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_n + \Delta\zeta \kappa \frac{\partial F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_2} \\ F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \|\mathbf{X}_1\| + \kappa \|\mathbf{X}_2\| - R \\ \Delta\zeta \geq 0 \\ \Delta\zeta F = 0 \end{cases} \quad (6.84)$$

dove $\Delta\zeta = (\zeta - \zeta_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\zeta} dt$ è il parametro di consistenza nell'integrazione del tempo.

Per il tempo discreto nasce un problema dal punto di vista computazionale, in quanto \mathbf{X}_1 dipende dalla derivata di $\|e^{tr}\|$ che discretamente non è definita in alcuni punti. Allora sostituiamo la norma euclidea $\|e^{tr}\|$ con la norma regolarizzata $\overline{\|e^{tr}\|}$ definita come,

$$\overline{\|e^{tr}\|} = \|e^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|e^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \quad (6.85)$$

dove δ è un parametro definito dall'utente. La stessa cosa vale anche per \mathbf{X}_2 che viene regolarizzato allo stesso modo.

8. Riepilogo

MODELLO LAGOUDAS PER FSMA 3D A TEMPO CONTINUO

Variabili di controllo: T, σ, H Variabili interne: $\varepsilon^r, \xi, \alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$

Relazioni costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{\partial G}{\partial T} = -\frac{\partial G_0}{\partial T} \\ \varepsilon^{te} = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} = \mathcal{S} \sigma \\ M = -\frac{\rho}{\mu_0} \frac{\partial G}{\partial H} = \xi [(1-\alpha) M^2 + \alpha M^4] + (1-\xi) [(1-\alpha) M^1 + \alpha M^3] \\ \quad = M^{sat} \xi [(1-\alpha) (\sin(\theta_2) e_x - \cos(\theta_2) e_y) + \alpha (-\sin(\theta_4) e_x + \cos(\theta_4) e_y)] \\ \quad + M^{sat} (1-\xi) [-(1-\alpha) (\cos(\theta_1) e_x + \sin(\theta_1) e_y) + \alpha (\cos(\theta_3) e_x + \sin(\theta_3) e_y)] \\ \tilde{\pi}^r := \sigma - \rho \frac{\partial G}{\partial \varepsilon^r} = \sigma^{eff} \\ \tilde{\pi}^\xi := -\rho \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{1}{2\rho} \sigma : \Delta \mathcal{S} \sigma - \rho \left[(1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} M^2 \cdot H + G^{an,2}(\theta_2) \right] \right. \\ \quad + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} M^4 \cdot H + G^{an,4}(\theta_4) \right] \left. \right] + \rho \left[(1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0}{\rho} M^1 \cdot H + G^{an,1}(\theta_1) \right] \right. \\ \quad + \alpha \left[-\frac{\mu_0}{\rho} M^3 \cdot H + G^{an,3}(\theta_3) \right] \left. \right] - \frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} \\ \pi^\alpha := -\rho \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \rho \xi \left[G^{an,2}(\theta_2) - G^{an,4}(\theta_4) + \frac{\mu_0}{\rho} (M^4 - M^2) \cdot H \right] \\ \quad + \rho (1-\xi) \left[G^{an,1}(\theta_1) - G^{an,3}(\theta_3) + \frac{\mu_0}{\rho} (M^3 - M^1) \cdot H \right] - \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} \\ \pi^{\theta_1} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_1} = -\rho (1-\xi) (1-\alpha) \left[\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\sin(\theta_1) H_x + \cos(\theta_1) H_y] + \frac{\partial G^{an,1}}{\partial \theta_1} \right] \\ \pi^{\theta_2} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_2} = -\rho \xi (1-\alpha) \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [\cos(\theta_2) H_x + \sin(\theta_2) H_y] + \frac{\partial G^{an,2}}{\partial \theta_2} \right] \\ \pi^{\theta_3} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_3} = -\rho (1-\xi) \alpha \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\sin(\theta_3) H_x + \cos(\theta_3) H_y] + \frac{\partial G^{an,3}}{\partial \theta_3} \right] \\ \pi^{\theta_4} := -\rho \frac{\partial G}{\partial \theta_4} = -\rho \xi \alpha \left[-\frac{\mu_0 M^{sat}}{\rho} [-\cos(\theta_4) H_x - \sin(\theta_4) H_y] + \frac{\partial G^{an,4}}{\partial \theta_4} \right] \end{array} \right.$$

Legge di evoluzione e funzioni di riorientamento:

$$\dot{\varepsilon}^r = \Lambda^r \dot{\xi} \quad \Phi^\xi = \begin{cases} \pi^\xi - Y^\xi, & \dot{\xi} > 0 \\ -\pi^\xi - Y^\xi, & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad \Phi^\alpha = \begin{cases} \pi^\alpha - Y^\alpha, & \dot{\alpha} > 0 \\ -\pi^\alpha - Y^\alpha, & \dot{\alpha} < 0 \end{cases}$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} \geq 0 \\ \Phi^\xi(\sigma, H, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\xi \dot{\xi} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} \leq 0 \\ \Phi^\xi(\sigma, H, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\xi \dot{\xi} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \geq 0 \\ \Phi^\alpha(\sigma, H, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\alpha \dot{\alpha} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \leq 0 \\ \Phi^\alpha(\sigma, H, \xi, \alpha) \leq 0 \\ \Phi^\alpha \dot{\alpha} = 0 \end{array} \right\}$$

MODELLO [A] 3D A TEMPO CONTINUO**Variabili di controllo:** ε, \mathbf{H} **Variabile interna:** e^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - e^{tr}) \\ \mathbf{B} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{H}} = \mu_0 (\mathbf{H} + ne^{tr}) \\ \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial e^{tr}} = s - n\mathbf{B} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \sigma} \quad \text{con} \quad F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases}$$

MODELLO [A] 3D A TEMPO DISCRETO**Variabile di controllo:** ε, \mathbf{H} **Variabile interna:** e^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = 2G(\mathbf{e} - e^{tr}) \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + ne^{tr}) \\ \mathbf{X} = s - n\mathbf{B} - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ \gamma \geq 0 \\ \|e^{tr}\| = \|e^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|e^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$e^{tr} = e_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \sigma} \quad \text{con} \quad F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F(\mathbf{X}) = 0 \end{cases}$$

MODELLO [A] 1D A TEMPO CONTINUO**Variabile di controllo:** ε, H **Variabile interna:** ε^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial H} = m (H + n\varepsilon^{tr}) = \mu_0 (H + M) \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - nB - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \dot{\zeta} \frac{X}{|X|} \quad \text{con} \quad F(X) = |X| - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases}$$

MODELLO [A] 1D A TEMPO DISCRETO**Variabile di controllo:** ε, H **Variabile interna:** ε^{tr} **Relazioni costitutive:**

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial H} = m (H + n\varepsilon^{tr}) = \mu_0 (H + M) \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - nB - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| = \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{X}{|X|} \quad \text{con} \quad F(X) = |X| - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F(X) = 0 \end{cases}$$

MODELLO [B] 3D A TEMPO CONTINUO**Variabili di controllo:** ε, H **Variabile interna:** e^{tr}, M **Relazioni costitutive:**

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = \frac{\partial \Psi}{\partial e} = 2G(e - e^{tr}) \\ B = -\frac{\partial \Psi}{\partial H} = \mu_0(H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial e^{tr}} = s - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \|e^{tr}\| + \gamma] \frac{\partial \|e^{tr}\|}{\partial e^{tr}} \\ X_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial M} = -nzM^{z-1}(B - \alpha M) - \alpha M \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \|e^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } \|e^{tr}\| = \varepsilon_L \end{cases} \end{array} \right.$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{e}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \quad \dot{M} = \dot{\zeta} \kappa \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_2} \quad \text{con} \quad F(X_1, X_2) = \|X_1\| + \kappa \|X_2\| - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{array} \right.$$

MODELLO [B] 3D A TEMPO DISCRETO**Variabile di controllo:** ε, H **Variabile interna:** e^{tr}, M **Relazioni costitutive:**

$$\left\{ \begin{array}{l} p = K [\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = 2G(e - e^{tr}) \\ B = \mu_0(H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = -s - [\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|e^{tr}\|} + \gamma] \frac{\partial \overline{\|e^{tr}\|}}{\partial e^{tr}} \\ X_2 = -nzM^{z-1}(B - \alpha M) - \alpha M \\ \gamma \geq 0 \\ \overline{\|e^{tr}\|} = \|e^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|e^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \leq \varepsilon_L \\ \overline{\|X_2\|} = \|X_2\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta-1} (\|X_2\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta} \end{array} \right.$$

Legge di evoluzione:

$$e^{tr} = e_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{\partial F}{\partial X_1}, \quad M = M_n + \Delta \zeta \kappa \frac{\partial F}{\partial X_2} \quad \text{con} \quad F(X_1, X_2) = \|X_1\| + \kappa \overline{\|X_2\|} - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F = 0 \end{array} \right.$$

MODELLO [B] 1D A TEMPO CONTINUOVariabile di controllo: ε, H Variabile interna: ε^{tr}, M

Relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial H} = m (H + nM^z) + \alpha M = \mu_0 (H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ X_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial M} = -nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) - \alpha M \\ \gamma = \begin{cases} 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L \\ \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L \end{cases} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\zeta} \frac{\partial F}{\partial X_1} = \dot{\zeta} \frac{X_1}{|X_1|}, \quad \dot{M} = \dot{\zeta} \kappa \frac{\partial F}{\partial X_2} = \dot{\zeta} \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \quad \text{con} \quad F(X_1, X_2) = |X_1| + \kappa |X_2| - R$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \dot{\zeta} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\zeta} F = 0 \end{cases}$$

MODELLO [B] 1D A TEMPO DISCRETOVariabile di controllo: ε, H Variabile interna: ε^{tr}, M

Relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \\ B = m (H + nM^z) + \alpha M = \mu_0 (H + nM^z) + \alpha M \\ X_1 = \sigma - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} \\ X_2 = -nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) - \alpha M \\ \gamma \geq 0 \\ |\varepsilon^{tr}| = \sqrt{|\varepsilon^{tr}|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \leq \varepsilon_L \\ |X_2| = \sqrt{|X_2|^2 + \delta} - \sqrt{\delta} \end{cases}$$

Legge di evoluzione:

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta \zeta \frac{X_1}{|X_1|}, \quad M = M_n + \Delta \zeta \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \quad \text{con} \quad F(X_1, X_2) = |X_1| + \kappa |X_2| - R \leq 0$$

Condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \Delta \zeta \geq 0 \\ \Delta \zeta F = 0 \end{cases}$$

Implementazione dei modelli e risultati numerici

1. Return-map per il modello AURICCHIO-PETRINI 3D

Per implementare un algoritmo risolutivo utilizziamo il modello 3D a tempo discreto e una procedura di predizione elastica e correzione inelastica presa in prestito direttamente dalla teoria classica della plasticità. Questo tipo di tecnica è denominata return-map[61]. L'algoritmo consiste nel valutare uno stato elastico di prova (TRIAL) nel quale la variabile interna rimane costante. Si percorrono i seguenti passi:

- (1) Si calcolano le varie variabili nello stato di prova utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{tr,TR} = \mathbf{e}_n^{tr} \\ \mathbf{s}^{TR} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr,TR}) \end{cases} \quad (7.1)$$

- (2) Si valuta lo stato in cui si trova il materiale. Si risolvono dapprima le equazioni di prova:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^{TR} = \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR}\|} + \gamma \right] \frac{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr,TR}\|}}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \\ \mathbf{X}^{TR} = \mathbf{s}^{TR} - \boldsymbol{\alpha}^{TR} \\ F^{TR} = \sqrt{2J_2 \mathbf{X}^{TR}} + m \frac{J_3(\mathbf{X}^{TR})}{J_2(\mathbf{X}^{TR})} - R \end{cases} \quad (7.2)$$

Ora si passa a valutare la F^{TR} . Se lo stato di prova è ammissibile (cioè se $F^{TR} < 0$) allora il passo considerato è elastico. Se invece lo stato non è ammissibile ($F^{TR} \geq 0$) il passo è inelastico e la deformazione di

trasformazione deve essere aggiornata attraverso l'integrazione della legge di evoluzione.

- (3) In quest'ultimo passo si aggiorna lo stato del materiale. Per quanto riguarda il passo elastico basta utilizzare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{tr} = \mathbf{e}^{tr,TR} \\ \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}) \end{cases} \quad (7.3)$$

Invece per il passo inelastico si divide il problema in due fasi. Nella prima si riscrivono innanzitutto le relazioni costitutive e la funzione limite in forma residuale assumendo $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^X = \mathbf{X} - \mathbf{s}^{TR} + 2G\Delta\zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \quad + \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} \right] \frac{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{0} \\ R^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Successivamente si risolvono le sette equazioni non lineari scalari con il metodo di Newton-Raphson e si calcola \mathbf{e}^{tr} . Se $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} = \varepsilon_L$ la procedura è terminata altrimenti si passa alla seconda fase del passo inelastico. Se ci si trova nella seconda fase vuol dire che la trasformazione di fase è saturata; allora si riscrivono le relazioni costitutive e la legge di evoluzione in forma residuale ma assumendo questa volta $\gamma > 0$ e aggiungendo un'ulteriore condizione per la $\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}$:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^X = \mathbf{X} - \mathbf{s}^{TR} + 2G\Delta\zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \quad + \left[\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} + \gamma \right] \frac{\partial \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|}}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{0} \\ R^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R = 0 \\ R^\gamma = \overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} - \varepsilon_L \end{cases} \quad (7.5)$$

Si risolvono ora le otto equazioni non lineari scalari con il metodo di Newton-Raphson e si calcola infine e^{tr} . Questo vuol dire che il metodo di Newton-Raphson richiede la linearizzazione dell'equazione (7.5) e quindi della matrice:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,X}^X & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^X & \mathbf{R}_{,\gamma}^X \\ \mathbf{R}_{,X}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\gamma}^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}_{,X}^{\gamma} & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^{\gamma} & \mathbf{R}_{,\gamma}^{\gamma} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

dove la virgola indica la derivazione rispetto alla quantità successiva.

Il modello a tempo discreto per essere completo deve rappresentare anche il tensore tangente di consistenza che permette la convergenza quadratica del metodo di Newton-Raphson ed è così definito:

$$\mathbb{D} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7.7)$$

Verrà ora presentato il calcolo del tensore di consistenza tangente per il caso della trasformazione di fase saturata e basterà eliminare i termini dipendenti da γ per calcolarlo negli altri casi.

Richiamando le equazioni (5.3) e (5.11) la linearizzazione delle relazioni costitutive per la parte elastica volumetrica e deviatorica è la seguente:

$$\begin{cases} dp\mathbf{1} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ ds = 2G \left(\mathbb{I} - \frac{de^{tr}}{de} \right) \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (7.8)$$

dove

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ d\mathbf{e} = \mathbb{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (7.9)$$

La linearizzazione invece dell'equazione (7.5) darà ,

$$\begin{cases} d(\mathbf{R}^X) = \mathbf{R}_{,X}^X : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^X d\Delta\zeta + \mathbf{R}_{,\gamma}^X d\gamma + \mathbf{R}_{,e}^X : de = \mathbf{0} \\ d(R^{\Delta\zeta}) = \mathbf{R}_{,X}^{\Delta\zeta} : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} d\Delta\zeta + \mathbf{R}_{,\gamma}^{\Delta\zeta} d\gamma + \mathbf{R}_{,e}^{\Delta\zeta} : de = 0 \\ d(R^\gamma) = \mathbf{R}_{,X}^\gamma : d\mathbf{X} + \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^\gamma d\Delta\zeta + \mathbf{R}_{,\gamma}^\gamma d\gamma + \mathbf{R}_{,e}^\gamma : de = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

dove

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{,e}^X = -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{R}_{,e}^{\Delta\zeta} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{,e}^\gamma = \mathbf{0} \end{cases} \quad (7.11)$$

Possiamo quindi scrivere,

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{X} \\ d\Delta\zeta \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,X}^X & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^X & \mathbf{R}_{,\gamma}^X \\ \mathbf{R}_{,X}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\gamma}^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}_{,X}^\gamma & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_{,\gamma}^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : de \quad (7.12)$$

Infine la linearizzazione dell'equazione darà :

$$d(e^{tr}) = \mathbf{e}_{,X}^{tr} : d\mathbf{X} + \mathbf{e}_{,\Delta\zeta}^{tr} d\Delta\zeta + \mathbf{e}_{,\gamma}^{tr} d\gamma = \mathbb{E} : de \quad (7.13)$$

con

$$\mathbb{E} = [\mathbf{e}_{,X}^{tr} \quad \mathbf{e}_{,\Delta\zeta}^{tr} \quad \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{,X}^X & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^X & \mathbf{R}_{,\gamma}^X \\ \mathbf{R}_{,X}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^{\Delta\zeta} & \mathbf{R}_{,\gamma}^{\Delta\zeta} \\ \mathbf{R}_{,X}^\gamma & \mathbf{R}_{,\Delta\zeta}^\gamma & \mathbf{R}_{,\gamma}^\gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2G\mathbb{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

In conclusione il tensore tangente di consistenza assumerà la seguente forma:

$$\mathbb{D} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G(\mathbb{I} - \mathbb{E})\mathbb{I}_{dev} \quad (7.15)$$

2. Return-map per il modello AURICCHIO-PETRINI 1D

La riformulazione della tecnica del return map per il modello a tempo discreto 1D è quasi immediata.

I passi da percorrere sono gli stessi:

- (1) Si calcolano le varie variabili nello stato di prova utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases} \quad (7.16)$$

- (2) Si valuta lo stato in cui si trova il materiale. Si risolvono dapprima le equazioni di prova:

$$\begin{cases} \alpha^{TR} = \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ F^{TR} = |X^{TR}| - R \end{cases} \quad (7.17)$$

Ora si passa a valutare la F^{TR} . Se lo stato di prova è ammissibile (cioè se $F^{TR} < 0$) allora il passo considerato è elastico. Se invece lo stato non è ammissibile ($F^{TR} \geq 0$) il passo è inelastico e la deformazione di trasformazione deve essere aggiornata attraverso l'integrazione della legge di evoluzione.

- (3) In quest'ultimo passo si aggiorna lo stato del materiale. Per quanto il passo elastico basta utilizzare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \quad (7.18)$$

Invece per il passo inelastico si divide il problema in due fasi. Nella prima si riscrivono innanzitutto le relazioni costitutive e la funzione limite assumendo $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ |X| - R = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

Poi vengono risolte e si calcola $\Delta\zeta$, X e σ . A questo punto tramite la seguente legge di evoluzione si calcola ε^{tr} :

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \quad (7.20)$$

Ora se $|\overline{\varepsilon^{tr}}| < \varepsilon_L$ la procedura è terminata altrimenti si passa alla seconda fase del passo inelastico. Se ci si trova nella seconda fase vuol dire che la trasformazione di fase è saturata; allora si riscrivono le relazioni costitutive e la legge di evoluzione assumendo questa volta $\gamma > 0$ e aggiungendo un'ulteriore condizione per la $|\overline{\varepsilon^{tr}}|$:

$$\begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ |X| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

Dopo aver calcolato $\Delta\zeta$, σ , X e γ attraverso la (7.20) si calcola la ε^{tr} e la procedura viene terminata.

3. Return-map per il modello [A] 1D

La formulazione della tecnica del return map per il modello [A] a tempo discreto 1D è molto simile a quella del modello AURICCHIO-PETRINI 1D.

I passi da percorrere sono i seguenti:

- (1) Si calcolano le varie variabili nello stato di prova utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ B^{TR} = m(H + n\varepsilon^{tr,TR}) \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases} \quad (7.22)$$

- (2) Si valuta lo stato in cui si trova il materiale. Si risolvono dapprima le equazioni di prova:

$$\begin{cases} \alpha^{TR} = nB^{TR} + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ F^{TR} = |X^{TR}| - R \end{cases} \quad (7.23)$$

Ora si passa a valutare la F^{TR} . Se lo stato di prova è ammissibile (cioè se $F^{TR} < 0$) allora il passo considerato è elastico. Se invece lo stato non è ammissibile ($F^{TR} \geq 0$) il passo è inelastico e la deformazione di trasformazione deve essere aggiornata attraverso l'integrazione della legge di evoluzione.

- (3) In quest'ultimo passo si aggiorna lo stato del materiale. Per quanto il passo elastico basta utilizzare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ B = m(H + n\varepsilon^{tr}) \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \quad (7.24)$$

Invece per il passo inelastico si divide il problema in due fasi. Nella prima si riscrivono innanzitutto le relazioni costitutive e la funzione limite assumendo $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + nB + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ B - m(H + n\varepsilon^{tr}) = 0 \\ |X| - R = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

Poi vengono risolte e si calcola $\Delta\zeta$, X , B e σ . A questo punto tramite la seguente legge di evoluzione si calcola ε^{tr} :

$$\varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \quad (7.26)$$

Ora se $|\overline{\varepsilon^{tr}}| < \varepsilon_L$ la procedura è terminata altrimenti si passa alla seconda fase del passo inelastico. Se ci si trova nella seconda fase vuol dire che la trasformazione di fase è saturata; allora si riscrivono le relazioni costitutive e la legge di evoluzione assumendo questa volta $\gamma > 0$ e aggiungendo un'ulteriore condizione per la $|\overline{\varepsilon^{tr}}|$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + nB + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ B - m(H + n\varepsilon^{tr}) = 0 \\ |X| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \end{array} \right. \quad (7.27)$$

Dopo aver calcolato $\Delta\zeta$, σ , X , B e γ attraverso la (7.26) si calcola la ε^{tr} e la procedura viene terminata.

4. Return-map per il modello $[B]$ 1D

La formulazione della tecnica del return map per il modello $[B]$ a tempo discreto 1D è un po' diversa rispetto a quella dei precedenti modelli perché utilizza due variabili interne.

I passi da percorrere sono i seguenti:

- (1) Si calcolano le varie variabili nello stato di prova utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ M^{TR} = M_n \\ B^{TR} = m(H + n(M^{TR})^z) \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases} \quad (7.28)$$

- (2) Si valuta lo stato in cui si trova il materiale. Si risolvono dapprima le equazioni di prova:

$$\begin{cases} \alpha^{TR} = \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X_1^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ X_2^{TR} = -nz(M^{TR})^{(z-1)}(B^{TR} - \alpha M^{TR}) - \alpha M^{TR} \\ F^{TR} = |X_1^{TR}| + \kappa |X_2^{TR}| - R \end{cases} \quad (7.29)$$

Ora si passa a valutare la F^{TR} . Se lo stato di prova è ammissibile (cioè se $F^{TR} < 0$) allora il passo considerato è elastico. Se invece lo stato non è ammissibile ($F^{TR} \geq 0$) il passo è inelastico e la deformazione di trasformazione deve essere aggiornata attraverso l'integrazione della legge di evoluzione.

- (3) In quest'ultimo passo si aggiorna lo stato del materiale. Per quanto il passo elastico basta utilizzare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ M = M_n \\ B = m(H + nM^z) \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \quad (7.30)$$

Invece per il passo inelastico si divide il problema in due fasi. Nella prima si riscrivono innanzitutto le relazioni costitutive e la funzione

limite assumendo $\gamma = 0$:

$$\begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ B - m(H + nM^z) = 0 \\ X_1 - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ X_2 + nzM^{(z-1)}(B - \alpha M) + \alpha M = 0 \\ |X_1| + \kappa|X_2| - R = 0 \end{cases} \quad (7.31)$$

Poi vengono risolte e si calcola $\Delta\zeta$, X_1 , X_2 , B e σ . A questo punto tramite la seguente legge di evoluzione si calcola ε^{tr} :

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X_1}{|X_1|} \\ M = M_n + \Delta\zeta \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \end{cases} \quad (7.32)$$

Ora se $|\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L$ la procedura è terminata altrimenti si passa alla seconda fase del passo inelastico. Se ci si trova nella seconda fase vuol dire che la trasformazione di fase è saturata; allora si riscrivono le relazioni costitutive e la legge di evoluzione assumendo questa volta $\gamma > 0$ e aggiungendo un'ulteriore condizione per la $|\varepsilon^{tr}|$:

$$\begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X_1 - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ X_2 + nzM^{(z-1)}(B - \alpha M) + \alpha M = 0 \\ |X_1| + \kappa|X_2| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \end{cases} \quad (7.33)$$

Dopo aver calcolato $\Delta\zeta$, σ , X_1 , X_2 , B e γ attraverso la (7.32) si calcola la ε^{tr} e la procedura viene terminata.

5. Risultati numerici

I nuovi modelli proposti per FSMA e, più precisamente, il modello [A] e il modello [B], sono stati implementati in *MATLAB*[®]. In particolare è stata utilizzata la *fsolve* per l'algoritmo del return map. Come valori numerici, non avendo a disposizione risultati di prove sperimentali, si sono utilizzati alcuni dati presenti in letteratura e in particolare negli articoli di Ullakko et al.[15], Lagoudas et al.[58] e Czimmek et al.[30].

In particolare qui vengono riportati i risultati delle seguenti simulazioni numeriche:

- Simulazione dell'effetto pseudo-elastico mantenendo costante il campo magnetico applicato e facendo variare il carico per il modello [A] e [B].
- Simulazione dell'effetto a memoria di forma mantenendo costante il campo magnetico applicato e facendo variare il carico per il modello [A] e [B].
- Simulazione dell'effetto pseudo-elastico mantenendo costante il carico applicato e facendo variare il campo magnetico per il modello [A].
- Simulazione dell'effetto a memoria di forma mantenendo costante il carico applicato e facendo variare il campo magnetico per il modello [A] e [B].

I risultati mettono in evidenza vantaggi e svantaggi dei due modelli. In particolare il modello [A] riproduce meglio l'effetto superelastico ferromagnetico mentre il modello [B] l'effetto a memoria di forma ferromagnetico. Questo ci porta a concludere che per i materiali a memoria di forma ferromagnetici si hanno due variabili interne che evolvono insieme quali la magnetizzazione e la deformazione di trasformazione.

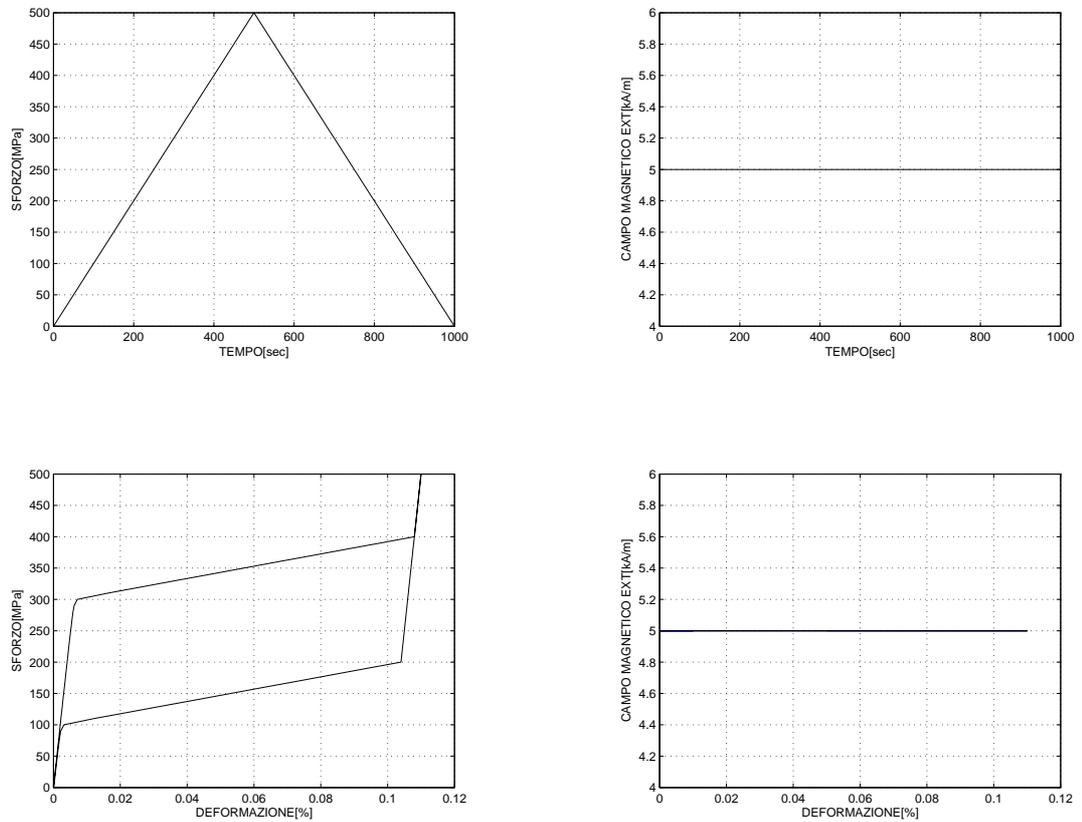


FIGURA 7.1. Effetto pseudo-elastico convenzionale applicando uno sforzo variabile e un campo magnetico costante per il modello [A]

Parametro	Valore	Unità
R	100	MPa
E	$5 \cdot 10^4$	MPa
$\beta(T - M_f)$	150	MPa
h	1000	MPa
ε_L	10^{-1}	%

Parametro	Valore	Unità
δ	10^{-8}	—
m	20	—
n	-20	—
σ^{max}	500	MPa
B^{max}	5	kAm^{-1}

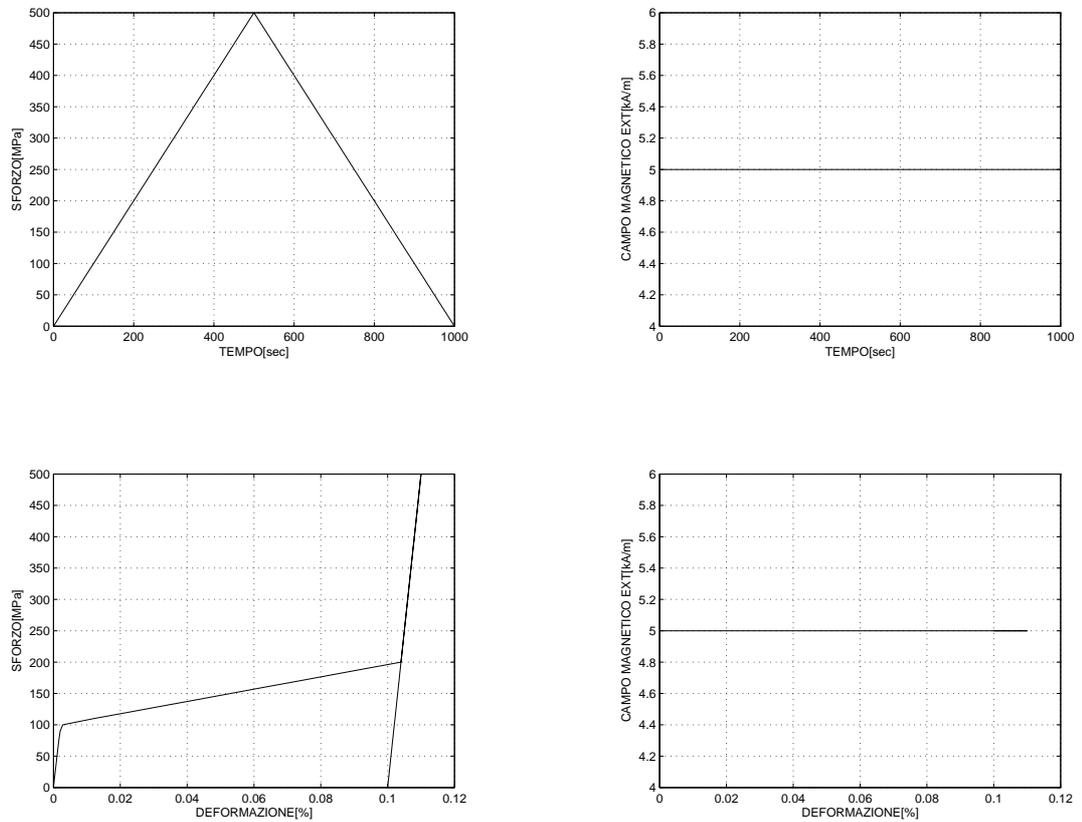


FIGURA 7.2. Effetto a memoria di forma convenzionale applicando uno sforzo variabile e un campo magnetico costante per il modello [A]

Parametro	Valore	Unità
R	100	MPa
E	$5 \cdot 10^4$	MPa
$\beta(T - M_f)$	100	MPa
h	1000	MPa
ε_L	10^{-1}	%

Parametro	Valore	Unità
δ	10^{-8}	—
m	20	—
n	-20	—
σ^{max}	500	MPa
B^{max}	5	kAm^{-1}

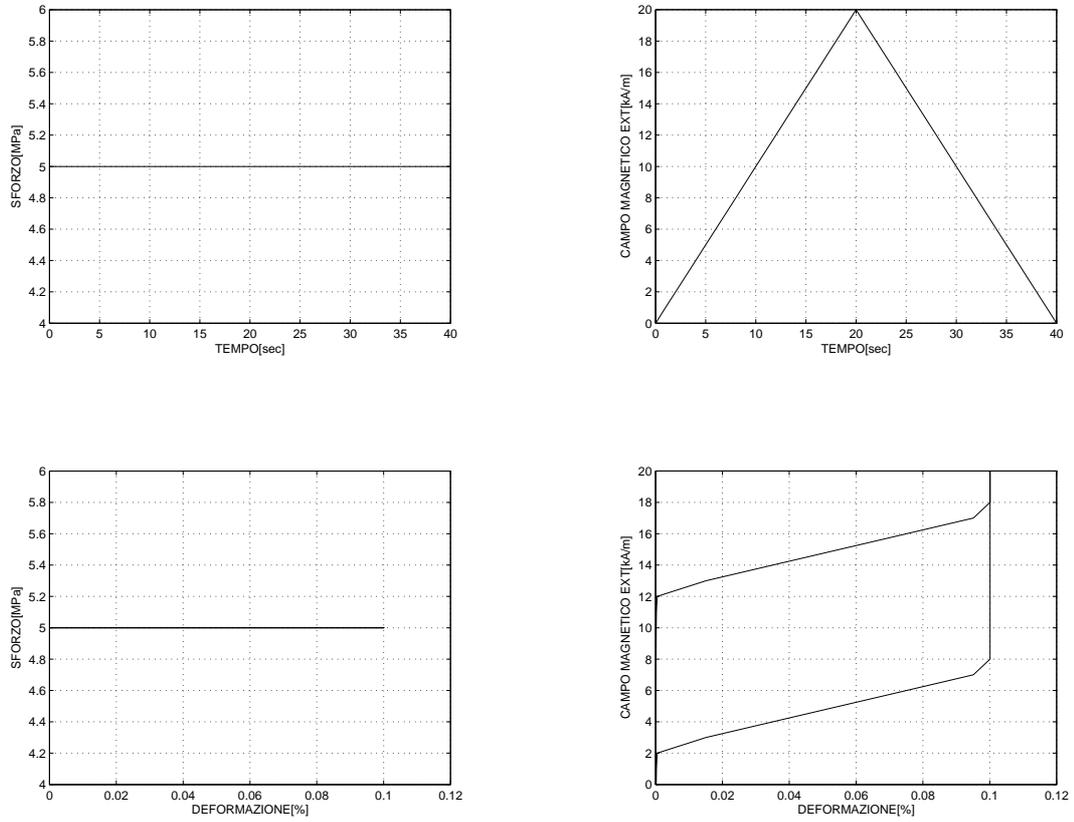


FIGURA 7.3. Effetto pseudo-elastico ferromagnetico applicando un campo magnetico variabile e uno sforzo costante per il modello [A]

Parametro	Valore	Unità
R	100	MPa
E	$5 \cdot 10^4$	MPa
$\beta(T - M_f)$	150	MPa
h	1000	MPa
ε_L	10^{-1}	%

Parametro	Valore	Unità
δ	10^{-8}	—
m	20	—
n	-20	—
σ^{max}	5	MPa
B^{max}	20	kAm^{-1}

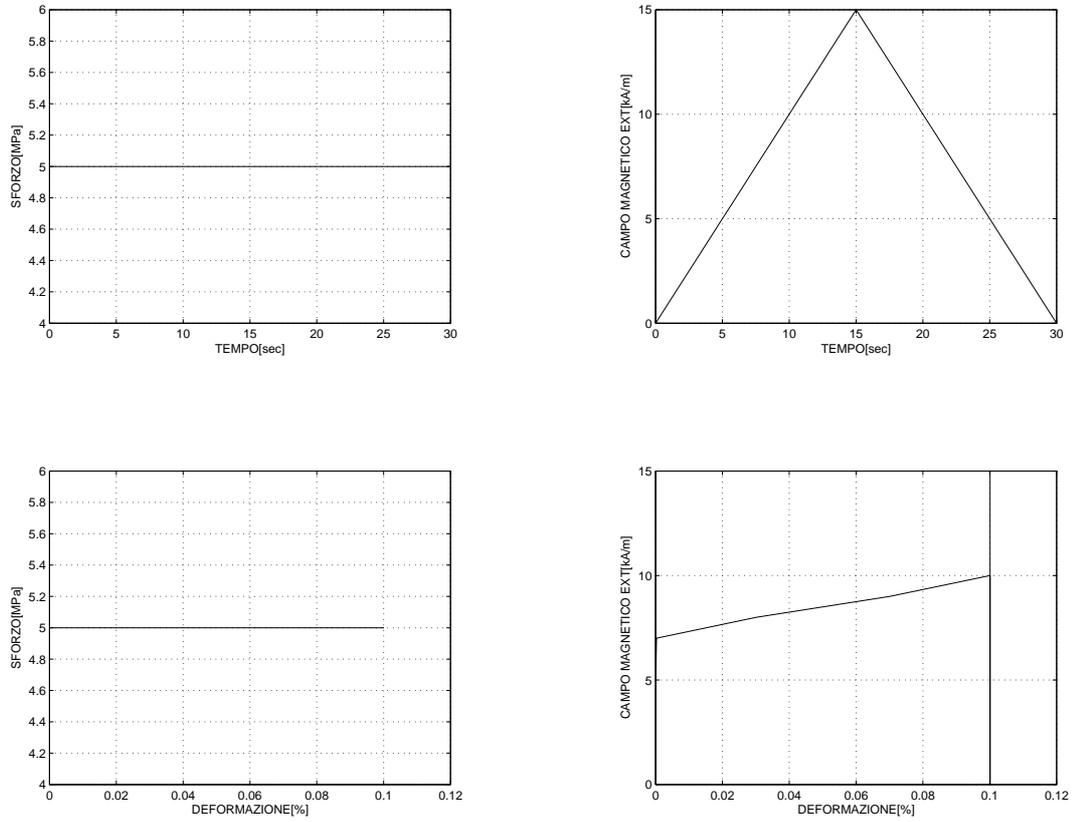


FIGURA 7.4. Effetto a memoria di forma ferromagnetico applicando un campo magnetico variabile e uno sforzo costante per il modello [A]

Parametro	Valore	Unità
R	100	MPa
E	$5 \cdot 10^4$	MPa
$\beta(T - M_f)$	50	MPa
h	500	MPa
ε_L	10^{-1}	%

Parametro	Valore	Unità
δ	10^{-8}	—
m	20	—
n	-20	—
σ^{max}	5	MPa
B^{max}	15	kAm^{-1}

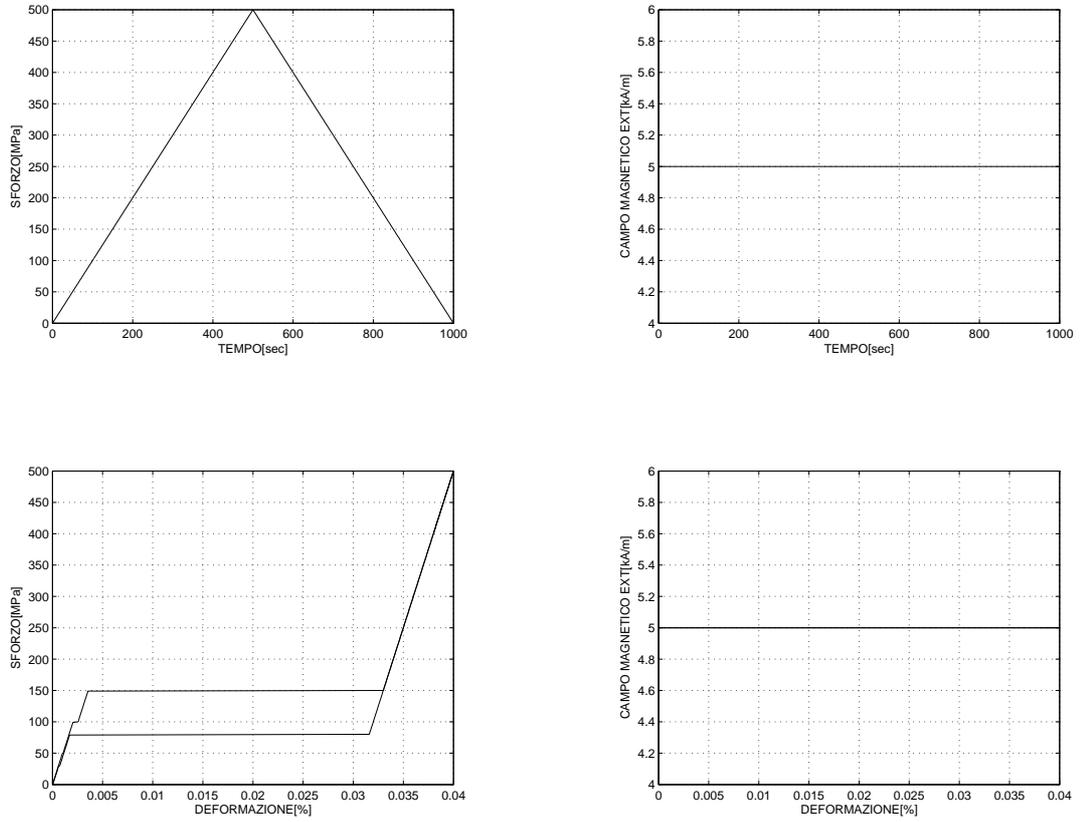


FIGURA 7.5. Effetto pseudo-elastico convenzionale applicando uno sforzo variabile e un campo magnetico costante per il modello [B]

Parametro	Valore	Unità	δ	10^{-8}	—
R	100	MPa	α	1000	—
E	$5 \cdot 10^4$	MPa	m	20	—
$\beta(T - M_f)$	100	MPa	n	-10	—
h	1000	MPa	z	1	—
ε_L	$3 \cdot 10^{-2}$	%	κ	1	—

σ^{max}	500	MPa
B^{max}	5	kAm ⁻¹

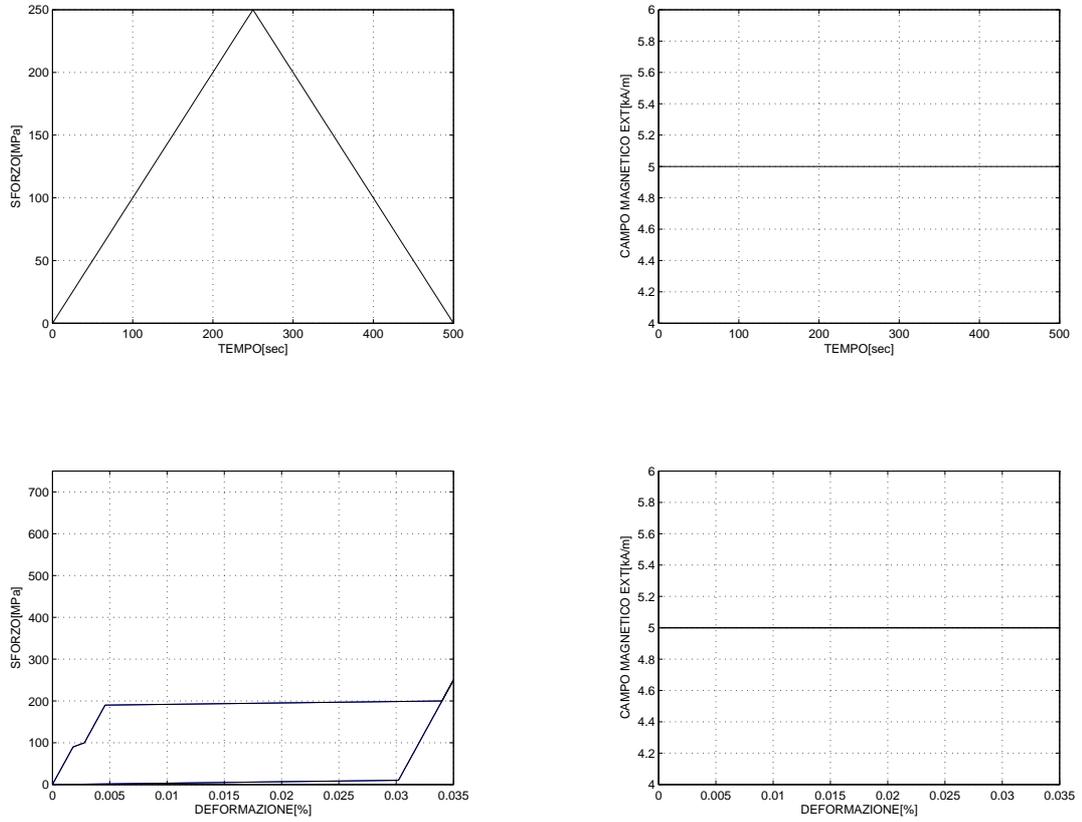


FIGURA 7.6. Effetto a memoria di forma convenzionale applicando uno sforzo variabile e un campo magnetico costante per il modello [B]

Parametro	Valore	Unità	δ	10^{-9}	—
R	100	MPa	α	10	—
E	$5 \cdot 10^4$	MPa	m	20	—
$\beta(T - M_f)$	100	MPa	n	-10	—
h	100	MPa	z	1	—
ε_L	$3 \cdot 10^{-2}$	%	κ	10^{-9}	—

σ^{max}	250	MPa
B^{max}	5	kAm ⁻¹

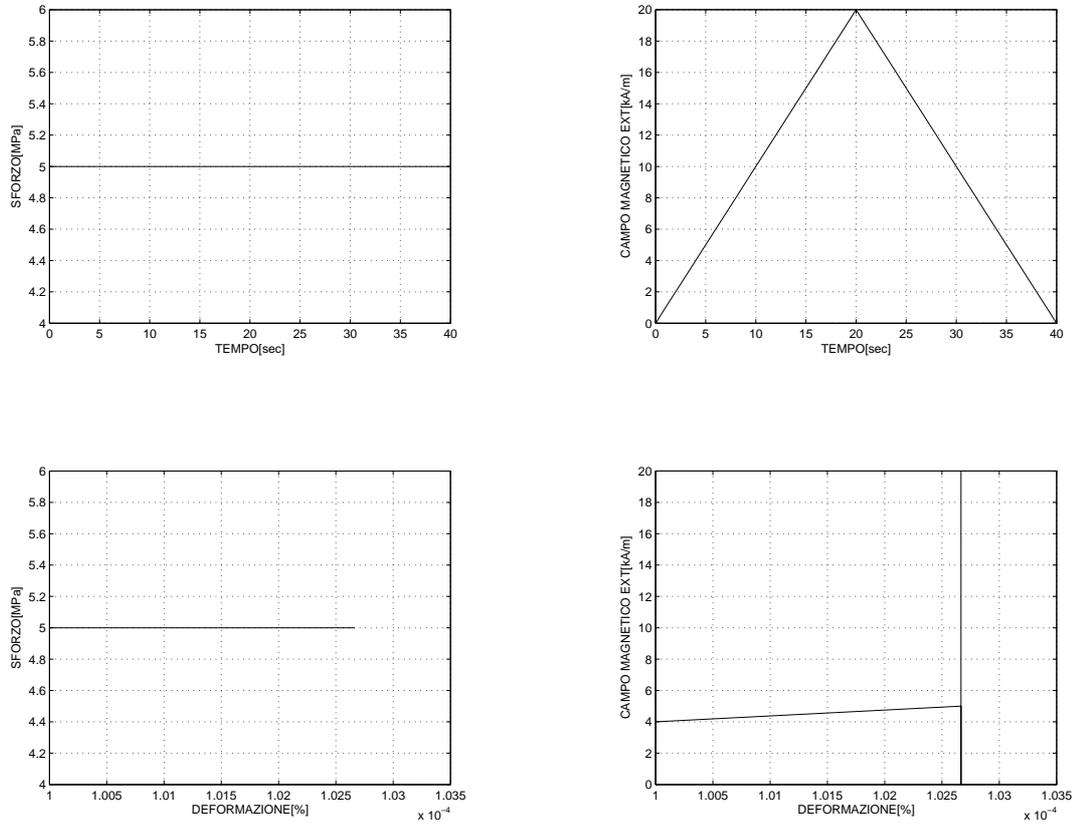


FIGURA 7.7. Effetto a memoria di forma ferromagnetico applicando un campo magnetico variabile e uno sforzo costante per il modello [B]

Parametro	Valore	Unità	δ	10^{-8}	—
R	100	MPa	α	1000	—
E	$5 \cdot 10^4$	MPa	m	20	—
$\beta(T - M_f)$	150	MPa	n	-20	—
h	1000	MPa	z	1	—
ε_L	$3 \cdot 10^{-1}$	%	κ	1	—

σ^{max}	5	MPa
B^{max}	20	kAm ⁻¹

6. Riepilogo

RETURN MAP PER IL MODELLO AURICCHIO-PETRINI 3D

1. Inizializzazione dello stato di prova:

$$\begin{cases} e^{tr,TR} = e_n^{tr} \\ s^{TR} = 2G(e - e^{tr,TR}) \end{cases}$$

2. Controllo dello stato del materiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcolo di:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{TR} = [\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|e^{tr,TR}\|} + \gamma] \frac{\partial \overline{\|e^{tr,TR}\|}}{\partial e^{tr}} \\ \mathbf{X}^{TR} = \mathbf{s}^{TR} - \alpha^{TR} \\ F^{TR} = \sqrt{2J_2} \mathbf{X}^{TR} + m \frac{J_3(\mathbf{X}^{TR})}{J_2(\mathbf{X}^{TR})} - R \end{array} \right. \\ \\ \text{Controllo:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{se } F^{TR} < 0 \rightarrow \text{passo elastico (EL)} \\ \text{se } F^{TR} = 0 \rightarrow \text{passo inelastico (INEL)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. Aggiornamento dello stato del materiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso EL} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Calcolo di:} \\ \left\{ \begin{array}{l} e^{tr} = e^{tr,TR} \\ \mathbf{s} = 2G(e - e^{tr}) \end{array} \right. \\ \\ e^{tr} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^X = \mathbf{X} - \mathbf{s}^{TR} + 2G\Delta\zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + [\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|e^{tr}\|}] \frac{\partial \overline{\|e^{tr}\|}}{\partial e^{tr}} = \mathbf{0} \\ R^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ \text{Caso INEL} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Controllo:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \overline{\|e^{tr}\|} < \varepsilon_L \quad \text{OK} \\ \text{se } \overline{\|e^{tr}\|} = \varepsilon_L \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^X = \mathbf{X} - \mathbf{s}^{TR} + 2G\Delta\zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ + [\beta \langle T - M_f \rangle + h \overline{\|e^{tr}\|} + \gamma] \frac{\partial \overline{\|e^{tr}\|}}{\partial e^{tr}} = \mathbf{0} \\ R^{\Delta\zeta} = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R = 0 \\ R^\gamma = \overline{\|e^{tr}\|} - \varepsilon_L \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

RETURN MAP PER IL MODELLO AURICCHIO-PETRINI 1D**1. Inizializzazione dello stato di prova:**

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases}$$

2. Controllo dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \alpha^{TR} = \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ F^{TR} = |X^{TR}| - R \end{cases} \\ \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } F^{TR} < 0 \rightarrow \text{passo elastico (EL)} \\ \text{se } F^{TR} = 0 \rightarrow \text{passo inelastico (INEL)} \end{cases} \end{cases}$$

3. Aggiornamento dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Caso EL} & \begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \\ \varepsilon^{tr} & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ |X| - R = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Caso INEL} & \begin{cases} \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L & \text{OK} \\ \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ |X| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

RETURN MAP PER IL MODELLO [A] 1D

1. Inizializzazione dello stato di prova:

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ B^{TR} = m(H + n\varepsilon^{tr,TR}) \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases}$$

2. Controllo dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \alpha^{TR} = nB^{TR} + \beta(T - M_f) \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ F^{TR} = |X^{TR}| - R \end{cases} \\ \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } F^{TR} < 0 \rightarrow \text{passo elastico (EL)} \\ \text{se } F^{TR} = 0 \rightarrow \text{passo inelastico (INEL)} \end{cases} \end{cases}$$

3. Aggiornamento dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Caso EL} & \begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ B = m(H + n\varepsilon^{tr}) \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \\ \varepsilon^{tr} & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + nB + \beta(T - M_f) \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ B - m(H + n\varepsilon^{tr}) = 0 \\ |X| - R = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Caso INEL} & \begin{cases} \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L & \text{OK} \\ \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X - \sigma + nB + \beta(T - M_f) \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ B - m(H + n\varepsilon^{tr}) = 0 \\ |X| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X}{|X|} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

RETURN MAP PER IL MODELLO [B] 1D**1. Inizializzazione dello stato di prova:**

$$\begin{cases} \varepsilon^{tr,TR} = \varepsilon_n^{tr} \\ M^{TR} = M_n \\ B^{TR} = m \left(H + n(M^{TR})^z \right) \\ \sigma^{TR} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr,TR}) \end{cases}$$

2. Controllo dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \alpha^{TR} = \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr,TR}}{|\varepsilon^{tr,TR}|} + h\varepsilon^{tr,TR} \\ X_1^{TR} = \sigma^{TR} - \alpha^{TR} \\ X_2^{TR} = -nz(M^{TR})^{(z-1)} (B^{TR} - \alpha M^{TR}) - \alpha M^{TR} \\ F^{TR} = |X_1^{TR}| + \kappa |X_2^{TR}| - R \end{cases} \\ \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } F^{TR} < 0 \rightarrow \text{passo elastico (EL)} \\ \text{se } F^{TR} = 0 \rightarrow \text{passo inelastico (INEL)} \end{cases} \end{cases}$$

3. Aggiornamento dello stato del materiale:

$$\begin{cases} \text{Caso EL} & \begin{cases} \text{Calcolo di:} & \begin{cases} \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} \\ M = M_n \\ B = m(H + nM^z) \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) \end{cases} \\ \varepsilon^{tr} & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ B - m(H + nM^z) = 0 \\ X_1 - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} = 0 \\ X_2 + nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) + \alpha M = 0 \\ |X_1| + \kappa |X_2| - R = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X_1}{|X_1|} \\ M = M_n + \Delta\zeta \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Caso INEL} & \begin{cases} \text{Controllo:} & \begin{cases} \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L & \text{OK} \\ \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L & \begin{cases} \sigma - E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}) = 0 \\ X_1 - \sigma + \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} + h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} = 0 \\ X_2 + nzM^{(z-1)} (B - \alpha M) + \alpha M = 0 \\ |X_1| + \kappa |X_2| - R = 0 \\ |\varepsilon^{tr}| - \varepsilon_L = 0 \\ \varepsilon^{tr} = \varepsilon_n^{tr} + \Delta\zeta \frac{X_1}{|X_1|} \\ M = M_n + \Delta\zeta \kappa \frac{X_2}{|X_2|} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

CAPITOLO 8

Conclusioni

I risultati che si sono avuti con le prove numeriche hanno dimostrato la validità dei nuovi modelli $[A]$ e $[B]$.

Come possibili sviluppi futuri ci si propone di:

- (1) sviluppare e migliorare legami costitutivi in grado di riprodurre l'effetto superelastico e l'effetto a memoria di forma ferromagnetici;
- (2) implementare tali legami costitutivi con tecniche di calcolo numerico tipo elementi finiti;
- (3) simulare numericamente il comportamento di elementi strutturali ferromagnetici a memoria di forma o di strutture complesse con componenti ferromagnetici a memoria di forma;
- (4) effettuare campagne di prove sperimentali su materiali e strutture ferromagnetici a memoria di forma, allo scopo di validare legami costitutivi e modelli numerici proposti.
- (5) per il campo biomedico, progettare attuatori ferromagnetici a memoria di forma per la realizzazione di endoscopi mini-invasivi e arti robotici;
- (6) studiare la biocompatibilità dei materiali per la realizzazione di endoprotesi;
- (7) controllare i problemi connessi con la tecnica diagnostica della risonanza magnetica e se si danneggia il materiale durante l'esame.

Bibliografia

- [1] Mazzoldi; *Fisica II* (2001)
- [2] Feynmann; *Fisica 2* (2002)
- [3] Marcon; *Elementi di elettromagnetismo* (2004)
- [4] D. C. Jiles; Recent advances and future directions in magnetic materials; *Acta materialia* (2003)
- [5] A. Cigada, R. Contro, C. Di Bello, M. C. Tanzi; BIOMATERIALI: dagli impianti protesici alla medicina rigenerativa; *Gruppo Nazionale di Bioingegneria* (2005)
- [6] R. D. James; New materials from theory: trends in the development of active materials; *International Journal of Solids and Structures* (2000)
- [7] S. J. Murray, M. A. Marioni, S. M. Allen, R. C. O'Handley, T. A. Lograsso; 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga; *Applied Physical Letters* (2000)
- [8] A. T. Zayak, P. Entel, J. Enkovaara, A. Ayuelaand, R. M. Nieminem; First-principles investigations of homogeneous lattice-distortive strain and shuffles in Ni_2MnGa ; *Journal of Physics* (2003)
- [9] L. E. Cross; Ferroelectric ceramics, materials and application issues; *Ceramic Transaction* (1996)
- [10] S. E. Park, S. Wada, P. W. Rehrig, S. Liu, L. E. Cross, T. R. ShROUT; Crystallographic engineering in high-performance piezoelectric crystals; *Smart Structures and Materials* (1999)
- [11] R. D. James, M. Wuttig; Magnetostriction of martensite; *Philosophical Magazine A* (1998)
- [12] P. J. Brown, K. Ishida, R. Kainuma, T. Kanomata, K. U. Neumann, K. Oikawa, B. Ouladdiaf, K. R. A. Ziebeck; Crystal structures and phase transitions in ferromagnetic shape memory alloys based on Co-Ni-Al and Co-Ni-Ga; *Journal of Physics* (2005)

- [13] F. Masdeu, J. Pons, C. Seguí, E. Cesari, J. Dutkiewicz; Some features of Ni-Fe-Ga shape memory alloys under compression; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2005)
- [14] H. E. Karaca, B. Basaran, I. Karaman, Y. I. Chumlyakov, H. J. Maier; Magnetic and conventional shape memory characteristics of $Co_{38}Ni_{33}Al_{29}$ and Ni_2MnGa shape memory alloys; *International Conference on Martensitic Transformation* (2005)
- [15] K. Ullakko; Large stroke and high-strength actuator materials for adaptive structures; *Third International Conference on Intelligent Materials* (1996)
- [16] K. Ullakko, P. G. Yakovenko, V. G. Gavriljuk; New developments in actuator materials as reflected in magnetically controlled shape memory alloys and high-strength shape memory steels; *Smart Structures and Materials* (1996)
- [17] K. Ullakko, J. K. Huang, C. Kantner, R. C. O'Handley, V. V. Kokorin; Large magnetic-field-induced strains in Ni_2MnGa single crystals; *Applied Physical Letters* (1996)
- [18] S. J. Murray, M. Farinelli, C. Kantner, J. K. Huang, S. M. Allen, R. C. O'Handley; Field-induced strain under load in Ni-Mn-Ga magnetic shape memory materials; *Journal of Applied Physics* (1998)
- [19] S. J. Murray, M. Marioni, P. G. Tello, S. M. Allen, R. C. O'Handley; Giant magnetic-field-induced strain in Ni-Mn-Ga crystals: experimental results and modelling; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2001)
- [20] A. Sozinov, A. A. Likhachev, N. Lanska, K. Ullakko, V. K. Lindroos; 10% magnetic-field-induced strain in Ni-Mn-Ga seven-layered martensite; *Journal of Physics* (2003)
- [21] P. Mullner, V. A. Chernenko, G. Kostorz; Large cyclic magnetic-field-induced deformation in orthorhombic (14M) Ni-Mn-Ga martensite; *Journal of Applied Physics* (2004)
- [22] A. D. Boshko, A. N. Vasil'ev, V. V. Khovailo, I. E. Dikshtein, V. V. Koledov, S. M. Seletskii, A. A. Tulaikova, A. A. Cherechukin, V. G. Shavrov, V. D. Bushel'kinov; Magnetic and structural phase transitions in the shape memory alloys $Ni_{2+x}Mn_{1-x}Ga$; *Journal of Experimental and Theoretical Physics* (1999)
- [23] I. K. Zasimchuk, V. V. Kokorin, V. V. Martynov, A. V. Tkachenko, V. A. Chernenko; Crystal structure of martensite in Heusler alloy Ni_2MnGa ; *Physical Methods in Metallurgy* (1990)
- [24] V. V. Martynov, V. V. Kokorin; The crystal structure of thermally and stress-induced martensites in Ni_2MnGa single crystals; *Journal of Physics* (1992)

- [25] K. Ullakko, J. K. Huang, V. V. Kokorin, R. C. O'Handley; Magnetically controlled shape memory effect in Ni_2MnGa intermetallics; *Scripta Materialia* (1997)
- [26] S. J. Murray, M. A. Marioni, A. M. Kukla, J. Robinson, R. C. O'Handley, S. M. Allen; Large field-induced strain in single crystalline Ni-Mn-Ga ferromagnetic shape memory alloy; *Journal of Applied Physics* (2000)
- [27] S. Y. Chu, A. Cramb, M. De Graef, D. Laughlin, M. E. McHenry; The effect of field cooling and field orientation on the martensitic phase transformation of Ni_2MnGa single crystal; *Journal of Applied Physics* (2000)
- [28] M. Wuttig, K. Tsuchiya, L. Liu, R. James; Occurrence of ferromagnetic shape memory alloy; *Journal of Applied Physics* (2000)
- [29] P. J. Ferreira, J. B. Vander Sande; Magnetic field effects on twin dislocations; *Scripta Materialia* (1999)
- [30] P. Czimmek; Characterization of magnetic shape memory material; *Siemens VDO Automotive Engineering Report* (2004)
- [31] J. Enkovaara, A. Ayuela, A. T. Zayak, P. Entel, L. Nordstrom, M. Dube, J. Jalkanen, J. Impola, R. M. Nieminem; Magnetically driven shape memory alloys; *Material Science and Engineering* (2003)
- [32] O. Heczko, L. Straka; Magnetic properties of stress-induced martensite and martensitic transformation in Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloy; *Material Science and Engineering* (2004)
- [33] O. Heczko; Magnetic shape memory effect and magnetization reversal; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2004)
- [34] L. Hirsinger, C. Lexcellent; Modelling detwinning of martensite platelets under magnetic and (or) stress actions on Ni-Mn-Ga alloys; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2003)
- [35] V. A. L'vov, S. P. Zagorodnyuk, V. A. Chernenko; A phenomenological theory of giant magnetoelastic response in martensite; *The European Physical Journal B* (2002)
- [36] L. Hirsinger, N. Creton, C. Lexcellent; Stress-induced phase transformations in Ni-Mn-Ga alloys: experiments and modelling; *Materials Science and Engineering A* (2003)
- [37] P. Mullner, V. A. Chernenko, G. Kostorz; A microscopic approach to the magnetic-field-induced deformation of martensite (magnetoplasticity); *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2003)
- [38] J. Kiang, L. Tong; Modelling of magneto-mechanical behaviour of Ni-Mn-Ga single crystals; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2004)

- [39] Y. Liang, Y. Sutou, T. Wada, C. Lee, M. Taya, T. Mori; Magnetic field-induced reversible actuation using ferromagnetic shape memory alloys; *Scripta Materialia* (2003)
- [40] A. Likhachev, K. Ullakko; The model development and experimental investigation of giant magneto-mechanical effects in Ni-Mn-Ga; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2001)
- [41] O. Heczko, V. A. L'vov, L. Straka, S. P. Hannula; Magnetic indication of the stress-induced martensitic transformation in ferromagnetic Ni-Mn-Ga alloy; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2005)
- [42] O. Heczko, L. Straka; Giant magneto-elastic strain - magnetic shape memory effect; *Czechoslovak Journal of Physics* (2004)
- [43] H. E. Karaca, I. Karaman, B. Basaran, Y. I. Chumlyakov, H. J. Maier; Magnetic field and stress induced martensite reorientation in NiMnGa ferromagnetic shape memory alloy single crystals; *Acta Materialia* (2005)
- [44] A. Vassiliev; Magnetically driven shape memory alloys; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2002)
- [45] H. Hosoda, S. Takeuchi, T. Inamura, K. Wakashima; Material design and shape memory properties of smart composites composed of polymer and ferromagnetic shape memory alloy particles; *Science and Technology of advanced materials* (2004)
- [46] L. Soursa, E. Pagounis; Magnetic field-induced stress in the Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloy; *Journal of applied Physics* (2004)
- [47] M. A. Marioni, R. C. O'Handley, S. M. Allen, S. R. Hall, D. I. Paul, M. L. Richard, J. Feuchtwanger, B. W. Peterson, J. M. Chambers, R. Techapiesanchaorenkij; The ferromagnetic shape memory effect in Ni-Mn-Ga; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (2005)
- [48] C.P. Henry, D. Bono, J. Feuchtwanger, S. M. Allen, R. C. O'Handley; AC field-induced actuation of single crystal Ni-Mn-Ga; *Journal of Applied Physics* (2002)
- [49] F. Auricchio, A. Reali; A phenomenological one-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity; (2005)
- [50] F. Auricchio, L. Petrini, F. Migliavacca, P. Massarotti, S. Schievano, G. Dubini; Computational Studies of Shape Memory Alloy Behavior in Biomedical Application; *Journal of Biomechanical Engineering* (2005)
- [51] F. Auricchio, L. Petrini; A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems; *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2004)

- [52] R. C. Smith, M. J. Dapino, T. R. Braun, A. P. Mortensen; A Homogenized Energy Framework for Ferromagnetic Hysteresis; *www.ncsu.com/reports* (2006)
- [53] R. C. Smith, M. J. Dapino; A Homogenized Energy Model for the Direct Magnetomechanical Effect; *www.ncsu.com/reports* (2006)
- [54] R. C. Smith, S. Seelecke, M. J. Dapino, Z. Ounaies; A unified framework for modeling hysteresis in ferroic materials; *Journal of the mechanics and physics of solids* (2005)
- [55] R. C. Smith, J. E. Massad; A Unified Methodology for Modeling Hysteresis in Ferroelectric, Ferromagnetic and Ferroelastic Materials; *www.ncsu.com/reports* (2005)
- [56] R. C. Smith, M. J. Dapino; A stress-dependent hysteresis model for ferromagnetic transducer materials; *www.ncsu.com/reports* (2005)
- [57] D. C. Jiles; Theory of the magnetomechanical effect; *Journal of Physics* (1995)
- [58] B. Kiefer, D. C. Lagoudas; Magnetic Field-Induced Martensitic Variant Reorientation in Magnetic Shape Memory Alloys; *Philosophical Magazine* (2005)
- [59] D. C. Jiles, M. K. Devine; The law of approach as a means of modelling the magnetomechanical effect; *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* (1995)
- [60] K. W. E. Cheng, W. S. Lee, C. Y. Tang, L. C. Chan; Dynamic modelling of magnetic materials for high frequency applications; *Journal of Materials Processing Technology* (2003)
- [61] F. Auricchio, R. L. Taylor; A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes; *International Journal of Plasticity* (1999)
- [62] F. Auricchio; SHAPE-MEMORY ALLOYS: applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations; *Tesi di dottorato* (1995)
- [63] M. Pasquale; Mechanical sensors and actuators; *Sensor and Actuators A Physical* (2003)
- [64] M. Brugnara; Teoria ed applicaizoni delle leghe a memoria di forma; *Tesi di laurea* (1998)
- [65] I. Soursa, J. Tellinen, E. Pagounis, I. Aaltio, K. Ullakko; Applications of magnetic shape memory actuators; *AdaptaMat Ltd* (2004)

Ringraziamenti

Per prima cosa vorrei ringraziare il Prof. Ferdinando Auricchio per avermi seguito durante tutto il periodo della tesi e per avermi permesso di realizzarla in un ambiente molto formativo quale il Laboratorio di Calcolo Numerico al dipartimento di Meccanica Strutturale. Inoltre Lo ringrazio in particolare per avermi dato le chiavi del Laboratorio e quindi la possibilità di passare tante belle notti in Nave a scrivere in Latex ☺.

Non posso quindi non ringraziare i compagni di Laboratorio e in particolare Ale Reali che, nella tesi, mi ha tirato fuori dai guai con i suoi preziosi consigli. Ringrazio quindi tutto il resto del Lab (Gabriele, Ashish, Potassio, Pasquy e Lele) per avermi sopportato in questi mesi.

Ringrazio il Laboratorio di Informatica Medica (Paolo Magni, Paso, Francesca, Nadia, Persego, Angela, Vale e Chiara) per avermi permesso di scroccare qualsiasi tipo di dolcetto portato dai componenti.

Ringrazio tutto il Laboratorio di Automatica, e in particolare Davide e Antonio, per avermi accompagnato nei numerosi pranzi al DESPAR ma anche Gima.

Un ringraziamento particolare va a tutti i miei grandi amici extracollegiali tra cui il Paso, Nadia, Claudia, Fabrizio, Ulde, Marwan, Monica e tutti quelli che mi sono dimenticato.... perché gli voglio veramente bene.

Ringrazio tutti i collegiali con cui sono cresciuto in questi tre splendidi anni: il San Giovannino Alto 2003-2004, il Mezzanino Vicolo 2004-2005, il Mezzanino Vicolo 2005-2006 ma in particolare Gabriele perché è umbro!!!!...e questo dice tutto; Davide perché grazie a lui ho imparato a costruire sistemi di allarme e rubare cartelli; i Terrones(Wito, Persego, Pasquy, Peggy, Dianzio, Thiago, Simeo) perché quando c'è qualcosa da fare di divertente loro ci sono sempre; i mezzaninici Miami e Turcato perché sono state le mie matricole e hanno avuto in eredità il comando del Mezzanino Vicolo; Thomas perché la sua batteria artigianale e i martelli pneumatici mi hanno tenuto compagnia molte notti; Chandra perché come rende immangiabile lui la mia frutta(disintegrandola) non lo sa fare nessuno; Gobbo perché è un comunista anche se gira con la BMW e sogna la Porsche(rivale numero 2 del ping pong); Marzio perché è uno dei miei fratelli acquisiti e fa Ingegneria Fuffa; Livio perché è l'altro mio fratello acquisito nonché il mio compagno di avventure stupide(rivale numero 1 del ping pong); e tutti quelli che ho dimenticato.....

Inoltre ringrazio i miei eterni amici di Perugia: il Palla, Filo, Tommy, Ricky e tutti i perugini che non ho citato...

Ringrazio in particolare Alessia perché è stata veramente disponibile e gentile nei miei confronti e mi dispiace di aver conosciuto una persona brava come lei così tardi anche se legati da vincoli di sangue.

Questa che segue è la parte più importante dei miei ringraziamenti: è giunto finalmente il momento di ringraziare tutta la mia vera famiglia. In queste poche righe riuscirò solamente a ringraziare in minima parte tutti loro. Iniziamo con il ringraziare le persone migliori del mondo: i miei genitori e le mie

sorelle(Lety e Sofy). Volevo cogliere l'occasione per dirvi che, anche se non sembra, mi mancate tantissimo; la scelta di andare a studiare fuori è stata un duro colpo psicologico per me ma l'ho fatto anche perché voi vi meritate più del massimo da me visto l'infinito amore che mi avete dato e continuate a darmi tuttora...spero di non deludervi.

Non posso non ringraziare la grandissima nonna Lea perché , oltre a ricoprirmi di buonissimi biscottoni é la nonna Abelarda. E anche il nonno Maceo che, anche se mi ha visto poco in questi anni, mi ha sempre pensato. Non dimentichiamo tutti i miei zii che mi sono stati più vicini: zia Francesca e zio Stefano perché mi hanno sostenuto in tutti i momenti, zia Rita e zio Daniele perché sono stati i miei secondi genitori in questi tre anni, zia Tiziana e zio Arcangelo perché mi sono stati anche loro vicini in ogni momento.....insomma un grazie speciale a tutti gli zii perché gli voglio veramente, veramente bene.

Alla persona migliore che io abbia mai conosciuto non posso che dedicargli come minimo questa tesi.

Infine volevo ringraziare una persona davvero speciale per me: il mio angioletto ♡Lara♡. Grazie per avermi sopportato e per continuare a sopportarmi....spero lo farai per l'eternità !!!

Grazie a tutti per avermi permesso questa piccola, ma indimenticabile parentesi pavese!!!!!!

JZ