à6.23121

Indice

1	Me	todo a	i volumi finiti	11
	1.1	Introd	luzione	11
		1.1.1	Confronto FVM-FEM-DFM	14
	1.2	Proble	ema ellittico 1D	15
		1.2.1	Formulazione del FVM per il problema di <i>Dirichlet</i> .	15
		1.2.2	Integrazione numerica: Cavalieri-Simpson	17
		1.2.3	Costruzione della matrice di rigidezza	17
		1.2.4	Tipologie di carico	19
	1.3	Proble	ema ellittico in 2D \ldots	21
		1.3.1	Equazione di Poisson	22
		1.3.2	Schema numerico ai volumi finiti in 2D	22
		1.3.3	Costruzione della matrice di rigidezza	25
		1.3.4	Tipologie di carico	28
	1.4	Condi	zioni al contorno	33
2	Metodo agli Elementi Finiti			35
	2.1	Introd	luzione	35
	2.2	Proble	ema ellittico 1D \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	35
		2.2.1	Spazio delle funzioni C e H	38
		2.2.2	Formulazione dello schema numerico con FEM	39
		2.2.3	Metodo alla Bubnov-Galerkin	40
		2.2.4	Problema Algebrico	41
		2.2.5	Funzioni di forma	43
		2.2.6	Integrazione del carico	46
	2.3	Proble	ema ellittico 2D \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	46
	2.4	Camb	io di coordinate	49
	2.5	Costru	uzione della matrice di rigidezza	52
		2.5.1	Integrazione del carico	54
	2.6	Condi	zioni al contorno	55
3	Metodo alle differenze finite			57
	3.1	Introd	luzione	57
	3.2	Appro	ossimazione alle differenze finite	58
	3.3	Proble	ema ellittico 1D e schema numerico	59
		3.3.1	Vettore dei carichi	60
	3.4	Proble	ema ellittico in 2D	60

	3.5	Schem	a numerico alle differenze finite	61		
4	Risultati delle analisi 1D					
	4.1	Carico	costante	66		
	4.2	Carico	armonico	68		
	4.3	Carico	esponenziale	70		
	4.4	Carico	\mathcal{P} polinomiale \ldots	72		
	4.5	Stima	dell'errore	74		
5	Rist	ultati d	lelle analisi 2D	77		
	5.1	Stima	dell'errore	77		
	5.2	Carico	Polinomiale A	81		
	0.2	5.2.1	Soluzione analitica	81		
		5.2.2	Soluzione numerica	82		
		5.2.3	Errore	84		
	5.3	Carico	Polinomiale B	86		
	0.0	531	Soluzione analitica	86		
		532	Soluzione numerica	87		
		5.3.2	Frroro	80		
	5 /	Carico	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}$	01		
	0.4	5 4 1	Soluziono analitica	01		
		549	Soluzione analitica	02		
		5.4.2		92 04		
	55	0.4.0 Corico	Armonico B	94		
	0.0	5 5 1	Soluzione analitice	90		
		0.0.1 5 5 0		90		
		0.0.Z		97		
	E C	0.0.3		101		
	0.6			101		
		5.6.1	Soluzione analitica	101		
		5.6.2	Soluzione numerica	102		
		5.6.3	Errore	104		
	5.7	Carico	Esponenziale B \ldots	106		
		5.7.1	Soluzione analitica	106		
		5.7.2	Soluzione numerica	107		
		5.7.3	Errore	109		
6	FVM: Applicazioni all'ingegneria					
	6.1	Flusso	all'interfaccia di due mezzi porosi	111		
		6.1.1	Introduzione	111		
		6.1.2	Equazioni del flusso bifase	112		
		6.1.3	Flusso di <i>Godunov</i>	113		
		6.1.4	Upstream mobility flux	113		
		6.1.5	Conclusioni	114		
	6.2	Bio-Tr	asferimento di calore	114		
		6.2.1	Modello matematico	114		
		6.2.2	Soluzione ai volumi finiti	115		
		6.2.3	Conclusioni	116		

	6.3	Propa	gazione di <i>tsunami</i> e inondazioni		116
		6.3.1	Le Shallow Water Equations		117
		6.3.2	Sistemi iperbolici di leggi di conservazione		118
		6.3.3	Metodo ai volumi finiti		118
		6.3.4	Simulazione dello tsunami di <i>Sumatra</i>		119
	6.4	Comb	ustione nel motore a scoppio		120
		6.4.1	Modello fisico		121
		6.4.2	FVM per l'equazione del trasporto $\ldots \ldots \ldots$		122
		6.4.3	Conclusioni		123
7	Con	clusio	ni	1	125
Bi	Bibliografia				

SOMMARIO

L'obiettivo principale che si propone di perseguire questa tesi è quello di capire il funzionamento di un metodo numerico che nel campo dell'Ingegneria Strutturale è poco conosciuto ma che può essere ritenuto alternativo al Metodo agli Elementi Finiti FEM e al Metodo alle Differenze Finite DFM. Per perseguire l'obiettivo preposto si è ritenuto di partire da una classe di problemi che fosse il più semplice possibile. La famiglia di equazioni differenziali scelta è stata quindi quella delle *Equazioni ellittiche*. Il primo passo è stato l'implementazione in un codice di calcolo, Matlab7.1, dello schema numerico per una tipologia di equazioni ellittica in una dimensione. Tale procedimento è stato compiuto anche per il metodo alle differenze finite e per il metodo agli elementi finiti. Sono state stabilite una serie di tipologie di carichi che potesse mettere in evidenza le differenze degli schemi, costante, polinomiale, esponenziale ed armonico. Al fine di studiare la velocità di convergenza del Metodo ai Volumi Finiti FVM, del FEM e del DFM si sono stabilite diverse tipologie di stima dell'errore. Il secondo passo, che ha richiesto più tempo, è stato il passaggio al caso piano, in particolare si è passati attraverso l'equazione di *Poisson*, interpretata in questa tesi come l'equazione di una membrana pretesa, ma che può essere vista sotto molti altri aspetti (diffusione di calore, campi magnetici,...). Si è ripetuto lo studio della velocità di convergenza dei metodi attraverso delle stime dell'errore adattate al caso bidimensionale. L'ultima fase è stata la ricerca in bibiliografia di applicazioni pratiche del metodo ai volumi finiti per capire le classi di problemi in cui viene più frequentemente utilizzato.

Se comprendi e conosci un solo insegnamento, avrai in mano tutti i miei insegnamenti. Qual è questo insegnamento? L'altruismo. BUDDHA

RINGRAZIAMENTI

Un particolare ringraziamento va ai Prof. Ferdinando Auricchio e Prof. Carlo Lovadina per la pazienza che hanno avuto nel seguirmi in questo lavoro. L'argomento trattato mi ha permesso di imparare molte cose in un periodo relativamente ristretto di tempo. Ringrazio il Prof. Armando Gobetti per l'attenzione e l'aiuto che ha sempre dato alla mia tesi e per la stima che ha nei miei confronti. Ringrazio il Prof. Carlo Cinquini per la serietà e la disponibilità che ha dimostrato ogni qualvolta io avessi bisogno di chiarimenti inerenti a svariati argomenti. Ringrazio inoltre la Prof. Ester Cantù per la fiducia che dimostra sempre nei miei confronti e nelle mie capacità. Ringrazio il Prof. Eugenio Probati perchè ha investito parte del suo tempo per aiutarmi. Infine grazie al Prof. Alessandro Reali perchè mi ha aiutato con *Matlab* nonostante non avessi dato l'esame di metodi numerici quando diceva lui.

Un grazie enorme va a mamma e papà che mi hanno sempre messo nelle condizioni migliori per poter rendere al massimo da quando sono all'Università. Mi sopportano da tanto ormai quindi spero ora di ripagare in maniera adeguata i sacrifici che hanno fatto soprattutto in questi ultimi 5 anni, il loro sostegno è sempre stato ed è indispensabile!

Un grazie alla mia famiglia, tra cui le mie sorelle Raffy e Cri, i miei cognati e i miei due nipotini Bryan e Giuseppe a cui spesso non ho potuto dedicare il tempo che avrei voluto, gli voglio tanto bene.

Un grazie all'unica ragazza, Crystal, che in questi ultimi due anni ha saputo amarmi con tutto il suo cuore, sopportando senza lamentele sia la lontananza che spesso ci ha diviso sia l'insopportabile (a volte...) Giorgio. Il suo sostegno è stato fondamentale e la serenità che ha saputo trasmettermi ha contribuito a farmi rendere al massimo, anche a lei va un premio *Nobel* per la pazienza.

Grazie sincero ai miei amici, Flavio detto *Sberla*, Filippo detto *Er Tendenzialmente*, Faz in arte *Fazio* ed Eros detto *Il Reverendo*, con loro ho sempre continuato a divertirmi nonostante lo studio e a condividere ricordi della mia giovinezza troppo spesso bruciata tra appunti e registrazioni.

Grazie ai miei cugini Sonia e Roberto per l'affetto e la vicinanza che mi

hanno sempre dimostrato, con loro ho vinto negli ultimi quattro anni quattro scudetti con i *Ragazzi Neroazzurri*. Grazie alla zia Anna e allo zio Ilario che spesso sono venuti a trovarmi e a farmi compagnia portando tante cose buone da mangiare, mi mancheranno tanto le serate qui con loro.

Le amicizie vere che ho trovato durante questi anni pavesi sono il vero regalo e il motivo di maggiore felicità anche davanti ad un traguardo importante come questo. Grazie a Nicola perchè ha saputo ascoltarmi e donarmi un'amicizia sempre forte in questi ultimi tre anni, insieme a Faz abbiamo trascorso dei bei momenti che rimarranno nella mia memoria per sempre. Grazie a Valentina perchè in poco tempo mi ha saputo ascoltare e capire, un'amicizia che mi ha ripagato di questi anni di sacrifici, con lei ringrazio anche Enza, Ilenya, Luca, Michelle, Kevin e Ale perchè in loro ho trovato un gruppo di amici stupendo. Grazie di cuore a Jorge detto *Giorgio* e ad Andrea, la dedica è ispirata soprattutto a loro, due ragazzi che ammiro molto per l'umiltà, l'altruismo e le capacità, oltre all'aiuto fondamentale che mi hanno dato, sono sicuro di aver trovato due grandi amicizie. Grazie anche al mitico *Cesco* con cui ho condiviso quest ultimo periodo di sbatti, insieme ci siamo fatti forza per raggiungere in tempo l'obiettivo.

Infine ringrazio *Dio* per le capacità e la forza che mi ha dato, spero di riuscire sempre a farle fruttare come *Lui* vorrebbe. Mi ha dimostrato che gli ostacoli che troviamo lungo il cammino della vita li possiamo superare con la fede, la costanza, l'impegno e il sacrificio. Lo ringrazio perchè sono molto fortunato a poter essere arrivato fin qui, Lo ringrazio per la famiglia e per la salute che non mi ha mai fatto mancare.

Pavia 20 aprile 2009

Giorgio

Elenco delle figure

1.1	Volume di controllo	12
$2.1 \\ 2.2$	Funzione di forma lineare	44 44
$2.3 \\ 2.4$	Elemento parente o genitore riferito al dominio fisico \dots Funzione di forma $N_1 \dots \dots$	49 50
$3.1 \\ 3.2$	Discretizzazione del dominio in 1D	61 62
4.1	Stima dell'errore: tabella riassuntiva	65
4.2	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)	66
4.3	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)	67
4.4	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)	68
4.5	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)	69
4.6	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)	70
4.7	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)	71
4.8	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)	72
4.9	Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)	73
4.10	Velocità di convergenza di FVM vs DFM	74
4.11	Carico costante	75
4.12	Carico polinomiale	75
4.13	Carico esponenziale	76
4.14	Carico armonico	76
5.1	Stima dell'errore: tabella riassuntiva	78
5.2	Carico polinomiale A: Errore E	79
5.3	Carico esponenziale A: Errore E	79
5.4	Carico Polinomiale B: Errore E_3	80
5.5	Carico armonico A: Errore E_3	80
5.6	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	81
5.7	Soluzione FVM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	82
5.8	Soluzione <i>FEM</i> per 100 elementi	82
5.9	Soluzione DFM per 100 elementi	83
5.10	Stima qualitativa dell'errore FVM	84
5.11	Stima qualitativa dell'errore FEM	84
5.12	Stima qualitativa dell'errore DFM	85

	~	
5.13	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	86
5.14	Soluzione FVM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	87
5.15	Soluzione FEM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	87
5.16	Soluzione DFM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	88
5.17	Stima qualitativa dell'errore FVM	89
5.18	Stima qualitativa dell'errore <i>FEM</i>	89
5.19	Stima qualitativa dell'errore DFM	90
5.20	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	91
5.21	Soluzione FVM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	92
5.22	Soluzione <i>FEM</i> per 100 elementi	92
5.23	Soluzione DFM per 100 elementi $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$	93
5.24	Stima qualitativa dell'errore FVM	94
5.25	Stima qualitativa dell'errore <i>FEM</i>	94
5.26	Stima qualitativa dell'errore DFM	95
5.27	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	96
5.28	Soluzione FVM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	97
5.29	Soluzione <i>FEM</i> per 100 elementi	97
5.30	Soluzione DFM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	98
5.31	Stima qualitativa dell'errore FVM	99
5.32	Stima qualitativa dell'errore <i>FEM</i>	99
5.33	Stima qualitativa dell'errore <i>DFM</i>	100
5.34	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	101
5.35	Soluzione FVM per 100 elementi $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	102
5.36	Soluzione <i>FEM</i> per 100 elementi	102
5.37	Soluzione <i>DFM</i> per 100 elementi	103
5.38	Stima qualitativa dell'errore FVM	104
5.39	Stima qualitativa dell'errore <i>FEM</i>	104
5.40	Stima qualitativa dell'errore <i>DFM</i>	105
5.41	Soluzione esatta rappresentata con <i>Matlab</i>	106
5.42	Soluzione FVM per 100 elementi	107
5.43	Soluzione <i>FEM</i> per 100 elementi	107
5.44	Soluzione <i>DFM</i> per 100 elementi	108
5.45	Stima qualitativa dell'errore <i>FVM</i>	109
5.46	Stima qualitativa dell'errore <i>FEM</i>	109
5.47	Stima qualitativa dell'errore <i>DFM</i>	110
	1	
6.1	Simulazione dello tsunami nell'Oceano Indiano con tre tipi di	
	griglie	120
6.2	Forma del volume finito in 3D	122
71		100
(.1		120

Capitolo 1 Metodo ai volumi finiti

1.1 Introduzione

Il Metodo ai Volumi Finiti (FVM) è un metodo di discretizzazione utilizzato per la simulazione numerica di leggi di conservazione di vario genere (ellittiche, paraboliche o iperboliche per esempio). Tale metodo è stato ed è ampiamente utilizzato in diversi campi dell'ingegneria, come la meccanica dei fluidi, lo studio del trasferimento di massa e calore attraverso un mezzo o nell'ingegneria petrolifera. Alcune importanti caratteristiche del metodo ai volumi finiti sono simili a quelle del Metodi agli Elementi Finiti: può essere utilizzato su geometrie arbitrarie attraverso mesh strutturate o non strutturate, e conduce a schemi efficaci. Un'altra importante caratteristica consiste nel fatto che il flusso numerico è conservato da una cella all'altra. Quest ultima caratteristica fa del FVM un metodo molto interessante quando si trattano problemi di modellazione per i quali il flusso è significativo: nella meccanica dei fluidi, negli apparecchi simulatori di semi-conduttori, per il trasporto di massa e calore, ecc...

Il metodo ai volumi finiti è localmente conservativo perché è basato su un approccio di equilibrio o di bilancio. Il bilancio locale è scritto su ogni cella la quale è sovente chiamata *volume* di *controllo*; il volume di controllo può essere definito all'interno della mesh tramite due modalità (vedi figura 1.1):

- Vertex centered;
- Cell centered.

In questo contesto l'implementazione del metodo numerico ai volumi finiti sarà basato su volumi di controllo di tipo cell-centered sia per il caso monodimensionale che bidimensionale. Attraverso il teorema della divergenza può essere ricavata una formulazione integrale del flusso oltre il confine del volume di controllo.

I flussi sul contorno sono discretizzati rispettando le incognite discrete. Si possono descrivere diverse tipologie di equazioni col FVM le principali sono le seguenti:



Figura 1.1: Volume di controllo

• Equazioni ellittiche 1D Sia $\lambda \in L^{\infty}(0,1)$ tale che esista $\underline{\lambda} \in \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^*_+$ con $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$ e siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $b \geq 0$ ed $f \in L^2(0,1)$ tale che:

$$- (\lambda u_x)_x(x) + au_x(x) + bu(x) = f(x) u(0) = c, \quad u(1) = d$$
 (1.1)

la discontinuità del coefficiente λ può presentarsi per esempio a causa della permeabilità nei mezzi porosi oppure nei casi di trasmissione di calore in mezzi eterogenei. Si noti che l'assunzione $b \geq 0$ garantisce l'esistenza della soluzione.

- Equazioni ellittiche 2D e 3D
 - Sia Ω un sottoinsieme poligonale aperto e limitato di \mathbb{R}^d , con d=2,3. Si analizzi un operatore ellittico con una matrice dei coefficienti di diffusione discontinui ed al corrispondente problema fisico. Tale problema fisico può essere il trasferimento di energia elettrica o di energia termica o più generalmente un problema di diffusione in mezzi eterogenei ed può essere descritto con l'equazione (1.2).

$$- div(\Lambda \nabla u)(x) + div(vu)(x) + bu(x), \qquad x \in \Omega$$

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial \Omega$$
 (1.2)

• Equazioni paraboliche

La più generica equazione parabolica si può esprimere tramite la posizione (1.3).

1.1. INTRODUZIONE

$$u_t(x,t) - \Delta\varphi(u)(x,t) + div(vu)(x,t) + bu(x,t) = f(x,t)$$

$$x \in \Omega, \qquad t \in (0,T)$$
(1.3)

dove Ω è un sottoinsieme di \mathbb{R}^d limitato, aperto e poligonale (d = 2, 3), con $T > 0, b \ge 0, v \in \mathbb{R}^d$ è per semplicità un campo di velocità costante, f è una funzione definita in $\Omega \times \mathbb{R}_+$ che rappresenta una sorgente termica volumetrica. La funzione φ è una funzione continua non decrescente Lipschitziana, che nasce nella modellazione di processi generali di diffusione. Si può anche esprimere un semplice problema di *Stefan* con la formulazione (1.3) dove φ è una funzione lineare continua e regolare costante su un intervallo.

• Equazioni iperboliche 1D Si consideri a titolo d'esempio l'equazione iperbolica (1.4) non lineare nel caso più generale.

$$u_t(x,t) + (f(u))_x(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
(1.4)

dove f è una funzione tale che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathbb{C}^1, u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e dove le derivate parziali di u rispetto al tempo e allo spazio sono indicate con u_t e u_x . Nel caso lineare l'equazione diventerà:

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
 (1.5)

• Equazioni iperboliche non lineari multimensionali Si consideri l'equazione iperbolica non lineare (1.6) in d spazi dimensionali ($d \ge 1$) con condizioni iniziali.

$$u_t(x,t) + div(vf(u))(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
 (1.6)

in cui u_t denota la derivata nel tempo di u ($t \in \mathbb{R}_+$) e div è l'operatore divergenza rispetto alla variabile spazio che appartiene a \mathbb{R} . Si ricordi che |x| denota la norma euclidiana di x in \mathbb{R}^d e $x \cdot y$ il consueto prodotto scalare di x ed y in \mathbb{R}^d .

Come ultimo caso, che però non introduce nulla di nuovo, ci sono i sistemi tra i quali ricordiamo i sistemi di equazioni iperboliche, le equazioni di Navier e Stokes e le equazioni che regolano il flusso nei mezzi porosi.

1.1.1 Confronto FVM-FEM-DFM

Il metodo ai volumi finiti è abbastanza diverso (ma talvolta collegato) al metodo alle differenze finite o al metodo agli elementi finiti. Si può affermare, in prima approssimazione, che i principi su cui si basa il metodo agli elementi finiti sono:

- definizione di un dominio continuo;
- discretizzazione del dominio tramite un numero fissato di punti;
- scrittura di un'equazione per ogni punto discretizzato;
- approssimazione del campo incognito attraverso gli sviluppi di Taylor.

Il metodo agli elementi finiti è basato su una formulazione variazionale, la quale è scritta per entrambi i problemi, discreto e continuo, almeno nel caso di metodi agli elementi finiti conformi . La formulazione variazionale è ottenuta moltiplicando l'equazione originale attraverso una funzione *test*. Lincognita continua è quindi approssimata attraverso una combinazione lineare di funzioni di forma; queste funzioni di forma sono delle funzioni test per la formulazione variazionale discreta (che è chiamata *espansione di Galerkin*); l'equazione risultante è integrata sul dominio. Il metodo ai volumi finiti è talvolta chiamato metodo agli elementi finiti *discontinuo* dato che l'equazione originale è moltiplicata tramite la funzione caratteristica di ogni cella della griglia. Tale funzione è definita attraverso $1_K(x) = 1$ se $x \in K \in 1_K(x) = 0$ se $x \notin K$ e l'incognita discreta può essere considerata come una combinazione lineare delle funzioni di forma.

Il Metodo alle Differenze Finite (DFM) diventa complicato da utilizzare quando i coefficienti nell' equazione in questione sono discontinui. Con il metodo ai volumi finiti, le discontinuità dei coefficienti non daranno problemi se la mesh è scelta tale che le discontinuità dei coefficienti compaiono sui contorni dei volumi di controllo (vedi 2.3 e 3.3, per problemi ellittici). Si noti che lo schema ai volumi finiti è spesso chiamato schema alle differenze finite o schema alle differenze con celle centrate. Effettivamente, nel metodo ai volumi finiti, l'approccio alle differenze finite può essere utilizzato per l'approssimazione dei flussi sul contorno dei volumi di controllo.

Dal punto di vista industriale, il metodo ai volumi finiti è conosciuto come un solido e conveniente metodo per la discretizzazione delle leggi di conservazione (per solido si intende uno schema che si comporta bene anche per particolari equazioni complesse, per esempio sistemi non lineari di equazioni iperboliche e che può essere facilmente esteso casi più realistici e fisici rispetto ai problemi accademici). Il metodo ai volumi finiti è conveniente grazie al sintetico e affidabile linguaggio di calcolo per problemi complessi. Può essere più adeguato rispetto al metodo alle differenze finite (il quale in particolare ha bisogno di una geometria semplice). Comunque, in certi casi, è difficile progettare degli schemi che danno sufficiente precisione. Effettivamente, il metodo agli elementi finiti può essere molto più preciso rispetto al metodo ai volumi finiti quando si utilizzano polinomi di ordine elevato, ma richiede altresì una struttura adeguata e pratica che non è sempre disponibile nei problemi industriali. Altri metodi più precisi sono, per esempio, particolari metodi o *metodi spettrali* ma questi possono essere più dispendiosi e meno efficienti rispetto al metodo ai volumi finiti.

1.2 Problema ellittico 1D

Questa tesi si propone di studiare il Metodo ai Volumi Finiti (FVM) implementandolo in un codice di calcolo Matlab. L'obiettivo è il confronto tra il FVM e il metodo agli elementi finiti (FEM) per verificarne le principali differenze. A questo scopo sarà necessario implementare all'inizio del lavoro un'equazione differenziale che sia la più semplice possibile, ovvero il problema di Dirichlet. La stima dell'errore nei due casi è calcolata tramite la differenza tra la soluzione esatta e la soluzione approssimata. Sarà utile per definire per quali classi di problemi è consigliabile l'utilizzo di un metodo piuttosto che un altro.

1.2.1 Formulazione del FVM per il problema di *Diri*chlet

Nell'equazione differenziale (1.7) si può notare la presenza di un operatore differenziale che agisce su una funzione u dipendente solo da una variabile.

$$x \in \mathbb{R}$$
.

L'operatore differenziale del secondo ordine quindi non prende in considerazione la dipendenza dal tempo. La funzione f(x) è definita su un dominio [a, b], mentre le condizioni al contorno sono omogenee di Dirichlet.

$$-u''(x) = f(x)$$
 (1.7)

$$\begin{cases} u(a) = c\\ u(b) = d \end{cases}$$

Al fine di calcolare un'approssimazione numerica dell'equazione si deve introdurre una mesh o discretizzazione del dominio [a, b] in N volumi finiti K_i . Ogni volume finito, se si denota con x_i la coordinata dell'ascissa del baricentro dello *i*-esimo elemento, è definito tra $[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$. La dimensione del singolo elemento sarà quindi:

$$h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

Le incognite discrete saranno chiamate u_i con i = 1, ..., N e rappresentano il valore approssimato della soluzione esatta u all'interno del volume finito K_i . L'incognita discreta u_i può essere vista come un'approssimazione del valore medio di u sui K_i . L'equazione principale viene integrata su ogni cella K_i e ciò produce:

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \int_{K_i} f(x) \, dx \tag{1.9}$$

La scelta più ragionevole per approssimare le derivate che stanno al primo membro è il seguente quoziente differenziale:

$$D_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$D_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$
(1.10)

Per analogia con la definizione data in precedenza delle dimensione del volume finito si avrà che:

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_{i-\frac{1}{2}} = x_i - x_{i-1}$$
(1.11)

Sostituendo quindi al posto delle derivate prime $D_{i+\frac{1}{2}} \in D_{i-\frac{1}{2}}$ e dividendo ambo i membri per h_i è possibile impostare il metodo nemerico:

$$\frac{1}{h_i} \left(D_{i+\frac{1}{2}} - D_{i-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) \, dx \qquad i = 1, \dots, N \tag{1.12}$$

Il termine noto quindi può essere rinominato nel seguente modo:

$$F_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) \, dx \qquad i = 1, ..., N \tag{1.13}$$

Il primo membro dell'equazione (1.12) non è nient'altro che una matrice di rigidezza K per il vettore degli spostamenti u_i che rappresentano la soluzione approssimata. Detto questo il problema iniziale (1.7) si può riscrivere nella forma seguente, pronta per essere implementata:

$$Ku = F \tag{1.14}$$

Con $u = (u_1, ..., u_N)^t$ e $F = (F_1, ..., F_N)^t$ e con K e b definiti attraverso le posizioni presenti in (1.15).

$$(Ku)_{i} = \frac{1}{h_{i}} \left(-\frac{u_{i+1} - u_{i}}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i} - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) \qquad i = 1, ..., N$$

$$F_{i} = \frac{1}{h_{i}} \int_{K_{i}} f(x) \, dx \qquad \qquad i = 1, ..., N$$
(1.15)

Il termine noto è facilmente calcolabile tramite un integrazione numerica che ne approssima il valore esatto. In questo caso si adotterà la formula di integrazione nemerica di *Cavalieri-Simpson*.

1.2.2 Integrazione numerica: Cavalieri-Simpson

La formula di Cavalieri-Simpson si ottiene integrando sull'intervallo [a,b] anzichè f, il suo polinomio interpolatore di grado 2 nei nodi $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ e $x_2 = b$. I pesi risultano dati pertanto da $w_0 = w_2 = 1/3$ e $w_1 = 4/3$, e la formula risulta essere la (1.16).

$$I = \left(\frac{b-a}{6}\right) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
(1.16)

Per cui è possibile dimostrare che l'errore di quadratura è dato dalla relazione (1.17).

$$E = \frac{h^5}{90} \left[f^{(4)}(\xi) \right], \qquad h = \left(\frac{b-a}{2}\right) (1.17)$$

purchè $f \in \mathbb{C}^4([a, b])$, ed essendo ξ un punto interno all'intervallo (a,b). Dalla (1.17) si deduce che la (1.16) ha grado di esattezza 3. Sostituendo ad f il polinomio interpolatore composito di grado 2 su [a,b] si perviene alla formule composita corrispondente:

$$I = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\right) \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right]$$
(1.18)

L'errore associato alla formula di Cavalieri-Simpson composita (1.18) è il seguente:

$$E_t = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{H^4}{2} f^{(4)}(\xi)\right)$$
(1.19)

purchè $f^4([a, b])$, ed essendo ξ un punto interno all'intervallo (a,b), il grado di esattezza è pertanto pari a 3.

1.2.3 Costruzione della matrice di rigidezza

Per capire come implementare in Matlab il sistema algebrico (1.14) è necessario definire in maniera esatta la matrice di rigidezza K. A tal fine si scrivano per esempio la prima e ultima equazione di (1.15).

$$\frac{1}{h_1} \left(-\frac{u_2 - u_1}{h_{\frac{3}{2}}} + \frac{u_1 - u_0}{h_{\frac{1}{2}}} \right) \qquad i = 1 \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{h_N} \left(-\frac{u_{N+1} - u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-\frac{1}{2}}} \right) \qquad i = N \tag{1.21}$$

Dalla prima e ultima equazione si può notare che vengono presi in considerazione anche le soluzioni nei nodi di estremità zero e N + 1. Ciò suggerisce che i gradi di libertà totali sono sempre N + 2, N sono quelli liberi e 2 sono quelli vincolati. La matrice di rigidezza globale avrà dimensione $(N+2) \times (N+2)$, il vettore delle incognite sarà di conseguenza $(N+2) \times 1$ e il vettore dei termini noti anch'esso $(N+2) \times 1$.

Per semplicità si ipotizza una discretizzazione uniforme ovvero:

$$h_{i+\frac{1}{2}} = h \qquad i = 1, ..., N - 1 \tag{1.22}$$

Sostituendo nella (1.20) e nella (1.21) l'equazione (1.56) si ottengono le espressioni (1.23) e (1.24).

$$\frac{1}{h}\left(-\frac{u_2-u_1}{h}+\frac{u_1-u_0}{h/2}\right) \qquad i=1$$
(1.23)

$$\frac{1}{h} \left(-\frac{u_{N+1} - u_N}{h/2} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \right) \qquad i = N \tag{1.24}$$

Che dopo alcuni semplici passaggi danno origine alle (1.25) (1.26).

$$\frac{1}{h^2} \left(-2u_0 + 3u_1 - u_2 \right) \qquad i = 1 \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-u_{N-1} + 3u_N - 2u_{N+1}\right) \qquad i = N \tag{1.26}$$

Si noti che al posto di $h_{\frac{1}{2}}$ è stato sostituito h/2 per il semplice motivo che rappresenta la distanza tra il baricentro del primo elemento e l'estremo del dominio (in maniera analoga si ripete per l'ultimo elemento). Rimangono da definire le righe che vanno da 2 a N-1. La costruzione è molto semplice perchè analogamente ai passaggi precedenti si ha che:

$$\frac{1}{h^2}\left(-u_1 + 2u_2 - u_3\right) \qquad i = 2, \dots, N - 1 \tag{1.27}$$

Infine con la prima e l'ultima riga si assegnano le condizioni al contorno che permettono all'algoritmo di iniziare.

$$\begin{cases} u(a) = c\\ u(b) = d \end{cases}$$

Riassumendo la matrice che è stata implementata in Matlab è la seguente:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -2 & 3 & -1 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E il vettore delle incognite u associato a K è il seguente $u = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N, u_{N+1}]^T$

$a = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}]$

1.2.4 Tipologie di carico

Al fine di rapportare i risultati delle analisi dell'equazione di Dirichlet con i risultati del metodo agli elementi finiti si è deciso di prendere in considerazione diverse tipologie di carico. Per rapportare si intende il confronto e la successiva stima dell'errore dei metodi rispetto alla soluzione esatta. I carichi analizzati sono i seguenti:

- Costante;
- Polinomiale;
- Esponenziale;
- Sinusoidale.

Nei paragrafi successivi verrà presentata la soluzione analitica di questi carichi considerato che l'equazione considerata è relativamente semplice da risolvere.

Carico costante

$$-u''(x) = p$$

$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases}$$
(1.28)

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{cases} u' = px + C_1\\ u = p\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{cases}$$

Si impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(a) = p\frac{a^2}{2} + C_1 a + C_2 = c\\ u(b) = p\frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 = d \end{cases}$$

Dopo pochi passaggi algebrici si ricavano le costanti di integrazione C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{d + p\frac{b^2}{2} - c - p\frac{a^2}{2}}{(b - a)}\\ C_2 = c + \frac{pa^2}{2} - C_1 a \end{cases}$$

Carico Polinomiale

$$-u''(x) = 90x^8 + 56x^6 + 4$$
(1.29)
$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases}$$

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{cases} u' = -90\frac{x^9}{9} - 56\frac{x^7}{7} - 4x + C_1\\ u = -x^{10} - x^8 - 2x^2 + C_1x + C_2 \end{cases}$$

Si impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(a) = -a^{10} - a^8 - 2a^2 + C_1a + C_2 = a \\ u(b) = -b^{10} - b^8 - 2b^2 + C_1b + C_2 = d \end{cases}$$

Dopo pochi passaggi algebrici si ricavano le costanti di integrazione ${\cal C}_1$ e ${\cal C}_2:$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{a^{10} + a^8 + 2a^2 - b^{10} - b^8 + 2b^2 + d - c}{(b - a)}\\ C_2 = c + a^{10} + a^8 + 2a^2 - C_1 a \end{cases}$$

Carico Sinusoidale

$$-u''(x) = 64sin(8x)$$

$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases}$$

$$(1.30)$$

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{cases} u' = 8\cos(8x) + C_1 \\ u = \sin(8x) + C_1x + C_2 \end{cases}$$

Si impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(a) = \sin(8a) + C_1 a + C_2 = c \\ u(b) = \sin(8b) + C_1 b + C_2 = d \end{cases}$$

Dopo pochi passaggi algebrici si ricavano le costanti di integrazione C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{c - d + \sin(8b) - \sin(8a)}{(a - b)} \\ C_2 = c - \sin(8a) - C_1a \end{cases}$$

Carico esponenziale

Si consideri la seguente equazione differenziale con le relative condizioni al contorno:

$$-u''(x) = e^x$$

$$\begin{cases} u(a) = c \\ u(b) = d \end{cases}$$
(1.31)

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{cases} u' = -e^x + C_1 \\ u = -e^x + C_1 x + C_2 \end{cases}$$

Si impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(a) = -e^a + C_1 a + C_2 = c \\ u(b) = -e^b + C_1 b + C_2 = d \end{cases}$$

Dopo pochi passaggi algebrici si ricavano le costanti di integrazione C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{c - d + e^a - e^b}{a - b} \\ C_2 = c + e^a - C_1 a \end{cases}$$

1.3 Problema ellittico in 2D

L'obiettivo di questo paragrafo è la discretizzazione di problemi ellittici in diversi spazi dimensionali attraverso il metodo ai volumi finiti. Il caso 1-D studiato in precedenza è facilmente generalizzabile per mesh non uniformi rettangolari o a parallelepipedo. Comunque, per forme generiche dei volumi di controllo, la definizione dello schema (e la dimostrazione della convergenza) richiede delle assunzioni che definiscono una mesh ammissibile. Saranno prese in considerazione solo le condizioni al contorno di Dirichlet. La convergenza dello schema può essere dimostrata senza delle assunzioni sulla regolarità della soluzione esatta; i risultati possono essere generalizzati, sotto adeguate ipotesi, per le equazioni non lineari. In entrambi i casi di Dirichlet e Neumann, si può dimostrare una stima dell'errore tra la soluzione approssimata ai volumi finiti e la soluzione regolare esatta per i problemi continui in $\mathbb{C}^2 \in \mathbb{H}^2$. I risultati possono essere generalizzati per il caso di coefficienti di diffusione matriciali e su condizioni al contorno più generali.

Si consideri la seguente equazione ellittica con la condizione al contorno di Dirichlet:

$$-\Delta u(x) + div(vu)(x) + bu(x) = f(x)$$

$$u(x) = g(x), x \in \partial \Omega$$
(1.32)

1.3.1 Equazione di Poisson

Se Ω è un rettangolo (d = 2) o un parallelepipedo (d = 3), può essere allora discretizzato con volumi di controllo rettangolari o prismatici. In questo caso, lo schema monodimensionale può essere facilmente generalizzato. Si consideri per esempio il caso per d = 2, posto $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ed $f \in \mathbb{C}^2$ (il caso 3D è similare). Si consideri il problema (1.32) assumendo che b = 0, v = 0 e g = 0. Il problema si riduce a un'equazione puramente di diffusione chiamata di *Poisson*:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in (\Omega)$$

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \partial \Omega$$
 (1.33)

Per facilitare la comprensione dei paragrafi a seguire è utile assegnare all'equazione (1.33) un corrispondente problema fisico. In questo caso si è pensato il problema (1.33) corrispondente ad una membrana pretesa di spessore molto più piccolo rispetto ai due lati del dominio rettangolare Ω , caricata da un f(x, y) qualunque perpendicolare al piano della membrana stessa. Di conseguenza il campo incognito u sarà rappresentato dagli spostamenti in direzione z dei baricentri dei volumi finiti. I gradi di libertà non vincolati saranno in numero pari al numero dei volumi finiti, perchè il bordo sarà assunto essere incastrato su tutti i quattro lati.

1.3.2 Schema numerico ai volumi finiti in 2D

La discretizzazione T consisterà nel suddividere il dominio considerato Ω ovvero $[a, b] \times [c, d]$ in $K_{i,j}$ volumi finiti con $i = 1, ..., N_1$ e $j = 1, ..., N_2$. In particolare il volume di controllo $K_{i,j}$ sarà definito come segue:

$$K_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}]$$
(1.34)
con $x_i \ i = 0, ..., N_1 + 1 \ e \ y_i \ , \ j = 0, ..., N_2 + 1 \ tali \ che:$

$$\begin{aligned} x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} & per \quad i = 1, ..., N_1 \quad con \quad x_0 = 0 \quad e \quad x_{N_1+1} = 1 \\ y_{i-\frac{1}{2}} < y_i < y_{i+\frac{1}{2}} & per \quad j = 1, ..., N_2 \quad con \quad y_0 = 0 \quad e \quad y_{N_2+1} = 1 \end{aligned}$$
(1.35)

Dato $x_{i,j}$ per $i = 1, ..., N_1$ e $j = 1, ..., N_2$, la dimensione del volume finito nelle due direzioni di riferimento x e y sono definite nel seguente modo:

$$\begin{aligned} h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i \quad i = 0, ..., N_1 \\ h_i &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$
 (1.36)

$$k_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j \quad j = 0, ..., N_2$$

$$k_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$$
(1.37)

1.3. PROBLEMA ELLITTICO IN 2D

Come nel caso 1D, lo schema ai volumi finiti è basato sull'integrazione della (1.33) su ogni volume di controllo $K_{i,j}$. Per integrare il *Laplaciano* di u si inizia dal *teorema di Green* in due dimensioni nel caso più generale possibile:

$$\iint_{\Omega} (\nabla \varphi, \nabla \psi) \, dx + \iint_{\Omega} (\psi \Delta \varphi) \, dx = \int_{C} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial m} \, dS \tag{1.38}$$

Tale formulazione è applicabile direttamante al Δu ma per semplicità di calcolo si è deciso di scinderlo nella formula classica ovvero:

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -(u_{xx} + u_{yy}) \tag{1.39}$$

Particolarizzando (1.38) per il caso in esame (t = 1) e per la proprietà additiva degli integrali è possibile integrare singolarmente le due componenti ottenendo:

$$\iint_{\Omega} F_{,x} t \, d\Omega = -\iint_{\Omega} Ft_{,x} \, d\Omega + \int_{C} Ftn_{x} \, dS \tag{1.40}$$

$$-\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} t\right) d\Omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x}\right) d\Omega - \int_{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} t n_x\right) dS \qquad (1.41)$$

Tenendo presente che n_x rappresenta la normale uscente dal contorno C, si avrà che:

$$\begin{aligned} x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \mathbf{n}_x = 0 \\ y_{i-\frac{1}{2}} < y_i < y_{i+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \mathbf{n}_x = 1 \\ x_{i+\frac{1}{2}} < x_i < x_{i-\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \mathbf{n}_x = 0 \\ y_{i+\frac{1}{2}} < y_i < y_{i-\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \mathbf{n}_x = -1 \end{aligned}$$
(1.42)

Quindi il primo contributo di (1.41) si annulla sempre perchè $t_{,x}$ sarà sempre zero. Sarà da calcolare solamente il termine sul contorno che da come risultato:

$$-\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot t\right) \, d\Omega = -\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \, dy + \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} u_x(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \, dy$$
(1.43)

In definitiva applicando il procedimento analogo alla seconda componente dell'operatore laplaciano si ottiene:

$$-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \, dy + \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} u_x(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \, dy + \\ +\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_y(x, y_{i-\frac{1}{2}}) \, dx - \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} u_y(x, y_{j+\frac{1}{2}}) \, dx = \int_{K_{i,j}} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$(1.44)$$

I flussi sono approssimati attraverso i quozienti differenziali definiti in maniera analoga all'1D . Quindi lo schema numerico definitivo risulta essere il seguente:

$$D_{i+\frac{1}{2},j} - D_{i-\frac{1}{2},j} + D_{i,j+\frac{1}{2}} - D_{i,j-\frac{1}{2}} = \int_{K_{i,j}} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$\forall (i,j) \in 1, \dots, N_1 \times 1, \dots, N_2$$

$$(1.45)$$

dove $h_{i,j} = h_i \times k_j$ è l'area del volume finito.

$$D_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}); \qquad D_{i-\frac{1}{2},j} = -\frac{k_j}{h_{i-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i-1,j})$$

$$D_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}); \qquad D_{i,j-\frac{1}{2}} = -\frac{h_i}{k_{j-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1})$$
(1.46)

Dove le posizioni partendo rispettivamente dal termine in alto a sinistra varrano per $i = 0, ..., N_1$ e $j = 1, ..., N_2$, per $i = 1, ..., N_1$ e $j = 1, ..., N_2$, per $i = 1, ..., N_1$ e $j = 1, ..., N_2$, per $i = 1, ..., N_1$ e $j = 0, ..., N_2$, i = 1, ..., N_1 e $j = 1, ..., N_2$.

$$u_{0,j} = u_{N_1+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N_1 \quad j = 1, \dots, N_2 \quad (1.47)$$

Esplicitando la (1.45) attraverso l'utilizzo della (1.46) e dividendo ambo i membri per l'area del volume finito si ottiene la generica equazione (i, j):

$$\frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{k_j}{h_{i-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) \\
+ \frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{h_i}{k_{j-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right) = \frac{1}{h_{i,j}} \int_{K_{i,j}} f(x, y) \, dx \, dy \tag{1.48}$$

Tenendo presente che $F_{i,j}$ è il valore medio di f su $K_{i,j}$ l'equazione si può esprimere come:

$$\frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{k_j}{h_{i-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) + \frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{h_i}{k_{j-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right) = F_{i,j}$$
(1.49)

dove evidentemente si è posto $F_{i,j}$, in modo del tutto analogo al caso monodimensionale, come

$$F_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}} \int_{K_{i,j}} f(x,y) \, dx \, dy \tag{1.50}$$

Quindi riassumendo tutti i passaggi in maniera molto compatta si trova ancora la forma già nota dal caso 1D:

$$Ku = F \tag{1.51}$$

con $u=(u_1,...,u_{N_1N_2})^t$ e $F_{gl}=(F_1,,...,F_{N_1N_2})^t$ e con K_{gl} e F_{gl} definiti attraverso le seguenti posizioni

$$(Ku)_{ij} = \frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{k_j}{h_{i-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) + \frac{1}{h_{i,j}} \left(-\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \frac{h_i}{k_{j-\frac{1}{2}}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) \right); \quad (1.52)$$
$$F_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j}} \int_{K_{i,j}} f(x, y) \, dx \, dy$$

1.3.3 Costruzione della matrice di rigidezza

Per capire come implementare in Matlab il sistema algebrico (1.51) è necessario definire in maniera esatta la matrice di rigidezza K. In particolare si è studiato per esempio un dominio Ω con mesh da 12 elementi. Scrivendo in maniera esplicita parte delle equazioni afferenti a questa mesh si è ricostruito un algoritmo per l'assemblaggio della matrice di rigidezza. E' ovvio che tale metodo è uno dei tanti possibili. In particolare si è notato che il contributo dato dal singolo volume finito alla matrice di rigidezza varia a seconda che il volume finito (i, j) sia ubicato negli spigoli nella mesh $i = 1, N_1$ $j = 1, N_2$, nelle posizioni di bordo della mesh $i = 1, N_1$ $j = 2, ..., N_2 - 1$ (oppure $j = 1, N_2$ $i = 2, ..., N_1 - 1$) piuttosto che nelle righe o colonne intermedie $1 < i < N_1$ $1 < j < N_2 - 1$. Il criterio comune a tutti i volumi finiti è comunque quello già emerso nel caso 1D ovvero che l'elemento i prende in conto il grado di libertà dell'elemento i - 1, quello dell'elemento stesso e quello dell'elemento i + 1.

Nel caso 2D si conserva questo principio, quindi i gradi di libertà coinvolti per l'elemento (i, j) sarebbero complessivamente sei. Il condizionale è d'obbligo perchè il grado di libertà (i, j) è comune nelle due direzioni richiamate nell'equazione (i, j), quindi i gdl effettivi si riducono a cinque.

Per la prima riga succede che passando da un elemento all'altro considerando un *loop* che procede per righe, in x il volume finito (i, j) vede tre gradi di libertà (i-1, j), $(i, j) \in (i+1, j)$, mentre i gdl in y sono (i, j-1), $(i, j) \in$ (i, j+1). Passando nella seconda riga e in generale per $1 < j < N_2 - 1$ si riparte con i gradi di libertà in x che variano secondo il criterio precedente mentre in y si prendono in considerazione gli ultimi due gdl dell'elemento sottostante più quello dell'elemento seguente. I gradi di libertà in y si possono esprimere in funzione del numero di partizioni lungo x N1. Per la riga $j = N_2$ il ragionamento è uguale alla prima riga. Per la prima e l'ultima riga negli estremi è necessario ricordarsi che il rapporto differenziale è definito su una lunghezza che $h_i/2$ o $k_j/2$.

Riassumendo a titolo di esempio si esplicita (1.51) per i = j = 1, i = j = 3 e $i = 3, j = N_2$ e per mesh da $N_1 = 4$ e $N_2 = 3$:

$$\frac{1}{h_{1,1}} \left(-\frac{k_1}{h_{\frac{3}{2}}} (u_{2,1} - u_{1,1}) + \frac{k_1}{h_{\frac{1}{2}}} (u_{1,1} - u_{0,1}) \right) + \frac{1}{h_{1,1}} \left(-\frac{h_1}{k_{\frac{3}{2}}} (u_{1,2} - u_{1,1}) + \frac{h_1}{k_{\frac{1}{2}}} (u_{1,1} - u_{1,0}) \right) = F_{1,1}$$
(1.53)

$$\frac{1}{h_{3,3}} \left(-\frac{k_3}{h_{\frac{7}{2}}} (u_{4,3} - u_{3,3}) + \frac{k_3}{h_{\frac{5}{2}}} (u_{3,3} - u_{2,3}) \right) + \frac{1}{h_{3,3}} \left(-\frac{h_3}{k_{\frac{7}{2}}} (u_{3,4} - u_{3,3}) + \frac{h_3}{k_{\frac{5}{2}}} (u_{3,3} - u_{3,2}) \right) = F_{3,3}$$
(1.54)

$$\frac{1}{h_{4,3}} \left(-\frac{k_3}{h_{\frac{9}{2}}} (u_{5,3} - u_{4,3}) + \frac{k_3}{h_{\frac{7}{2}}} (u_{4,3} - u_{3,3}) \right) + \frac{1}{h_{4,3}} \left(-\frac{h_3}{k_{\frac{7}{2}}} (u_{4,4} - u_{4,3}) + \frac{h_3}{k_{\frac{5}{2}}} (u_{4,3} - u_{4,2}) \right) = F_{4,3}$$
(1.55)

Per semplicità si ipotizza una discretizzazione uniforme ovvero:

$$\begin{aligned} h_{i+\frac{1}{2}} &= h & i = 1, ..., N_1 - 1 \\ k_{j+\frac{1}{2}} &= k & j = 1, ..., N_2 - 1 \end{aligned}$$
 (1.56)

Sostituendo nella (1.53), nella (1.54) e nella (1.55) l'equazione (1.56) si ottengono le seguenti espressioni:

$$\frac{1}{hk} \left(-\frac{k}{h} (u_{2,1} - u_{1,1}) + \frac{k}{h/2} (u_{1,1} - u_{0,1}) \right) + \frac{1}{hk} \left(-\frac{h}{k} (u_{1,2} - u_{1,1}) + \frac{h}{k/2} (u_{1,1} - u_{1,0}) \right) = F_{1,1}$$
(1.57)

$$\frac{1}{hk} \left(-\frac{k}{h} (u_{4,3} - u_{3,3}) + \frac{k}{h} (u_{3,3} - u_{2,3}) \right) + \frac{1}{hk} \left(-\frac{h}{k/2} (u_{3,4} - u_{3,3}) + \frac{h}{k} (u_{3,3} - u_{3,2}) \right) = F_{3,3}$$
(1.58)

$$\frac{1}{hk} \left(-\frac{k}{h/2} (u_{5,3} - u_{4,3}) + \frac{k}{h} (u_{4,3} - u_{3,3}) \right) + \frac{1}{hk} \left(-\frac{h}{k/2} (u_{4,4} - u_{4,3}) + \frac{h}{k} (u_{4,3} - u_{4,2}) \right) = F_{4,3}$$
(1.59)

Dopo pochi e semplici passaggi e tenendo presente che i gdl (i, j) sono in comune tra la direzione $x \in y$ si arriva a determinare l'espressione che poi si implementa in Matlab:

$$-\frac{2}{h^2}u_{0,1} + 3\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)u_{1,1} - \frac{1}{h^2}u_{2,1} - \frac{2}{k^2}u_{1,0} - \frac{1}{k^2}u_{1,2}$$
(1.60)

$$-\frac{1}{h^2}u_{2,3} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{3}{k^2}\right)u_{3,3} - \frac{1}{h^2}u_{4,3} - \frac{1}{k^2}u_{3,2} - \frac{2}{k^2}u_{4,4}$$
(1.61)

$$-\frac{1}{h^2}u_{3,3} + 3\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)u_{4,3} - \frac{2}{h^2}u_{5,3} - \frac{1}{k^2}u_{4,2} - \frac{2}{k^2}u_{4,4}$$
(1.62)

Per rendere più operativa l'implementazione in un codice di calcolo si è pensata la matrice globale K^{gl} composta da tre tipologie di contributi:

- sottomatrice k_{ll} riga j = 1 colonne $i = 1, ..., N_1$;
- sottomatrice k_{mm} righe $2 < j < N_2 1$ colonne $i = 1, ..., N_1$;
- sottomatrice k_{hh} riga $j = N_2$ colonne $i = 1, ..., N_1$.

Col programma realizzato è possibile incastrare tutti e quattro i lati o a due a due. La matrice di rigidezza globale per come è stata implementata avrà dimensione funzione del numero dei gradi di libertà coinvolti dal volume finito e del numero di partizioni lungo x (= N_1) ed y (= N_2), ovvero K_{gl} = [n fv, ngdl] e il vettore delle incognite globale sarà di conseguenza u_{gl} = [ngdl, 1] e il vettore dei termini noti $F_{gl} = [n fv, 1]$.

Le matrici sopra citate, assemblate adeguatamente per calcolare K_{gl} , sono le seguenti:

$$k_{1}^{ll} = 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0\\ -2k_{j}/h_{i} & (3k_{j}/h_{i} + 3h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i}\\ 0 & -2h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix}$$
$$k_{2}^{ll} = 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0\\ -k_{j}/h_{i} & (2k_{j}/h_{i} + 3h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i}\\ 0 & -2h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{split} k_{3}^{ll} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \\ -k_{j}/h_{i} & (3\,k_{j}/h_{i} + 3\,h_{i}/k_{j}) & -2\,k_{j}/h_{i} \\ 0 & -2\,h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{1}^{mm} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \\ -2\,k_{j}/h_{i} & (3\,k_{j}/h_{i} + 2\,h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{2}^{mm} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \\ -k_{j}/h_{i} & (2\,k_{j}/h_{i} + 2\,h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{3}^{mm} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \\ -k_{j}/h_{i} & (3\,k_{j}/h_{i} + 2\,h_{i}/k_{j}) & -2\,k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{1}^{hh} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -2\,h_{i}/k_{j} & 0 \\ -2\,k_{j}/h_{i} & (3\,k_{j}/h_{i} + 3\,h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{2}^{hh} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -2\,h_{i}/k_{j} & 0 \\ -k_{j}/h_{i} & (2\,k_{j}/h_{i} + 3\,h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \\ k_{3}^{hh} &= 1/H_{ij} \begin{bmatrix} 0 & -2\,h_{i}/k_{j} & 0 \\ -k_{j}/h_{i} & (3\,k_{j}/h_{i} + 3\,h_{i}/k_{j}) & -k_{j}/h_{i} \\ 0 & -h_{i}/k_{j} & 0 \end{bmatrix} \end{split}$$

E il vettore delle incognite u finale togliendo tutti gli zeri è il seguente: $u = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{ngdl-1}, u_{ngdl}]^t$

Per quanto riguarda il carico F_{gl} sarà un vettore colonna con tante righe quanti sono i volumi finiti della mesh. Per calcolare il contributo sul volume generico (i, j) è sufficiente utilizzare una qualsiasi formula di quadratura che nel caso in esame sarà quella dei trapezi.

1.3.4 Tipologie di carico

Al fine di rapportare i risultati delle analisi dell'equazione di Dirichlet con i risultati dei vari metodi si è deciso di prendere in considerazione diverse tipologie di carico. Per rapportare si intende il confronto e la successiva stima dell'errore dei metodi rispetto alla soluzione esatta. In particolare i carichi analizzati saranno di tipo polinomiale, armonico ed esponenziale.

A differenza del caso 1D non si è tenuto conto del carico costante. Questo perchè risulta di difficile valutazione una funzione carico p(x, y) = costche produca una funzione spostamento che si annulli su tutta la frontiera del dominio Ω . Nei paragrafi successivi verrà presentata la soluzione analitica. Se si vuole integrare direttamente l'equazione di Poisson il procedimento è più complesso rispetto al caso 1D perchè ci si troverà di fronte ad un'equazione differenziale alle derivate parziali. In particolare questa specifica equazione differenziale prende il nome di equazione di Poisson. L'integrazione diretta comunque non porterà mai ad una soluzione esatta perchè si basa su un'espansione in serie che ha un numero finito di elementi stabilito dall'utente. Si consideri a tal fine un dominio rettangolare con $0 \le x \le a$ e $0 \le y \le b$ e con le seguenti condizioni al contorno:

$$w = f_1(y) \quad in \quad x = 0, \qquad w = f_2(y) \quad in \quad x = a, w = f_3(y) \quad in \quad y = 0, \qquad w = f_4(y) \quad in \quad x = b.$$
(1.63)

La soluzione è data dall'equazione (1.64).

$$w(x,y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(\xi,\eta) G(x,y,\xi,\eta) d\eta d\xi + \int_0^b f_1(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta) \right]_{\xi=0} d\eta - \int_0^b f_2(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(x,y,\xi,\eta) \right]_{\xi=a} d\eta + \int_0^a f_3(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta) \right]_{\eta=0} d\xi - \int_0^a f_4(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} G(x,y,\xi,\eta) \right]_{\eta=b} d\xi (1.64)$$

Per la funzione di *Green* si possono utilizzare due forme di rappresentazione ((1.65)).

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(p_n x) \sin(p_n \xi)}{p_n \sinh(p_n b)} H_n(y, \eta)$$

$$= \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(q_m y) \sin(q_m \eta)}{q_m \sinh(q_m a)} Q_m(x, \xi)$$
(1.65)

dove

$$p_n = \frac{\pi n}{a}$$

$$q_m = \frac{\pi m}{b}$$
(1.66)

е

$$H_n(y,\eta) = \begin{cases} \sinh(p_n\eta)\sinh[(p_n(b-y)] & per \quad b \ge y > \eta \ge 0\\ \sinh(p_ny)\sinh[(p_n(b-\eta)] & per \quad b \ge \eta > y \ge 0 \end{cases}$$
$$Q_m(x,\xi) = \begin{cases} \sinh(q_m\xi)\sinh[(q_m(a-x)] & per \quad a \ge x > \xi \ge 0\\ \sinh(q_mx)\sinh[(q_m(a-\xi)] & per \quad a \ge \xi > x \ge 0 \end{cases}$$

Il metodo più rapido e funzionale per ricavare la soluzione analitica si basa sull'ipotizzare una u(x, y) che rispetti le condizioni al bordo di Dirichlet $(u(x, y) = 0 \quad su \quad \partial \Omega)$. Significa che i punti in cui la funzione spostamento in direzione z si deve annullare sono sempre $x = a, x = b, y = c \in y = d$.

Carico polinomiale A

Si ipotizzi la seguente soluzione dell'equazione di Poisson che rispetta le condizioni di spostamento nullo su tutto $\partial\Omega$

$$u(x,y) = (x-a)(x-b)(y-c)(y-d)$$
(1.67)

A questo punto si calcola la derivata seconda di u rispetto a x e la derivata seconda di u rispetto a y e si sommano al fine di ricavare la forma della funzione carico

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-c)(y-d)(2x-a-b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(y-c)(y-d)$$
(1.68)

Quindi il carico p(x, y) assumerà la seguente espressione

$$p(x,y) = -2\left((y-c)\left(y-d\right) + (x-a)\left(x-b\right)\right)$$
(1.69)

Carico polinomiale B

Si ipotizzi la seguente soluzione dell'equazione di Poisson che rispetta le condizioni di spostamento nullo su tutto $\partial \Omega$

$$u(x,y) = (x-a)^2 (x-b)^3 (y-c) (y-d)^4$$
(1.70)

A questo punto si calcola la derivata seconda di u rispetto a x e la derivata seconda di u rispetto a y e si sommano al fine di ricavare la forma della funzione carico.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-c)(y-d)^4 \left(2(x-a)(x-b)^3 + 3(x-a)^2(x-b)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y-c)(y-d)^4 \left(12(x-b)^3 + 12(x-a)(x-b)^2 + 6(x-a)^2(x-b)\right)$$

(1.71)

Quindi il carico p(x, y) assumerà la seguente espressione

$$p(x,y) = (y-c) (y-d)^4 (2(x-b)^3 + 12(x-a)(x-b)^2 + 6(x-a)^2(x-b)) + (x-a)^2 (x-b)^3 (8(y-d)^3 + 12(y-c)(y-d)^2))$$
(1.72)

Carico armonico A

Il primo semplice test con un carico armonico sarà affidato alla seguente funzione che dovrà però essere valutata in [-1 1] per far si che si annulli sul bordo.

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \tag{1.73}$$

Facendo le opportune derivate si ottiene un carico simmetrico da applicare alla membrana.

$$p(x,y) = -2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) \tag{1.74}$$

Carico armonico B

Si ipotizzi la seguente soluzione dell'equazione di Poisson che rispetta le condizioni di spostamento nullo su tutto $\partial \Omega$

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{c}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2d}\right) = \operatorname{arm}(x)\operatorname{arm}(y)$$
(1.75)

In cui si è posto che (e sarà analogo per arm(x))

$$arm(y) = sin\left(\frac{\pi y}{c}\right) cos\left(\frac{\pi y}{2d}\right)$$
 (1.76)

A questo punto si calcola la derivata seconda di u rispetto a x e la derivata seconda di u rispetto a y e si sommano al fine di ricavare la forma della funzione carico.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) - \frac{\pi}{2b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\right) arm(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\left(-\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{4b^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) - \frac{\pi^2}{ab}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right)\right) arm(y)$$
(1.77)

Quindi il carico p(x, y) assumerà la seguente espressione:

$$p(x,y) = \left(\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{4b^2}\right) arm(x) + \frac{\pi^2}{ab} cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right) \right) arm(y) + \left(\left(\frac{\pi^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{4d^2}\right) arm(y) + \frac{\pi^2}{cd} cos\left(\frac{\pi y}{c}\right) sin\left(\frac{\pi y}{2d}\right) \right) arm(x)$$
(1.78)

Carico esponenziale A

Si ipotizzi la seguente soluzione dell'equazione di Poisson che rispetta le condizioni di spostamento nullo su tutto $\partial\Omega$

$$u(x,y) = (x-a) (x-b) (y-c) (y-d) e^{0.5xy+0.5y} = pol(x) pol(y) e^{0.5xy+0.5y}$$
(1.79)

In cui si è posto che

$$pol(x) = (x - a) (x - b)$$

$$pol(y) = (y - c) (y - d)$$
(1.80)

A questo punto si calcola la derivata seconda di u rispetto a x e la derivata seconda di u rispetto a y e si sommano al fine di ricavare la forma della funzione carico.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x - (a + b)) e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y) + \operatorname{pol}(x) 0.5y e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y)
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y) + 2(2x - a - b) 0.5y e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y)
+ \operatorname{pol}(x) \operatorname{pol}(y) 0.25y^2 e^{0.5xy + 0.5y}$$
(1.81)

Quindi il carico p(x, y) assumerà la seguente espressione:

$$p(x,y) = -(e^{0.5xy+0.5y} \operatorname{pol}(y) (2 + (2x - a - b) y + \operatorname{pol}(x) 0.25y^2) + e^{0.5xy+0.5y} \operatorname{pol}(x) (2 + (2y - c - d) (x + 0.5) + \operatorname{pol}(y) (0.5x + 0.5)^2))$$
(1.82)

Carico esponenziale B

Si ipotizzi la seguente soluzione dell'equazione di Poisson che rispetta le condizioni di spostamento nullo su tutto $\partial\Omega$.

$$u(x,y) = (x-a)(x-b)(y-c)(y-d)e^{5xy+3y} = pol(x)pol(y)e^{5xy+3y}$$
(1.83)

In cui si è posto che

$$pol(x) = (x - a) (x - b)$$

 $pol(y) = (y - c) (y - d)$
(1.84)

A questo punto si calcola la derivata seconda di u rispetto a x e la derivata seconda di u rispetto a y e si sommano al fine di ricavare la forma della funzione carico.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x - (a + b)) e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y) + \operatorname{pol}(x) 0.5y e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y)
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y) + 2 (2x - a - b) 0.5y e^{0.5xy + 0.5y} \operatorname{pol}(y)
+ \operatorname{pol}(x) \operatorname{pol}(y) 0.25y^2 e^{0.5xy + 0.5y}$$
(1.85)

Quindi il carico p(x, y) assumerà la seguente espressione

$$p(x,y) = -(e^{5xy+3y} \operatorname{pol}(y) (2 + (2x - a - b) y + \operatorname{pol}(x) 25y^2) + e^{5xy+3y} \operatorname{pol}(x) (2 + (2y - c - d) (10x + 6) + \operatorname{pol}(y) (10x + 6)^2)) (1.86)$$

1.4 Condizioni al contorno

Nel calcolatore le condizioni al contorno si impostano nel modo seguente. La matrice di rigidezza viene assemblata come se ai bordi non fosse imposta nessuna condizione. Nel programma realizzato non è stato fatto ciò per il semplice motivo che si è sempre ipotizzato valori nulli di spostamento su tutti i lati. Detto questo nella matrice assemblata si distinguono quattro sottomatrici, denominate k_{ll} , k_{lv} , k_{vl} e k_{vv} . La seconda e la terza sottomatrice sono risultate in questo caso nulle. La terminologia utilizzata sta ad indicare che si è fatta una distinzione tra le incognite libere e quelle vincolate. Il sistema lineare partizionato a blocchi risulta essere quello sotto.

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{ll} \\ f_{vv} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} k_{ll} & k_{lv} \\ k_{vl} & k_{vv} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{ll} \\ u_{vv} \end{array} \right\}$$
(1.87)

Si notano altri due termini f_{ll} e f_{vv} che stanno ad indicare rispettivamente il valore che il carico assume sull'area di ciascun volume finito (vettore noto) e il valore delle reazioni vincolari sui bordi della membrana (vettore incognito). Il procedimento adottato comunemente per le differenze finite e adatto anche per i volumi finiti è di scindere il problema globale in due sottosistemi, in cui ci sarà da trovare una volta il campo di spostamenti nodali u_{ll} e una volta le reazioni vincolari f_{vv} . Facendo riferimento al problema algebrico descritto sopra, si scrivono le due equazioni necessarie per la risoluzione.

$$k_{ll} \, u_{ll} = f_{ll} - k_{lv} \, u_{vv} \tag{1.88}$$

$$k_{vl} \, u_{ll} + k_{vv} \, u_{vv} = f_{vv} \tag{1.89}$$

Da cui si ricavano le incognite desiderate.

$$\begin{cases} u_{ll} = k_{ll}^{-1} (f_{ll} - k_{lv} \, u_{vv}) \\ f_{vv} = k_{vl} \, u_{ll} + k_{vv} \, u_{vv} \end{cases}$$

Tale procedimento essendo il medesimo per le differenze finite non sarà ripreso nel relativo capitolo.
Capitolo 2 Metodo agli Elementi Finiti

2.1 Introduzione

Quando si devono studiare sistemi continui tra i quali le strutture o gli organi delle macchine, nella maggior parte dei casi di interesse pratico la forma geometrica e le condizioni al contorno sono troppo complesse per poter applicare procedimenti analitici: per analisi sia statiche sia dinamiche si deve allora fare ricorso ad altri metodi, per lo più basati sull'uso del calcolatore. Tra tali metodi, ampiamente impiegato è quello degli elementi finiti, che considera il sistema continuo costituito da elementi finiti, cioè di dimensioni finite, anziché di dimensioni infinitesime, come nel caso dei metodi analitici. Il metodo degli elementi finiti (MEF, o FEM) è strettamente collegato con il metodo di Rayleigh- Ritz, del quale anzi si può considerare, in senso lato, una versione a tratti. Infatti, mentre nel metodo di Rayleigh-Ritz la deformata dell'intera struttura è approssimata mediante una somma di funzioni, il metodo degli elementi finiti impiega molte di tali funzioni, ciascuna relativa ad una parte della struttura stessa. In altre parole il metodo degli elementi finiti suddivide la struttura in tante parti e applica a ciascuna il metodo di Rayleigh-Ritz. L'idea di definire non un'unica funzione per l'intera struttura, ma una funzione per ciascun tratto della struttura stessa, permette di applicare il metodo a strutture anche molto complesse, adottando peraltro funzioni di forma molto semplici. Il principio è che se le funzioni di forma assunte per i vari elementi sono scelte opportunamente, la soluzione può convergere a quella esatta per l'intera struttura al diminuire delle dimensioni degli elementi finiti. Durante il processo di risoluzione, vengono soddisfatti l'equilibrio e la congruenza degli spostamenti ai nodi, così che l'intera struttura si comporta come un'unica entità.

2.2 Problema ellittico 1D

Al fine di implementare e poi confrontare i risultati col FVM si presenta un breve riassunto del metodo numerico. L'equazione presa in considerazione è ovviamente la stessa già più volte richiamata nel capitolo precedente. Quindi data una generica equazione differenziale ordinaria che descrive un determinato problema fisico si vuole sviluppare un metodo agli elementi finiti che risolve in modo appropriato il corrispondente problema fisico. Si parte da una formulazione differenziale (strong formulation) per arrivare ad una formulazione integrale (weak formulation). Lo step successivo è quello di trasformare la forma integrale in un problema algebrico introducendo un'approssimazione dei campi con i quali si dovrà lavorare. L'ultimo passaggio sarà semplicemente la risoluzione del problema algebrico ottenuto.

$$-u''(x) = f(x)$$
(2.1)

Si intende con x la variabile indipendente che vive nel dominio $\Omega, u = u(x)$ rappresenta la funzione incognita. Si utilizzerà anche la virgola per indicare l'operazione di derivazione, quindi

$$u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{2.2}$$

Sono necessarie opportune condizioni al contorno per risolvere il problema assegnato. Verranno assegnate nei punti estremi del dominio differenziale (x = a, x = b)

$$u(a) = \bar{g}$$

$$u_{,x}(b) = \bar{h}$$
 (2.3)

con c e d costantiu assegnate. Si dovrà quindi risolvere l'equazione (2.2) in [a,b], ovvero per un f assegnato ricavare una funzione u che soddisfa l'equazione differenziale e che allo stesso tempo soddisfi le condizioni al bordo. Per ora il problema si imposta come un modello matematico astratto. E' un problema semplice perchè per risolverlo è sufficiente integrare due volte l'equazione (2.2), ma non è questo lo scopo. Prima di definire la soluzione approssimata con una tecnica numerica agli elementi finiti si può ragionare sul possibile significato fisico del problema in esame. L'equazione precedentemente data risolve un problema fisico ben noto, ovvero un corpo elastico monodimensionale soggetto a trazione. Oppure un altro esempio reale potrebbe essere un cavo soggetto ad un carico trasversale vincolato al bordo e con un tiro costante dall'altro lato. Il cavo considerato sarà quindi un cavo inflesso con piccola curvatura, un cavo che non ha rigidezza flessionale.

La formulazione forte del problema differenziale è la seguente.

Data $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e assegnate due costanti $h \in g$, trovare u = u(x) tale che:

$$u_{,xx} + f = 0$$

$$u(a) = \bar{g}$$

$$u_{,x} (b) = \bar{h}$$

(2.4)

2.2. PROBLEMA ELLITTICO 1D

Volendo risolvere la (2.4) mediante una tecnica numerica si parte applicando i passi già detti in precedenza. L'obiettivo è una forma integrale o debole equivalente alla (2.4). L'operazione fondamentale è quella di moltiplicare per una generica funzione peso $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ l'equazione (2.4) e integrare sul dominio il prodotto di funzioni così ottenuto sfruttando la proprietà additiva degli integrali:

$$w(u_{,xx}+f) = \int_{a}^{b} [w(u_{,xx}+f)] \, dx = \int_{a}^{b} [wu_{,xx}] \, dx + \int_{a}^{b} [wf] \, dx = 0 \quad (2.5)$$

Utilizzando il teorema della divergenza che in 1D si riduce ad un'integrazione per parti si ricava la seguente espressione:

$$\int_{a}^{b} [wu_{,xx}] dx = -\int_{a}^{b} [w_{,x} u_{,x}] dx + [wu_{,x}]_{a,b} =$$

$$= -\int_{a}^{b} [w_{,x} u_{,x}] dx + [wu_{,x}]_{x=b} - [wu_{,x}]_{x=a}$$
(2.6)

Quindi la formulazione debole finale imponendo w(a) = 0 e le (2.3) è la seguente

$$-\int_{a}^{b} [w_{,x} \, u_{,x}] \, dx = \int_{a}^{b} [wf] \, dx + w(l)\bar{h} \tag{2.7}$$

Il problema integrale è molto diverso dal problema differenziale per vari motivi. Non compare più nessuna condizione al bordo sulla derivata della funzione u. Nel problema differenziale si avevano due condizioni al bordo $u(a) \in u'(b)$, la condizione sulla derivata di u non compare più in modo esplicito, è contenuta nella formulazione del problema. Nel problema differenziale quindi è necessario imporre in modo esplicito la condizione sulla derivata di u, mentre nella formulazione integrale questa condizione non bisogna più imporla perchè è già contenuta nell'equazione Questo giustifica il fatto che per questa classe di problemi la condizione sulla derivata prima prende il nome di condizione al bordo *naturale*, perchè nella formulazione integrale non viene posta esplicitamente ma è già contenuta nella stessa. La condizione su u invece deve essere ancora garantita in modo esplicito $u(a) = \bar{g}$ e prende il nome di condizione al bordo essenziale perchè è richiesta in maniera esplicita. Compare inoltre nella formulazione debole una condizione sulla funzione peso w che è arbitraria. Un'altra osservazione è che la formulazione integrale ha un'interpretazione meccanica molto interessante, ovvero il Principio dei Lavori Virtuali. Facendo riferimento a questa interpretazione si può spiegare facilmente perchè si è assunto w(a) = 0. In questo contesto w rappresenta uno spostamento virtuale, le cui variazioni sono nulle laddove è stata assegnata la condizione al contorno essenziale $u(a) = \bar{q}$. Non ha quindi senso testare la configurazione di equilibrio rispetto a variazioni virtuali di quel punto perchè è già stato imposto uno spostamento di \bar{q} . Le variazioni sono nulle in corrispondenza del punto dove è stata assegnata la condizione al bordo essenziale.

2.2.1 Spazio delle funzioni C e H

Si cercherà ora di formulare meglio sia il problema differenziale che il problema integrale. In particolare è necessario definire in maniera appropriata le caratteristiche che si richiedono alle funzioni con le quali si sta lavorando. In particolare una funzione è di tipo \mathbb{H}^0 quando il quadrato è integrabile tra $a \in b$ ed è diverso da infinito

$$u \in \mathbb{H}^0[a,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^b |u^2| \, dx < \infty$$
 (2.8)

La lettera \mathbb{H} dovrebbe ricordare una funzione integrabile e proviene dal cognome del matematico tedesco *David Hilbert* inventore dell'omonimo spazio chiamato spazio a infinite dimensioni o *spazio di Hilbert*. Il numero zero come apice sta ad indicare di considerare la funzione originale. Se anche la derivata della funzione originaria è integrabile ed il relativo quadrato della funzione integranda è diverso da infinito allora la funzione appartiene ad \mathbb{H}^1

$$u \in \mathbb{H}^{1}[a, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{a}^{b} |u_{x}| \, dx < \infty$$
$$u \in \mathbb{H}^{2}[a, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{a}^{b} |u_{xx}| \, dx < \infty$$
$$(2.9)$$

Con un semplice ragionamento su alcune tipologie di funzioni continue e non si può dedurre che richiedere che una funzione appartenga allo spazio delle funzioni continue \mathbb{C}^0 è più restrittivo che richiedere che appartenga allo spazio di Hilbert \mathbb{H}^0 . In prima approssimazione si può affermare che richiedere che una funzione appartenga allo spazio \mathbb{C}^0 è circa equivalente a richiedere che appartenga ad \mathbb{H}^1

Alla luce di quanto detto in questo paragrafo si cerca di definire meglio i requisiti sulle formulazioni viste fino ad ora. Per porre il problema in maniera univoca bisogna lavorare con funzioni di forma per le quali è possibile calcolare la derivata seconda se si prende in considerazione la formulazione forte. La formulazione debole invece lavora oltre che con la funzione incognita u anche con una funzione arbitraria w. In ogni punto si richiede di potere calcolare la derivata prima e la derivata deve essere integrabile, quindi

$$u \in U = \{ u | u \in \mathbb{H}^{1}[a, b], u(a) = \bar{g} \}$$

$$w \in W = \{ w | w \in \mathbb{H}^{1}[a, b], w(a) = 0 \}$$
(2.10)

Questi ultimi sono gli spazi ricorrenti nella formulazione debole. La prima conclusione è quindi che la condizione \mathbb{C}^2 è più restrittiva della condizione \mathbb{H}^1 , quindi nella formulzione debole le condizioni che si richiedono sulle funzioni con le quali si lavora sono più deboli per questo è chiamata formulazione *weak*.

2.2.2 Formulazione dello schema numerico con FEM

A questo punto è utile introdurre un cambiamento di notazione, si pongano i termini del problema (2.7) nel seguente modo:

$$\int_{a}^{b} [w_{,x} u_{,x}] dx = a(w, u)$$

$$\int_{a}^{b} [wf] dx = (w, f)$$
(2.11)

Il primo termine riguarda dunque un operatore integro-differenziale su due funzioni mentre il secondo termine è semplicemente un integratore del prodotto di due funzioni.

Il problema si può quindi riformulare nella maniera seguente: Dati $f, \bar{g} \in \bar{h}$, trovare u tali che $\forall w$

$$a(w,u) = (w,f) + w(l)\bar{h} \qquad in \quad \Omega \tag{2.12}$$

E' una generalizzazione che permette di studiare molti problemi di elasticità. E' una struttura che si ritrova spesso, quindi è un'astrazione matematica utile. Una considerazione interessante è chiedersi che relazione c'è tra la formulazione *weak* e *strong*. La relazione è determinata dalla tipologia di carico che si sceglie di considerare. Infatti pur pescando le soluzioni da insiemi di funzioni diversi, in particolare \mathbb{H}^2 è più grande \mathbb{C}^1 , si dimostra che per carichi f non di forma qualsiasi (carico regolare), la soluzione del problema è in \mathbb{C}^2 anche se è iscritta a \mathbb{C}^1 . In definitiva si può dimostrare che le due formulazioni restituiscono la stessa soluzione. Il passo successivo a quanto visto fino ad ora è la *discretizzazione*, ovvero si cerca di cogliere la soluzione non più negli spazi visti in precedenza ma in spazi più gestibili. Ciò perchè la formulazione debole anche se è equivalente alla formulazione forte ancora lavora con spazi fatti nel seguente modo, di dimensione infinita anche se u(x) è monodimensionale. La base dello spazio considerato comprende dunque infiniti elementi. E' possibile utilizzare lo sviluppo in serie costituito da polinomi e tale sviluppo deve però comprendere infiniti termini, ciò significa che la soluzione u vive in uno spazio a dimensione infinita. E' complicato lavorare in uno spazio con queste caratteristiche perchè se si vuole caratterizzare u nella base a dimensione infinita bisogna stabilire quanto valgono le coordinate della funzione u rispetto a quella base, ovvero bisogna esplicitare gli infiniti termini. La praticità di questo spazio è praticamente nulla. A questo punto la soluzione per superare questo ostacolo è la *discretizzazione*. Discretizzare significa sostituire agli spazi funzionali $U \in W$ degli spazi $U^h \in V^h$ di dimensione finita, la cui base approssima in maniera adeguata $U \in W$. Per approximare si intende che se si considera un elemento appartenente a U^h farà anche parte di U perchè U^h è un suo sottoinsieme. E' possibile costruire sottoinsiemi U^h più o meno intelligenti, la definizione è affidata comunque all'operatore. L'apice h sta proprio ad indicare che storicamente lo spazio a dimensione finita U^h lo si costruisce introducendo una mesh o discretizzazione a n elementi di dimensione h. Se il problema è definito nell'intervallo [a, b] e si vuole definire una base per le funzioni definite in [a, b] spesso è conveniente suddividere l'intervallo in una serie di sottoelementi. Da cui il nome Metodo agli elementi finiti. E' chiaro che gli elementi possono avere dimensione diversa tra di loro , è consuetudine, se la mesh è uniforme, indicare la dimensione caratteristica con h. Il passaggio compiuto è enorme perchè in precedenza si lavorava con funzioni che vivevano in spazi a dimensione infinita e ora si è passati a lavorare con funzioni che vivono in spazi a dimensione finita. Si passa quindi da un problema infinito-dimensionale ad un problema finito-dimensionale. Dal punto di vista operativo è necessario capire come costruire U^h che deve essere contenuto in U. La nuova formulazione debole approssimata è semplicemente derivata da un metodo di lavoro che si basa su elementi finiti che vivono in questi spazi a dimensione finita.

Il nuovo problema è formulato come segue. Dati $f, \bar{g} \in \bar{h}$ trovare $u^h \in U^h$, tali che $\forall w^h \in W^h$:

$$a(w^{h}, u^{h}) = (w^{h}, f) + w^{h}(b)\bar{h}$$
 in Ω (2.13)

per cui

$$u \in U^{h} = \left\{ u | u \in \mathbb{H}^{1}[a, b], u^{h}(a) = \bar{g} \right\}$$

$$w \in W^{h} = \left\{ w | w \in \mathbb{H}^{1}[a, b], w^{h}(a) = 0 \right\}$$
(2.14)

Entrando nel dettaglio della costruzione di queste funzioni, un passaggio che spesso si compie è il seguente:

$$u^h = v^h + g^h \tag{2.15}$$

il ruolo di g^h è quello di soddisfare la condizione al bordo, ovvero $g^h(a) = \bar{g}$, di conseguenza per ottenere una somma che restituisce $u^h(a) = \bar{g}$ dovrà necessariamente essere $v^h(a) = 0$. Dati $f, \bar{g} \in \bar{h}$ trovare $u^h = v^h + g^h$ con $v^h \in W^h$ e $g^h(a)\bar{g}$, tali che $\forall w^h \in W^h$:

$$a(w^{h}, v^{h}) = (w^{h}, f) + w^{h}(b)\bar{h} - a(w^{h}, g^{h})$$
 in Ω (2.16)

Definita questa scomposizione si possono seguire due vie:

- $V^h = W^h$, metodo alla Bubnov-Galerkin;
- $V^h \neq W^h$ metodo alla *Petrov-Galerkin*.

2.2.3 Metodo alla Bubnov-Galerkin

Dovendo risolvere un problema di elasticità v^h verrà preso nel sacchetto W^h che è lo spazio delle funzioni peso. In parole semplici un metodo agli elementi finiti si dice alla Bubnov-Galerkin quando lo spazio nel quale si cerca la soluzione è uguale allo spazio delle funzioni test. Nei problemi

di elesticità si utilizza solitamente ilmetodo Bubnov-Galerkin perchè il metodo discreto che si ottiene è un metodo simmetrico, non dipende cioè dall'ordine delle funzioni sulle quali sta operando. I problemi di elasticità al continuo sono simmetrici ed è una proprietà da preservare, vista la migliore gestibilità, anche nel metodo discreto. Un problema elastico al continuo è simmetrico perchè discende da un'energia e quindi si basa su un principio energetico. Un operatore come $a(w^h, v^h)$ si dice simmetrico quando non riconosce l'ordine degli oggetti sui quali opera, cioè $a(w^h, v^h)=a(v^h, w^h)$. Con Bubnov-Galerkin si conserva nello schema numerico le proprietà del problema continuo.

2.2.4 Problema Algebrico

Per risolvere il problema mancano solamente due ingredienti, come costruire il sottospazio delle funzioni peso W^h e quindi la generica funzione peso e come è fatto g^h . La forma delle funzioni peso è scelta come combinazione lineare di funzioni note. Il secondo punto è banale perchè il suo unico scopo è quello di soddisfare una condizione al bordo $g^h(a) = \bar{g}$. Per essere operativi quindi sarà sufficiente definire la generica funzione peso v^h . In sostanza si definisca qual è il generico elemento che permetterà di costruire la generica soluzione di tentativo incognita u^h . Si scelga un elemento qualsiasi dello spazio W^h che sarà chiamato w^h e sarà scelto come combinazione lineare di funzioni attraverso degli opportuni parametri. La funzione approssimata con la quale si lavorerà è semplicemente una combinazione lineare di funzioni assegnate. Le $N_i(x)$ sono funzioni assegnate dall'operatore il cui grado del polinomio avrà un ordine non casuale. Le \hat{w}_i saranno dei parametri arbitrari, quindi:

$$w^{h}(x) = \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{i} N_{i}(x)$$
(2.17)

La forma scelta è particolarmente interessante perchè la funzione è espressa come combinazionen lineare di quantità note, quindi si riconduce il problema non alla determinazione di una funzione bensì alla determinazione di parametri arbitrari \hat{w}_i . La trasformazione è notevole perchè si passa dalla risoluzione di un problema integrale alla risoluzione di un problema *algebrico*. Di conseguenza le derivate si esplicitano con la seguente relazione.

$$w^{h}_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{n} \hat{w}_{j} N_{j}(x) = \sum_{j=1}^{n} \hat{w}_{j} \frac{\partial N_{j}(x)}{\partial x}$$
(2.18)

con $N_i = N_i(x)$ e $N_i(0) = 0$, scelta una specifica forma per $u^h = v^h + g^h$

$$u^{h}_{,x} = \bar{g}N_{0}(x) + \sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{j}N_{j}(x)$$
(2.19)

con $N_0(0) = 1$ e $u_h(0) = \bar{g}$. Gli rappresentano i veri parametri incogniti del problema, sono i gradi di libertà. Ora è possibile sostituire w^h nella forma integrale:

$$a(w^{h}, u^{h}) = (w^{h}, f) + w^{h}(b)\bar{h}$$

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{i}N_{i}(x), u^{h}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{i}N_{i}(x), f\right) + \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_{i}N_{i}(b)\bar{h}$$
(2.20)

Utilizzando la proprietà additiva degli integrali ed evidenziando
i \hat{w}_i si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{w}_i[a(N_i, u^h) - (N_i, f) - N_i(b)\bar{h}] = 0$$
(2.21)

Vista l'arbitrarietà dei parametri \hat{w}_i , il termine all'interno della parentesi quadra deve essere nullo:

$$a(N_i, u^h) - (N_i, f) - N_i(b)\bar{h} = 0$$
(2.22)

E' stato ricavato quindi un sistema lineare algebrico a n equazioni implementabile in Matlab. Si prenda in considerazione la generica *i*-esima equazione nella quale è possibile sostituire u^h

$$a(N_i, u^h) = (N_i, f) + N_i(b)\bar{h} = 0$$

$$u^h_{,x} = \bar{g}N_0(x) + \sum_{j=1}^n \hat{u}_j N_j(x)$$
(2.23)

quindi

$$a(N_i, \bar{g}N_0(x) + \sum_{j=1}^n \hat{u}_j N_j(x)) = (N_i, f) + N_i(b)\bar{h}$$
(2.24)

Sfruttando nuovamente la proprietà additiva degli integrali si ottiene:

$$a(N_i, \bar{g}N_0) + a(N_i, \sum_{j=1}^n \hat{u}_j N_j) = (N_i, f) - N_i(b)\bar{h}$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{u}_j a(N_i, N_j) = (N_i, f) - N_i(b)\bar{h} - a(N_i, \bar{g}N_0)$$
(2.25)

Concludendo la forma indiciale che se ne deduce sarà:

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\hat{u} = f_i \tag{2.26}$$

Dove si è posto

$$K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_a^b [N_{i,x} N_{j,x}] dx$$

$$f_i = (N_i, f) - N_i(b)\bar{h} - a(N_i, \bar{g}N_0) =$$

$$= \int_a^b [N_i f] dx + N_i(b)\bar{h} - \bar{g} \int_a^b [N_{i,x} N_{0,x}] dx$$
(2.27)

2.2.5 Funzioni di forma

Il problema discreto come si può intuire è semplice da risolvere. I passaggi fino ad ora sono ripetibili indipendentemente dall'equazione che ci trova ad affrontare. La scelta delle funzioni di forma però dipende dal problema specifico e da quante derivate bisogna calcolare. In ogni caso la formulazione precedentemente ricavata si ritrova sempre, anche se il problema è tridimensionale, l'unica variante è che al posto degli integrali di linea si otterranno degli integrali di volume. Il passo ultimo se si vuole programmare il metodo numerico è lo studio delle funzioni di forma. La matrice di rigidezza K è consigliabile averla a banda, ovvero dei termini diversi lungo la diagonale e il resto nulla. Questo perchè la matrice K sarà da invertire per poter calcolare i parametri arbitrari ed esistono per matrici a banda metodi numerici di inversione molto efficienti. Per comodità si utilizzano funzioni di forma locali cioè che vivono sull'elemento e in regioni vicine all'elemento, ma non si espandono in tutto il dominio. Teoricamente la scelta delle funzioni di forma è del tutto arbitraria, in pratica devono essere sempre compatibili col problema da risolvere. La scelta della funzione di forma deve essere tale per cui risolve bene l'equazione differenziale. L'efficacia della funzione di forma può essere anche intesa nel senso che restituisce un problema algebrico semplice da risolvere. Le funzioni di forma quindi devono permettere di calcolare facilmente K e il vettore dei termini noti f.

Come primo esempio di funzioni di forma si scelgono le cosiddette funzioni di forma *a cappello*, ovvero funzioni lineari a tratti e con le seguenti proprietà, $N_i(x_i) = 1$ e $N_i(x_j) = 1$ con $i \neq j$. Data una certa discretizzazione del dominio in [a, b], introdotti una serie di nodi ed elementi finiti, la generica funzione di forma interpolante sarà:

 $N_i(x)$ è tale che

$$\begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & altrove \end{cases}$$



Figura 2.1: Funzione di forma lineare

Avendo l'espressione analitica della funione di forma è possibile calcolarne la derivata: N_i , (x) è tale che





Figura 2.2: Derivata della funzione di forma

Se $N_i \in \mathbb{C}^0$ la derivata sarà una funzione discontinua però è ancora integrabile. E' possibile calcolare anche il generico elemento della matrice di rigidezza e del termine noto

$$K_{ij} = \int_{a}^{b} [N_{i,x} N_{j,x}] dx$$

$$f_{i} = \int_{a}^{b} [N_{i}f] dx - \bar{g} \int_{a}^{b} [N_{i,x} N_{0,x}] dx + N_{i}(b)\bar{h}$$
(2.28)

A seconda del nodo $i \in j$ si hanno diverse possibilità:

- Se *i* e *j* sono molto lontani tra di loro $(|i j| > 1 \text{ allora } K_{ij} = 0;$
- Se i è uguale a j allora è possibile calcolare in maniera analitica K_{ij} .

$$K_{ij} = \int_{a}^{b} [N_{i,x}]^{2} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} \left[\left(\frac{1}{x_{i} - x_{i-1}} \right)^{2} \right] dx - \int_{x_{i}}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{1}{x_{i+1} - x_{i}} \right)^{2} \right] dx$$
(2.29)

Fino ad ora è stato utilizzato il punto di vista della funzione di forma, si ragiona quindi sul generico elemento K_{ij} della matrice di rigidezza dove $i \in j$ rappresentano due nodi. Dal punto di vista della programmazione si adopera spesso un altro punto di vista chè è il punto di vista degli elementi cioè

$$\int_{a}^{b} [N_{i,x} N_{j,x}] dx \Longrightarrow \sum_{e=1}^{nel} \int_{e-1}^{e} [N_{i,x} N_{j,x}] dx = \sum_{e=1}^{nel} K_{ij}^{e}$$
(2.30)

E' un punto di vista molto diverso perchè si integra sul singolo elemento e poi alla fine si combinano gli integrali elementari in maniera opportuna. Si arriverà quindi a costruire la matrice di rigidezza del singolo elemento (metodo classico)

$$K_{ij}^{e} = \int_{e-1}^{e} [N_{i,x} N_{j,x}] dx \qquad (2.31)$$

Se si vuole costruire la matrice di rigidezza di un problema si deve eseguire un *loop* su tutti gli elementi, per ogni elemento si costruisce la matrice di rigidezza dell'elemento e poi si combinano le matrici di rigidezza dell'elemento per costruire la matrice di rigidezza globale. Si utilizza questo procedimento perchè dal punto di vista computazionale è molto efficiente. Se si suppone infatti di aver discretizzato il dominio [a, b] in 20 nodi, significa che il problema globale è rappresentato da 20 gdl, quindi da una matrice globale che è una 20 \times 20. In questo caso la matrice 20 \times 20 si costruisce opportunamente combinando la matrice di rigidezza dei singoli elementi. Considerato che il singolo elemento possiede due nodi e c'è un qdl per ogni nodo, è logica conseguenza che la matrice di rigidezza elementare sia una 2×2 . Da questo punto di vista ciò è molto efficace perchè si generano tante 2×2 da sommare però ciò determina il problema dell'assemblaqqio. Ciò determina una serie di problemi che sono classici nel metodo agli elementi finiti, uno è il seguente. Se si utilizza, per costruire la matrice di rigidezza globale il punto di vista dell'elemento ho da un lato la matrice dell'elemento e da un lato la matrice globale. Quando si lavora sulla matrice dell'elemento è naturale operare con informazioni che sono quanto più possibili locali. Se si lavora con un solo elemento conviene lavorare con una numerazione dei nodi che è locale, quindi conviene utilizzare un sistema di riferimento che è locale per poter avere informazioni relative allo specifico elemento. Si devono altresi avere informazioni che devono riguardare l'intera struttura, quindi si dovrà avere anche un sistema di riferimento globale, una numerazione dei nodi globale, dei gdl globale e quindi ci deve essere un trasferimento continuo dal livello globale al livello locale.

2.2.6 Integrazione del carico

Il programma implementato in Matlab permette di integrare un carico qualunque tramite la formula di Cavalieri-Simpson. Si è dunque calcolato un vettore dei carichi *elementare* che verrà assemblato con lo stesso criterio della matrice di rigidezza. L'elemento *i* tiene conto del contributo dell'elemento i-1 perchè ha un nodo in comune. Si capirà meglio questo concetto nel proseguo del paragrafo. Si esplicita a tal fine il vettore elementare dei carichi f_i^{el} che ovviamente sarà un vettore (2×1) :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1 f \, dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2 f \, dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$
(2.32)

Tenendo presente che le funzioni di forma sono del tipo di figura 2.1, per quanto riguarda N_1 la funzione vale 1 nel nodo i, $\frac{1}{2}$ nel nodo $i + \frac{1}{2}$ e zero nel nodo i + 1. Invece N_2 avrà valore zero nel nodo nodo i, $\frac{1}{2}$ nel nodo $i + \frac{1}{2}$ e 1 nel nodo i + 1. Riassumendo il vettore dei carichi f che è stato calcolato risulta essere:

$$\int_{x_{i}}^{x_{i+1}} N_{1}f \, dx = \frac{h}{6} \left(f(x_{i}) + 2f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i}}{2}\right) + 0 \right)$$

$$\int_{x_{i}}^{x_{i+1}} N_{2}f \, dx = \frac{h}{6} \left(0 + 2f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

$$f^{el} = \frac{h}{6} \left(f(x_{i}) + 2f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i}}{2}\right), 2f\left(\frac{x_{i+1} + x_{i}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$
(2.33)

2.3 Problema ellittico 2D

Per verificare il comportamento degli elementi finiti rapportati ai volumi finiti si passerà ad analizzare il caso bidimensionale dell'equazione studiata in precedenza.

$$\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega$$
(2.34)

2.3. PROBLEMA ELLITTICO 2D

Si chiamerà con T una mesh ammissibile del dominio $[a, b] \times [c, d]$ costituita da elementi rettangolari. I passi da applicare per arrivare ad una formulazione debole del problema differenziale sono gli stessi visti nella trattazione monodimensionale. Per semplicità di calcolo si è spezzato l'operatore laplaciano.

$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \, d\Omega = \iint_{\Omega} f v \, d\Omega \tag{2.35}$$

Si applica il teorema della divergenza ai termini appartenenti al secondo membro della (2.35). In particolare il teorema della divergenza applicato nel caso specifico si può generalizzare tramite la seguente relazione

$$\iint_{\Omega} F_{,x} t \, d\Omega = -\iint_{\Omega} F t_{,x} \, d\Omega + \int_{C} F t n_x \, dS \tag{2.36}$$

Applicando quindi la (2.36) alla (2.35) e raccogliendo i termini integrati su Ω e su $\partial\Omega$ si ottiene:

$$\iint_{\Omega} \left(u_{,x} v_{,x} + u_{,y} v_{,y} \right) \, d\Omega - \int_{C} \left(u_{,x} v n_{x} + u_{,y} v n_{y} \right) dS = \iint_{\Omega} f v \, d\Omega \quad (2.37)$$

A questo punto si introduce una discretizzazione di Ω tenendo presente che si utilizzerà nuovamente un metodo alla *Bubnov*-Galerkin.

$$\iint_{\Omega} \left(u^{h}_{,x} v^{h}_{,x} + u^{h}_{,y} v^{h}_{,y} \right) \, d\Omega - \int_{C} \left(u^{h}_{,x} v^{h} n_{x} + u^{h}_{,y} v^{h} n_{y} \right) dS = \iint_{\Omega} f v^{h} \, d\Omega$$
(2.38)

Si sceglie per v e di conseguenza per u la seguente forma, già vista nel caso 1D:

$$v^{h}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_{i} N_{i}(x,y); \qquad u^{h}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{i} N_{i}(x,y)$$
$$\frac{\partial v^{h}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i} \hat{v}_{i} N_{i} = \sum_{i} \hat{v}_{i} \frac{\partial N_{i}}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v^{h}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j} \hat{v}_{j} N_{j} = \sum_{j} \hat{v}_{j} \frac{\partial N_{j}}{\partial y}$$
(2.39)

Sostituendo la (2.39) nella (2.38) si ottiene:

$$\iint_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} \hat{v}_{i} N_{j,x} N_{i,x} + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} \hat{v}_{i} N_{j,y} N_{i,y} \right) d\Omega =$$

$$\int_{C} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} \hat{v}_{i} N_{j,x} N_{i} n_{x} + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} \hat{v}_{i} N_{j,y} N_{i} n_{y} \right) dS \qquad (2.40)$$

$$+ \iint_{\Omega} f \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_{i} N_{i} d\Omega$$

Vista l'arbitrarietà dei \hat{v}_i l'equazione (2.40) deve valere $\forall \hat{v}_i$, quindi:

$$\iint_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} N_{i,x} N_{j,x} + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} N_{i,y} N_{j,y} \right) d\Omega - \int_{C} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} N_{j,x} N_{i} n_{x} + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} N_{j,y} N_{i} n_{y} \right) dS = \iint_{\Omega} f \sum_{i=1}^{n} N_{i} d\Omega$$
(2.41)

Raccogliendo adeguatamente i termini si può esprimere la (2.42) in maniera più compatta:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \hat{u}_{j} \left(\iint_{\Omega} \left(N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y} \right) d\Omega - \int_{C} \left(N_{j,x} N_{i} n_{x} + N_{j,y} N_{i} n_{y} \right) dS \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega} f N_{i} d\Omega$$
(2.42)

Il sistema lineare che si può ricavare è quello consueto che scaturisce da ogni metodo numerico

$$K_{ij}\hat{u}_j = F_i \qquad i, j = 1, ..., N$$
 (2.43)

dove la matrice di rigidezza e il vettore dei termini noti sono rappresentati dalle seguenti espressioni

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\iint_{\Omega} \left(N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y} \right) d\Omega - \int_{C} \left(N_{j,x} N_{i} n_{x} + N_{j,y} N_{i} n_{y} \right) dS \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega} f N_{i} d\Omega$$
(2.44)

Lo sviluppo di un metodo numerico comporta l'approssimazione della soluzione esatta tramite una combinazione lineare di parametri arbitrari \hat{u} con le funzioni di forma N_i . La soluzione del problema quindi è essenzialmente rivolta alla determinazione delle funzioni di forma.

2.4 Cambio di coordinate

Nel caso di mesh rettangolare si arriva a scegliere una funzione di forma di tipo bilineare, perchè c'è un termine misto di ordine superiore.

$$N_i = \frac{1}{4} \left(1 + \bar{\xi}_i \xi \right) \left(1 + \bar{\eta}_i \eta \right) \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.45}$$

E' subito evidente che la funzione di forma fa riferimento a delle coordinate ξ ed η che definiscono un sistema di riferimento ortogonale baricentrico di un elemento fittizio chiamato *elemento parente*. In particolare le quantità barrate sono note perchè fanno a riferimento ai vertici dell'elemento parente. Tale elemento parente è utile perchè ha una geometria molto semplice di lato 2×2 e permetterà di ricondurre il calcolo della matrice di rigidezza elementare proprio su di esso. Si tratta di definire un *mapping* che permetta di passare dal dominio fisico al dominio parente e viceversa. Per sviluppare un elemento finito è quindi necessario capire come sono fatte le N_i e soprattutto dove si possono costruire. Il passaggio intelligente sarà quello di costruirle sull'elemento parente dove risulta più semplice. Se vengono costruite in funzione di ξ ed η una volta note le N_i funzione di ξ ed η risulterà poi semplice costruire l'elemento fisico e l'interpolazione del campo incognito.

Si introduca il seguente elemento chiamato *elemento parente* di geometria fissata.



Figura 2.3: Elemento *parente* o *genitore* riferito al dominio fisico

Si ricavano di conseguenza le coordinate dei vertici del quadrato, $(1) \equiv (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) = (-1, -1), (2) \equiv (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) = (1, -1), (3) \equiv (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) = (1, 1)$ e (4) $\equiv (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) = (-1, 1)$, che sostituiti nell'espressione generale (2.45) restituiscono le quattro funzioni di forma dell'elemento:

$$N_{1} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta); \qquad N_{2} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_{3} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta); \qquad N_{4} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$
(2.46)

Si noti che le funzioni forma in (2.46) rispettano il concetto base che $N_i(\xi_i) = 1$ e $N_i(\xi_j) = 0$. Prima di iniziare a sviluppare i calcoli manca



Figura 2.4: Funzione di forma N_1

ancora un elemento ovvero l'espressione di ξ e di η funzione rispettivamente di x e di y. Si tratta di trovare la generica retta parallela rispettivamente all'asse ξ ed η . Si considera la costruzione solo di una retta (l'altra è esattamente analoga). Per determinarla basta prendere in considerazione il punto (1) e (2) in cui $\xi = \pm 1$ e inserirlo nell'espressione $ax + b = \xi$:

$$ax_2 + b = 1 (2.47)$$
$$ax_1 + b = -1$$

Si ricavano i parametri $a \in b$ e si estre l'equazione finale che vale

$$\xi = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(2x - x_1 - x_2 \right) \tag{2.48}$$

che dopo alcuni semplici passaggi diventa

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \tag{2.49}$$

e analogamente

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \tag{2.50}$$

Con x_c , y_c coordinate del baricentro dell'elemento fisico considerato, mentre $a \in b$ corrispondono al valore dei due semilati del dominio fisico. Come sarà più chiaro successivamente utilizzare le coordinate normalizzate sarà molto conveniente perchè una volta note le funzioni di forma nelle coordinate normalizzate la trasformazione nelle coordinate attuali o la trasformazione di eventuali espressioni (es. derivazione della matrice di rigidezza) risulterà banale. L'obiettivo è quindi lavorare su un elemento parente, cioè di geometria definita, di coordinate ξ ed η e lato 2 e costruire delle funzioni interpolanti lineari a tratti che abbiano valore 1 nel nodo *i*-esimo e valore 0 nel nodo $j \neq i$. Ora se si vuole costruire la matrice di rigidezza bisogna capire come costruire le derivate delle funzioni di forma. Costruire le derivate delle funzioni di forma, date le funzioni di forma definite sull'elemento

2.4. CAMBIO DI COORDINATE

parente, richiede un minimo di attenzione, perchè se le funzioni di forma dipendono da ξ ed η sarà semplice il calcolo delle derivate rispetto a ξ ed η delle funzioni di forma. L'operatore K contiene le derivate rispetto a x e y (coordinate fisiche), quindi bisogna stabilire come passare dalle derivate rispetto a ξ ed η alle derivate rispetto a x ed y e viceversa. E' sufficiente utilizzare i teoremi del cambio di coordinate. Data u funzione di ξ che si esprime in funzione di x perchè $u = u(\xi) = u(\xi(x))$, la derivata di u rispetto ad x la si esprime come:

$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

(2.51)

Che in forma matriciale corrisponde al seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ u_{,y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{array} \right\}$$
(2.52)

Dove al secondo membro c'è un una matrice 2×2 che è la trasposta dello Jacobiano del cambio di coordinate oppure lo Jacobiano della mappa $\xi(x) \in \eta(y)$. u è la combinazione lineare delle funzioni di forma attraverso i parametri incogniti \hat{u} . In questo modo data la mappa X ,combinazione lineare di \bar{x} , è invertibile calcolando lo Jacobiano e facendone l'inversa e poi la trasposta. Se si sviluppa un elemento *isoparametrico* definite le funzioni N_i che dipendono da ξ , è possibile calcolare le $N_{i,\xi}$ e le $N_{i,\eta}$.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \hat{u}_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} N_i \right) \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{4} N_{i,\xi} \hat{u}_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^{4} N_i \hat{u}_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} N_i \right) \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{4} N_{i,\eta} \hat{u}_i$$
(2.53)

Quindi se le N_i sono definite come (2.45) si calcolano facilmente le derivate:

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4}\bar{\xi}_i (1+\bar{\eta}_i\eta) \qquad N_{i,\eta} = \frac{1}{4}\bar{\eta}_i \left(1+\bar{\xi}_i\xi\right)$$

$$N_{1,\xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \qquad N_{2,\xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \qquad N_{3,\xi} = \frac{1}{4}(1+\eta) \qquad N_{4,\xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta)$$

$$N_{1,\eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \qquad N_{2,\eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \qquad N_{3,\eta} = \frac{1}{4}(1+\xi) \qquad N_{4,\eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$(2.54)$$

La matrice delle derivate di ξ ed η rispetto a x ed y sarà chiamata F e risulta essere:

$$F = \begin{bmatrix} 1/a & 0\\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$$

La matrice F è la trasposta dello Jacobiano relativo al cambiamento di coordinate $\xi = \xi(x)$ da cui la relazione inversa $x = x(\xi)$ può essere facilmente calcolata come

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
(2.55)

Esplicitati i termini precedentemente calcolati, il sistema di due equazioni in due incognite si traduce in:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{,x} \\ u_{,y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} a & 0 \\ 0 & b \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \bar{\xi}_{i} \left(1 + \bar{\eta}_{i} \eta \right) \hat{u}_{i} \\ \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} \bar{\eta}_{i} \left(1 + \bar{\xi}_{i} \xi \right) \hat{u}_{i} \end{array} \right\}$$
(2.56)

Le due equazioni scritte separatamente ed esplicitando le sommatorie sono:

$$u_{,x} = \frac{a}{4} \left(-\hat{u}_1 \left(1 - \eta \right) + \hat{u}_2 \left(1 - \eta \right) + \hat{u}_3 \left(1 + \eta \right) - \hat{u}_4 \left(1 + \eta \right) \right)$$

$$u_{,y} = \frac{b}{4} \left(-\hat{u}_1 \left(1 - \xi \right) - \hat{u}_2 \left(1 + \xi \right) + \hat{u}_3 \left(1 + \xi \right) + \hat{u}_4 \left(1 - \xi \right) \right)$$

(2.57)

2.5 Costruzione della matrice di rigidezza

La matrice di rigidezza indipendentemente dall'essere l'integrale di $N_{i,x} N_{j,x}$ + $N_{i,y} N_{j,y}$ la si può considerare come

$$\int_{\Omega_e} f(x) \, dA \tag{2.58}$$

con f(x) funzione che in generale è complicata e per la quale non è possibile utilizzare formule analitiche d'integrazione. Anche il dominio può avere una forma particolare in teoria. In genere non si sa integrare in forma analitica queste funzioni, per questo non si sfrutta l'integrazione sul dominio fisico bensì l'integrazione sul dominio isoparametrico.

$$\int_{\Box} f(x(\xi)) J \, d\Box \tag{2.59}$$

In cui J è il determinante dello Jacobiano che in questo caso è $J = a \cdot b$. In generale un criterio per stabilire l'esattezza del calcolo dello Jacobiano è verificare che sia il rapporto tra l'area del dominio fisico e l'area del dominio di supporto . In particolare si può quindi verificare che il prodotto $a \cdot b$ è la quarta parte dell'area totale del dominio fisico mentre 1 è la quarta parte dell'area totale del dominio parente. Si passa quindi dall'integrale dominio fisico all'integrale sul dominio parente di forma regolare assegnata dall'operatore. Si possono utilizzare formule d'integrazione numerica, cioè si può approssimare l'integrale come combinazione lineare della funzione valutata in alcuni punti per opportuni pesi. Tale passaggio è chiamato *integrazione numerica*. La formula standard comunemente utilizzata per l'integrazione è quella di *Gauss*. La mesh scelta è però molto semplice perchè è basata su rettangoli di lato a e b e la matrice di rigidezza può essere calcolata analiticamente. In particolare dall'equazione (2.44) si richiede di calcolare:

$$N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y} \qquad su \quad \Omega$$

$$N_{j,x} N_{i}n_{x} + N_{j,y} N_{i}n_{y} \qquad su \quad C$$

$$fN_{i} \qquad su \quad \Omega$$

$$(2.60)$$

Di questi termini si ipotizza di trascurare il termine al bordo. Per analogia ed esaminando il singolo elemento è ovvio che i gradi di libertà sono quattro spostamenti, uno in corrispondenza di ogni nodo. La matrice di rigidezza elementare sarà una matrice simmetrica 4x4.

$$\boldsymbol{K_{el}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza tiene conto delle considerazione fino ad ora fatte, quindi:

$$\iint_{\Omega_e} f(x) \, dA \qquad \longrightarrow \qquad \iint_{\square} f(x(\xi)) J \, d\square \tag{2.61}$$

Ovvero la funzione integranda originaria f(x, y) viene esplicitata in funzione di un sistema di riferimento più comodo che determina quindi una $f(\xi, \eta)$. Tale passaggio avviene tramite la seguente sostituzione:

$$N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y} \longrightarrow N_{i,\xi} N_{j,\xi} + N_{i,\eta} N_{j,\eta}$$
(2.62)

I termini che integrati sull'elemento quadrato 2×2 restituiscono la matrice di rigidezza, svolgendo opportunamente i calcoli risultano essere:

$$t_{11} = \frac{1}{16} \left((1-\eta)^2 + (1-\xi)^2 \right); \qquad t_{22} = \frac{1}{16} \left((1-\eta)^2 + (1+\xi)^2 \right)$$

$$t_{33} = \frac{1}{16} \left((1+\eta)^2 + (1+\xi)^2 \right); \qquad t_{44} = \frac{1}{16} \left((1+\eta)^2 + (1-\xi)^2 \right)$$

$$t_{12} = \frac{1}{16} \left(-(1-\eta)^2 + 1 - \xi^2 \right); \qquad t_{13} = -\frac{1}{16} \left(1 - \eta^2 + 1 - \xi^2 \right) \qquad (2.63)$$

$$t_{14} = \frac{1}{16} \left(1 - \eta^2 - (1-\xi)^2 \right); \qquad t_{23} = \frac{1}{16} \left(1 - \eta^2 - (1+\xi)^2 \right)$$

$$t_{24} = -\frac{1}{16} \left(1 - \eta^2 + 1 - \xi^2 \right); \qquad t_{34} = \frac{1}{16} \left(-(1+\eta)^2 + 1 - \xi^2 \right)$$

Che dopo semplici conti e facendo attenzione ai segni restituiscono i seguenti termini:

$$t_{11} = \frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 + 2\eta - 2\xi + 2 \right); \qquad t_{22} = \frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 - 2\eta + 2\xi + 2 \right)$$

$$t_{33} = \frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 + 2\xi + 2\eta + 2 \right); \qquad t_{44} = \frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 + 2\eta - 2\xi + 2 \right)$$

$$t_{12} = \frac{1}{16} \left(-\eta^2 - \xi^2 + 2\eta \right); \qquad t_{13} = -\frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 - 2 \right)$$

$$t_{14} = \frac{1}{16} \left(-\eta^2 - \xi^2 + 2\xi \right); \qquad t_{23} = \frac{1}{16} \left(-\eta^2 - \xi^2 - 2\xi \right)$$

$$t_{24} = \frac{1}{16} \left(\eta^2 + \xi^2 - 2 \right); \qquad t_{34} = \frac{1}{16} \left(-\eta^2 - \xi^2 - 2\eta \right)$$

(2.64)

Supponendo una mesh uniforme e integrando sul dominio di referenza $[-1, 1] \times [-1, 1]$ si ottiene la seguente matrice di rigidezza elementare:

$$\boldsymbol{K_{el}} = J \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 & -1/3 & 1/12 \\ 1/12 & 2/3 & -5/12 & -1/3 \\ -1/3 & -5/12 & 7/6 & -5/12 \\ 1/12 & -1/3 & -5/12 & 2/3 \end{bmatrix}$$

2.5.1 Integrazione del carico

Ci si trova di fronte a due possibili strade, o l'integrazione numerica o il calcolo analitico del vettore elementare dei carichi. Ciò è possibile per il caso in cui il dominio è regolare, la mesh è rettangolare e le funzioni da integrare sono relativamente semplici, in caso contrario l'integrazione numerica sarà una scelta obbligata. Nel caso bidimensionale, qualora si prenda la prima strada, si integra il termine noto attraverso la formula dei trapezi. Per un dominio rettangolare tale formula si esplicita con la relazione seguente:

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_i(\xi,\eta) J \, d\Box = \frac{\Box}{4} \left(f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + f(v_4) \right)$$
(2.65)

Per $f(v_i)$ si intende la funzione integranda che in questo caso corrisponde a $f = p(\xi, \eta)N_i$. Come già in precedenza visto le funzioni di forma sono state costruite al fine di avere $N_i(\xi_i) = 1$ e $N_i(\xi_j) = 0$, ciò determinerà che di volta in volta a seconda della funzione di forma che si sta considerando, si avrà solamente un termine diverso da zero all'interno della parentesi tonda. L'area del quadrato inoltre su cui avviene l'integrazione sarà sempre 4, per cui:

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_i(\xi,\eta) J \, d\xi \, d\eta = f(v_i) \tag{2.66}$$

Resta da definire la funzione carico. Essa sarà assegnata in coordinate (x, y), quindi per poterla moltiplicare per le N_i e integrarla sul dominio

parente si renderà necessario l'utilizzo della (2.49) e della (2.50) esplicitando le incognite $x \in y$ in funzione di $\xi \in \eta$ ed inserendole poi nell'espressione del carico. Si può anche in questo caso calcolare un termine elementare dei carichi che in questo caso sarà un vettore (4×1) .

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_1(\xi,\eta) J d\xi d\eta = f(v_1)$$

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_2(\xi,\eta) J d\xi d\eta = f(v_2)$$

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_3(\xi,\eta) J d\xi d\eta = f(v_3)$$

$$\iint_{\Box} p(\xi,\eta) N_4(\xi,\eta) J d\xi d\eta = f(v_4)$$
(2.67)

Tale vettore sarà di volta in volta da calcolare perchè è funzione delle coordinate del baricentro dell'elemento fisico (x_C, y_C) .

2.6 Condizioni al contorno

Per gli elementi finiti si è seguito un procedimento più semplice rispetto a quello visto per i volumi finiti. Scritta la matrice di rigidezza globale come se non ci fossero gradi di libertà vincolati, si pongono le condizioni al contorno operando opportune modifiche sia al vettore dei termini noti che alla matrice di rigidezza globale stessa. Laddove si vuole bloccare lo spostamento del nodo ij si interviene su K_{gl} azzerando interamente la riga *i*-esima e ponendo unitario l'elemento *ii*. Sull'elemento del termine noto *i*-esimo si scrive il valore di spostamento che si vuole imporre. Semplicemente si utilizzano delle equazioni facenti parti del sistema algebrico iniziale per indicare il valore di spostamento desiderato nel nodo. Si utilizza un procedimento più semplificato che ha il difetto di non permettere il calcolo delle reazioni vincolari. Tale difetto nasce appunto dall'aver utilizzato dei termini del vettore dei carichi che nel caso dei volumi finiti risultavano invece le incognite insieme a u_{ll} .

Capitolo 3

Metodo alle differenze finite

3.1 Introduzione

Il metodo alle differenze finite è stato il primo ad affermarsi grazie soprattutto alla sua semplicità concettuale. Il metodo delle differenze finite, come i precedenti metodi, permette di trovare la soluzione numerica di un'equazione o di un sistema di equazioni differenziali. La modellizzazione matematica di un sistema fisico conduce sempre ad equazioni differenziali le cui soluzioni sono funzioni di una variabile, ad es. il tempo. La ricerca diretta di tali funzioni è un problema che si sa risolvere esplicitamente soltanto in pochi casi. In assenza di una forma esplicita è importante determinare una soluzione approssimata che permetta di stabilire comunque le proprietà della funzione. I valori approssimati della soluzione sono calcolati per un numero discreto di valori della variabile indipendente. L'equazione differenziale è trasformata in una equazione in cui compaiono le differenze finite tra valori consecutivi della variabile indipendente e dei corrispondenti valori delle funzioni cercate. Ciò permette di scrivere equazioni algebriche nelle quali un valore della funzione dipende dall'incremento scelto per la variabile indipendente e dai valori immediatamente precedenti della funzione stessa, oltre che dai coefficienti costanti che compaiono nell'equazione differenziale che sono i parametri del sistema. I valori della variabile indipendente costituiranno un vettore di N elementi distanziati tra loro di un valore costante dt = T/Nse T è l'ampiezza dell'intervallo della variabile indipendente. La soluzione approssimata è, a sua volta, un vettore di N elementi distanziati tra loro di un incremento variabile dy che dipende dalla struttura dell'equazione differenziale e dai suoi parametri. Si può in genere riconoscere che l'ennesimo termine è funzione di alcuni valori immediatamente precedenti, è cioè definito in maniera ricorsiva. La differenza tra l'indice dell'elemento calcolato ed il più piccolo degli indici degli elementi precedenti da cui esso dipende, definisce l'ordine dell'equazione. Se l'ordine è k, i primi k elementi del vettore sono costanti da definire. Al variare del loro valore si ottengono soluzioni diverse. Pertanto esse andranno scelte in base alle condizioni iniziali che. insieme all'equazione differenziale, definiscono l'oggetto di studio.

3.2 Approximazione alle differenze finite

Il metodo delle differenze finite si basa sull'approssimazione delle derivate parziali prime e seconde che compaiono nelle equazioni differenziali mediante differenze dei valori finiti che la funzione da differenziare assume in alcuni punti del dominio in cui è definito il problema. In particolare, si sovrappone al dominio una griglia di punti (detti nodi) che per semplicità supporremo equispaziati (con h indicheremo la distanza tra due nodi vicini); in una dimensione, ad esempio, la funzione f (di una sola variabile) può essere sviluppata nell'intorno del generico punto x come:

$$f(x+h) = f(x) + hf^{I}(x) + \frac{h^{2}}{2}f^{II}(x) + \frac{h^{3}}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^{4}}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (3.1)$$

oppure come:

$$f(x-h) = f(x) - hf^{I}(x) + \frac{h^{2}}{2}f^{II}(x) - \frac{h^{3}}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^{4}}{4!}f^{IV}(x) - \dots \quad (3.2)$$

Sommando le due serie si ottiene:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f^{II}(x) + \frac{h^4}{12} f^{IV}(x) + \dots$$
(3.3)

e quindi, se si tronca la serie alla derivata seconda:

$$f^{II}(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$
(3.4)

Se h è abbastanza piccolo, l'espressione (3.4) fornisce il valore della derivata seconda calcolata alle *differenze finite centrate*. L'errore commesso sarà quindi:

$$\frac{\frac{h^4}{12}f^{IV}(x)}{h^2} \tag{3.5}$$

proporzionale ad h^2 ed al tendere di h a zero tende rapidamente ad annullarsi. L'approssimazione delle derivate prime, eventualmente presenti nell'equazione differenziale, si ottiene dalla sottrazione dei due sviluppi in serie:

$$f^{I}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$
(3.6)

e l'errore è ancora proporzionale ad h^2 . Se h è abbastanza piccolo, l'espressione (3.6) fornisce il valore della derivata prima calcolata alle differenze finite centrate. In totale si possono utilizzare tre schemi alle differenze finite:

• Forward con $Du_i = u_{i+1} - u_i;$

- Backward con $Du_i = u_i u_{i-1};$
- Long centered con $Du_i = u_{i+1} u_{i-1}$ o Short centered con $\delta u_i = u_{i+\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}}$.

Riassumendo gli schemi alle differenze discussi in precedenza valutano le derivate con un errore proporzionale ad h^2 e per questo sono accurate al secondo ordine. Attraverso procedure analoghe è possibile ottenere formule alle differenze di ordine superiore per la valutazione delle quali viene coinvolto un maggior numero di punti a monte e a valle.

3.3 Problema ellittico 1D e schema numerico

Data la funzione $f(\mathbf{x})$, si consideri la già vista equazione con condizioni al bordo di Dirichlet:

$$u''(x) = -f(x)$$
 $a \le x \le b$
 $u(a) = c, \quad u(b) = d$ (3.7)

Si consideri una discretizzazione dell'intervallo [a,b] di passo uniforme h e nodi x_i , con i = 0, ..., n + 1, e si denoti con u_i l'approssimazione incognita di $u(x_i)$. In questa fase l'approssimazione che si sceglie è del tutto arbitraria, l'obiettivo da perseguire è che quando Δt tende a zero lo schema numerico deve riprodurre lo schema continuo. Scelta come approssimazione della derivata prima e seconda il seguente rapporto incrementale alle differenze finite centrale si ottiene:

$$u_{i}^{\prime} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$u_{i}^{\prime\prime} \cong \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\prime} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\prime}}{h} = \frac{\frac{u_{i+1} - u_{i}}{h} - \frac{u_{i} - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_{i} + u_{i-1}}{h^{2}}$$
(3.8)

A questo punto è facile intuire che si è integrato l'equazione di partenza perchè sostituendo la (3.8) nella (3.7) si ricava un'espressione funzione solo di u. Con tale approssimazione è possibile scrivere n - 1 equazioni che daranno origine alla seguente matrice di rigidezza $(n + 1) \times (n + 1)$:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

E' come nei volumi finiti e negli elementi finiti una matrice tridiagonale a cui si associano i seguenti vettori spostamento e carico:

$$u = \begin{cases} u_{0} \\ u_{1} \\ u_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_{n} \end{cases}; \quad f = \begin{cases} f_{0} \\ f_{1} \\ f_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_{n} \end{cases}$$
(3.9)

La matrice K così come è stata scritta non è invertibile perchè descrive un moto rigido, si può pensare ad un problema in cui si ha un'asta libera caricata. Bisogna imporre le condizioni al contorno scrivendo semplicemente nella matrice di rigidezza che u_0 e u_n hanno uno spostamento fissato.

3.3.1 Vettore dei carichi

Si tiene conto della funzione carico f(x) valutandola nei nodi scelti per discretizzare il dominio. L'errore che si commette utilizzando tale approssimazione è che nell'equazione si tiene conto solamente del valore nodale. Fissata una certa discretizzazione tutte le funzioni che passano per i punti della griglia sono uguali operando in tal modo. Ciò risulterà quindi particolarmente penalizzante nei casi in cui f(x) è caratterizzato da alte frequenze. Il singolo nodo è quindi assunto essere la sintesi di quello che avviene prima e dopo il nodo stesso.

3.4 Problema ellittico in 2D

Molti problemi di fisica tecnica, fluidodinamica, strutture e teoria dei campi elettromagnetici, sono governati da una equazione differenziale del tipo



Figura 3.1: Discretizzazione del dominio in 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{3.10}$$

Come già detto tale equazione prende il nome di equazione di Poisson. Nella (3.10) la funzione u(x, y) rappresenta la distribuzione di una qualche variabile fisica, ad esempio lo spostamento o la temperatura, mentre la f(x, y) rappresenta un termine *sorgente*, ad esempio un carico o l'intensità di una fonte di calore. Forme completamente analoghe si possono avere in tre dimensioni aggiungendo la derivata seconda rispetto alla terza variabile spaziale z. Per la soluzione delle equazioni di Poisson o Laplace è necessario assegnare come già visto le condizioni al contorno. Nei problemi della fisica, queste condizioni possono essere di due tipi: in alcuni casi viene assegnata la stessa variabile f mentre in altri casi viene assegnata la sua derivata normale. Nel primo caso si parla di condizioni di Dirichlet nel secondo caso si parla di condizioni di Neumann. Si hanno condizioni di Dirichlet quando ad esempio si conosce il valore della temperatura su tutto il contorno mentre si hanno condizioni di Neumann quando sul contorno è posizionata una sorgente di calore.

3.5 Schema numerico alle differenze finite

L'estensione dell'approssimazione trattata all'inizio del capitolo al caso bidimensionale è immediata e l'equazione di Poisson nell'intorno del generico punto di coordinate (x, y) diventa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h) - 4f(x,y)}{h^2}$$
(3.11)

Quindi nel caso in cui la funzione dipende da due o più variabili, i concetti esposti nelle sezoni precedenti vanno estesi al caso di derivate parziali. Per rendere più semplice la comprensione del problema con la sua discretizzazione si faccia riferimento allo schema 3.2.

Nel piano, il generico punto è individuato da una coppia di indici (i, j)con i = 0, ..., N e j = 0, ..., M. Inoltre come indicato in figura 3.2, nel caso



Figura 3.2: Mesh del dominio in 2D

di distribuzione uniforme dei nodi la coordinata x è la stessa per tutti i nodi che hanno lo stesso indice i, anche se hanno diverso indice j. Allo stesso modo, tutti i nodi che hanno lo stesso indice j hanno la stessa coordinata y. Questo rende estremamente semplice la costruzione di schemi alle differenze finite per il calcolo di derivate parziali rispetto ad x o y. In pratica si tratta di utilizzare le stesse formule riportate in precedenza per le funzioni di una sola variabile, utilizzandole per la funzione di due variabili g(i, j), facendo variare solo l'indice relativo alla variabile rispetto alla quale si deve effettuare la derivata mantenendo fisso l'altro. Il passo verrà poi sostituito da Δx o Δy , a seconda della direzione rispetto alla quale si effettua la derivata. Come esempio vengono riportate di seguito le espressioni delle derivate parziali prime e seconde rispetto a x e y, valutate con schemi alle differenze centrate riportati nella sezione precedente.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(i,j) = \frac{g(i+1,j) - g(i-1,j)}{2\Delta x}$$
(3.12)

che rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla x valutata nel nodo (i, j). Analogamente:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(i,j) = \frac{g(i,j+1) - g(i,j+1)}{2\Delta y} \tag{3.13}$$

che rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla y valutata nel nodo (i, j). Per le derivate seconde si avrà:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(i,j) = \frac{g(i+1,j) - 2g(i,j) + g(i-1,j)}{\Delta x^2} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(i,j) = \frac{g(i,j+1) - 2g(i,j) + g(i,j-1)}{\Delta y^2}$$
(3.14)

Senza perdita di generalità si assume che il problema sia quello di determinare la distribuzione della u in una lastra piana rettangolare $(a, b) \times (c, d)$. In forma discreta i lati L_x e L_y vengono discretizzati rispettivamente con N ed M sottointervalli. Di conseguenza $\Delta x = L_x/N = e \Delta y = L_y/M =$. Lintera lastra è quindi suddivisa in $(N+1) \times (M+1)$ nodi, ognuno dei quali è individuato da una coppia (i, j) con i = 0, ..., N e j = 0, ..., M. Poichè si assume che la funzione u sia assegnata al contorno, le quantità

$$u(0,i), u(N,j) \quad note \quad \forall j = 0, ..., M u(i,0), u(i,M) \quad note \quad \forall i = 0, ..., N$$
(3.15)

Per determinare invece i valori della u nei nodi interni è necessario scrivere l'equazione di Poisson in forma discreta in ognuno di essi. A questo scopo si faccia riferimento alle (3.14). Se si ipotizza per semplicità che $\Delta x = \Delta y = 1$, le espressioni discrete delle derivate seconde si semplificano ulteriormente ottenendo quindi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i,j) = u(i+1,j) - 2u(i,j) + u(i-1,j)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(i,j) = u(i,j+1) - 2u(i,j) + u(i,j-1)$$

(3.16)

Sostituendo queste due espressioni delle derivate seconde nell'equazione di Poisson (3.10), in corrispondenza del generico nodo i, j si ottiene

$$u(i, j-1) + u(i-1, j) - 4u(i, j) + u(i+1, j) + u(i, j+1) = f(i, j) \quad (3.17)$$

tale equazione va particolareggiata per tutti i nodi interni, tenendo conto del fatto che i valori sui nodi al contorno sono noti. Se si implementa senza errori il metodo alle differenze finite per risolvere l'equazione di Poisson, la matrice di rigidezza che si calcola è pentadiagonale a blocchi. Inoltre è possibile verificare che la matrice è diagonalmente dominante seppure in senso debole, e questo consente l'impiego di solutori iterativi, indispensabili per la soluzione di problemi con un numero molto elevato di incognite.

Capitolo 4 Risultati delle analisi 1D

Le analisi sono state condotte su un dominio pari a [0,1] per tutti i carichi analizzati nei paragrafi precedenti. Il numero di elementi stabilito è stato 10, 100 e 1000 per potere mettere in un grafico in scala logaritmica i risultati. Il numero di elementi pari a 5 è stato scelto per vedere il comportamento iniziale dei tre metodi. Le condizioni al contorno sono state scelte nulle nei nodi di bordo. La tabella sottostante riassume i valori dell'errore ricavati dai programmi 1D implementati.

Metodo	Carico	10	N° elementi 100	1000	
19 0 2017/03/09	2242 - 22	10	700	1000	
FVM	Cost.	2,8615E-04	1,7292E-07	1,7292E-07	
	Pol.	6,8000E-03	2,9297E-06	8,0099E-07	
	Exp.	9,1808E-06	6,3335E-09	2,5069E-09	
	Arm.	1,2000E-03	1,9592E-07	1,1192E-08	
FEM	Cost.	6,5354E-05	2,7501E-08	6,1669E-08	
	Pol.	3,0749E-04	4,9475E-07	7,8304E-07	
	Exp.	1,9097E-06	1 ,2569E-09	2,4630E-09	
	Arm.	5,5633E-05	6,7756E-10	1,0328E-08	
DFM	Cost.	6,5354E-05	2,7501E-08	6,1669E-08	
	Pol.	3,8000E-03	6,0146E-08	7,7495E-07	
	Exp.	2,2441E-06	1,1750E-09	2,4618E-09	
	Arm.	7,5097E-04	2,6098E-08	9,9503 E-09	
78.					

Figura 4.1: Stima dell'errore: tabella riassuntiva

4.1 Carico costante



Figura 4.2: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)



Figura 4.3: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)



4.2 Carico armonico

Figura 4.4: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)



Figura 4.5: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)



4.3 Carico esponenziale

Figura 4.6: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)


Figura 4.7: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)

$-d^2u/dx^2 = 1$ $-d^2u/dx^2 = f$ 2. o exact e fvm ○ exact e fvm 0 1.5 0 0 1.5 u,exact u,exact 0.5 0.5 -0.5 L -0.5 L 0.4 0.5 0.6 0.7 Coord,x 0.2 0.3 0.8 0.9 0.8 0.9 0.4 0.5 0.6 0.7 Coord,x 0.1 0.2 0.3 0.1 (a) 5 elementi (b) 10 elementi $-d^2u/dx^2 = f$ $-d^2u/dx^2 = f$ 1.8 exact e fvm exact e fvm 1.6 1.6 1.4 1.4 1.2 1.2 1 n'exact 8.0 n n'exact 0.0 0.6 0.6 0.4 0.4 0.2 0.2 0 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 Coord,x 0.7 0.8 0.9 0.2 0.4 0.5 0.6 Coord,x 0.7 0.8 0.9 0. (c) 100 elementi (d) 1000 elementi $-d^2u/dx^2 = p(x)$ $d^2 u/dx^2 = p(x)$ 1.8 1.8 -f.e. solution exact solution – f.e. solution – exact solution 1.6 1.6 1.4 1.4 1.2 1.2 ⇒ 0.8 ⇒ 0.8 0.6 0.6 0.4 0.4 0.2 0.2 -0.2 L -0.2 l 0.5 0.6 0.8 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 0.4 0.7 0.9 0.4 (f) 10 elementi (e) 5 elementi $d^2u/dx^2 = p(x)$ $d^2u/dx^2 = p(x)$ 1.8 1.8 f.e. solution exact solution f.e. solution exact solution 1.6 1.6 1.4 1.4 1.2 1.2 1 ⇒ 0.8 0.8 0.6 0.6 0.4 0.4 0.2 0.2 -0.2 L 0 oŁ 0.8 0.6 0.7 0.8 0.9 0.4 0.5 0.6 0.7 0.9 0.5 0.2 0.3 0.2 0.3 0.4 (g) 100 elementi (h) 1000 elementi

4.4 Carico polinomiale

Figura 4.8: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione FEM (e,f,g,h)



Figura 4.9: Soluzione FVM (a,b,c,d) e soluzione DFM (e,f,g,h)

4.5 Stima dell'errore

La formula che si decide di utilizzare per la stima dell'errore è funzione di ciò che si vuole studiare. La diretta conseguenza di questa affermazione è che vi sono vari criteri per valutare la *bontà* di un metodo rispetto ad un altro. Al fine di stimare la rapidità di convergenza del metodo dei volumi finiti si è calcolato l'errore rispetto alla soluzione esatta attraverso la seguente relazione:

$$E = \frac{|\int_{l} (u_{ex} - u_{num}) \, dx|^2}{|\int_{l} (u_{ex}) \, dx|^2} \tag{4.1}$$

Quindi, date la soluzione esatta e del metodo per un medesimo numero di punti, si è proceduto al calcolo della differenza componente per componente dei vettori spostamento che compaiono nell'espressione (4.1) e alla successiva integrazione tramite Cavalieri-Simpson. Si è ripetuto tale procedimento per un numero di elementi di 10, 100 e 1000 elementi al fine di mettere i risultati in un grafico a scala *logaritmica*, che avesse in ascissa il numero di elementi N_{el} e in ordinata l'errore E (vedi figura 5.1). Tale procedimento è stato svolto per il metodo ai volumi finiti e per il metodo alle differenze finite.



Figura 4.10: Velocità di convergenza di FVM v
sDFM

4.5. STIMA DELL'ERRORE

Dalle figure riportate nei paragrafi precedenti si può notare che il FEMnei nodi scelti per discretizzare il dominio, calcola la soluzione esatta. Per cui utilizzando l'espressione (4.1) l'errore risulterebbe nullo. Per questo motivo, al fine di avere un confronto dei tre metodi si è deciso di utilizzare la formula (4.2). Vi è una piccola differenza rispetto alla (4.1), si è calcolato la differenza delle aree sottese dalle tre tipologie di soluzioni, anzichè l'area sottesa dalla curva descritta dall'errore. A tal fine si ricordi la differenza fondamentale tra FEM (e il DFM) e FVM, ovvero il FEM(e il DFM) assume una soluzione che varia linearmente da nodo a nodo, mentre il FVMassume una soluzione costante sul volume finito.

$$E = |\int_{l} u_{ex} \, dx - \int_{l} u_{num} \, dx|^2 \tag{4.2}$$

I risultati ottenuti sono quelli riportati nelle figure 4.11, 4.12 , 4.13 e 4.14.

Convergenza Fvm-Fem-Dfm: -u" = 10



Figura 4.11: Carico costante



Convergenza Fvm-Fem-Dfm: -u" = 90x^8+56x^6+4

Figura 4.12: Carico polinomiale



Convergenza Fvm-Fem-Dfm: u" = -exp(x)

Figura 4.13: Carico esponenziale



Convergenza Fvm-Fem-Dfm: -u" = 64sin(8x)

Figura 4.14: Carico armonico

Capitolo 5 Risultati delle analisi 2D

Le analisi sono state condotte tramite i programmi Matlab per tutte le tipologie di carico analizzate nei paragrafi precedenti. In input sono stati inseriti nelle *function* i valori riportati successivamente.

Il dominio è stato sempre ipotizzato essere quadrato $[a, b] \times [c, d] = [-1, 1] \times [-1, 1]$, il numero di partizioni scelte sui lati è stata $N_1 = N_2 = 10 e 100$. Le condizioni al contorno della membrana sono state sempre di spostamento nullo sui lati. Non si è preso in conto, nel fare girare le analisi, dei tempi di attesa della soluzione che costituiscono comunque un indice importante della bontà del metodo. Ciò perchè i tre programmi non sono stati ottimizzati al massimo e in maniera omogenea tra di loro, quindi l'attendibilità della misurazione sarebbe stata scarsa.

5.1 Stima dell'errore

Per l'equazione di Poisson si sono scelti tre criteri di stima dell'errore, uno quantitativo descritto dalla relazione già vista nel capitolo precedente (adattata al caso 3D),uno qualitativo visibile direttamente dal plot restituito dal codice Matlab e uno basato sui massimi delle funzioni spostamento. La prima stima si basa su una differenza tra il volume sotteso dalla curva che rappresenta la soluzione esatta e la curva che rappresenta la soluzione del metodo numerico. Concettualmente è lo stesso procedimento seguito per il caso monodimensionale.

$$E = \frac{(|(III_{ex} - III_{num})|^2)}{|III_{ex}|^2}$$
(5.1)

La seconda stima dell'errore è basata semplicemente su una differenza tra le coordinate z della soluzione esatta e le coordinate della soluzione numerica. I risultati si vedono quindi graficamente nei paragrafi successivi. La terza stima infine si basa sulla formula descritta dalla relazione (5.2). Individuato il punto in cui tra le due curve la distanza è massima la formula ne calcola il valore massimo in valore assoluto.

$$E_3 = max(max|exact - ORD|) \tag{5.2}$$

In cui exact e ORD sono rispettivamente il vettore soluzione analitica e il vettore soluzione numerica, scritti in forma matriciale. I risultati delle analisi sono riassunti nella tabella 5.1.

Metodo	Carico	10 elementi		100 elementi	
2		E	E ₃	E	E3
FVM	Pol. A	3,2629E-04	6,6000 E-03	2,3374E-08	9,6588E-05
	Pol. B	5,2798E+00	2,2560 E-01	5,1993E+00	3,4000E-03
	Arm. A	1,0000E+00	6,5100E-02	1,0000E+00	6,5726E-04
	Arm. B	1,0000E+00	5,7400E-02	1,0000E+00	8,0899E-04
	Exp. A	8,5668E-05	7,1100E-02	1,3077 E-05	7,8200E-02
	Exp. B	1,0869E+03	6,3309E+01	1,8876E+03	8,5353E+01
FEM	Pol. A	1,0870E-05	1,5800 E-02	1,4663E-09	1,5718E-04
	Pol. B	5,0470E+00	9,6500 E-02	5,1967E+00	9,8567 E-04
	Arm. A	1,0000E+00	9,3900 E-02	1,0000E+00	9,8746E-04
	Arm. B	1,0000E+00	9,6100E-02	1,0000E+00	1,1000E-03
	Exp. A	9,4967 E-06	6,5400 E-02	1,3493E-05	7,8100E-02
	Exp. B	2,1055E+03	9,8722E+01	1,9008E+03	8,5709E+01
DFM	Pol. A	2,8505E-04	7,7716E-16	3,5121 E-08	1,2657 E-14
	Pol. B	4,8661E+00	4,5600 E-02	5,1942E+00	4,6183E-04
	Arm. A	1,0000E+00	3,0400 E-02	1,0000E+00	3,2905E-04
	Arm. B	1,0000E+00	1,2255E+00	1,0000E+00	1,1855E+00
	Exp. A	4,0931 E-04	7,9500 E-02	1,1905E-05	7,8300E-02
	Exp. B	1,7362E+03	9,1807E+01	1,8981E+03	8,5649E+01

Figura 5.1: Stima dell'errore: tabella riassuntiva

La velocità di convergenza dei tre metodi è rappresentata nelle figure 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5.



Convergenza Fvm-Fem-Dfm: -div(grad(u(x,y)) = polA(x,y)





Figura 5.3: Carico esponenziale A: Errore E



Figura 5.4: Carico Polinomiale B: Errore E_3





Figura 5.5: Carico armonico A: Errore E_3

5.2 Carico Polinomiale A

5.2.1 Soluzione analitica



Figura 5.6: Soluzione esatta rappresentata con Matlab



5.2.2 Soluzione numerica

Figura 5.7: Soluzione FVM per 100 elementi



Figura 5.8: Soluzione FEM per 100 elementi



Figura 5.9: Soluzione DFM per 100 elementi



5.2.3 Errore

Figura 5.10: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.11: Stima qualitativa dell'errore ${\it FEM}$



Figura 5.12: Stima qualitativa dell'erroreDFM

5.3 Carico Polinomiale B

5.3.1 Soluzione analitica



Figura 5.13: Soluzione esatta rappresentata con Matlab

5.3.2 Soluzione numerica



Figura 5.14: Soluzione FVM per 100 elementi



Figura 5.15: Soluzione FEM per 100 elementi



Figura 5.16: Soluzione DFM per 100 elementi





Figura 5.17: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.18: Stima qualitativa dell'errore FEM



Figura 5.19: Stima qualitativa dell'error
eDFM

5.4 Carico Armonico A

5.4.1 Soluzione analitica



Figura 5.20: Soluzione esatta rappresentata con Matlab



5.4.2 Soluzione numerica

Figura 5.21: Soluzione FVM per 100 elementi



Figura 5.22: Soluzione $F\!EM$ per 100 elementi



Figura 5.23: Soluzione DFM per 100 elementi



5.4.3 Errore

Figura 5.24: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.25: Stima qualitativa dell'errore ${\it FEM}$



Figura 5.26: Stima qualitativa dell'erroreDFM

5.5 Carico Armonico B

5.5.1 Soluzione analitica



Figura 5.27: Soluzione esatta rappresentata con Matlab

5.5.2 Soluzione numerica



Figura 5.28: Soluzione FVM per 100 elementi



Figura 5.29: Soluzione FEM per 100 elementi



Figura 5.30: Soluzione DFM per 100 elementi

5.5.3 Errore



Figura 5.31: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.32: Stima qualitativa dell'errore FEM



Figura 5.33: Stima qualitativa dell'erroreDFM

5.6 Carico Esponenziale A

5.6.1 Soluzione analitica



Figura 5.34: Soluzione esatta rappresentata con Matlab



5.6.2 Soluzione numerica

Figura 5.35: Soluzione FVM per 100 elementi



Figura 5.36: Soluzione $F\!EM$ per 100 elementi



Figura 5.37: Soluzione DFM per 100 elementi



5.6.3 Errore

Figura 5.38: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.39: Stima qualitativa dell'errore FEM



Figura 5.40: Stima qualitativa dell'erroreDFM

5.7 Carico Esponenziale B

5.7.1 Soluzione analitica



Figura 5.41: Soluzione esatta rappresentata con Matlab


5.7.2 Soluzione numerica

0.5

0

ybar

-0.5

-1 -1

Figura 5.42: Soluzione FVM per 100 elementi

-0.5

0

xbar

0.5



Figura 5.43: Soluzione FEM per 100 elementi



Figura 5.44: Soluzione DFM per 100 elementi

5.7.3 Errore



Figura 5.45: Stima qualitativa dell'errore $FV\!M$



Figura 5.46: Stima qualitativa dell'errore FEM



Figura 5.47: Stima qualitativa dell'erroreDFM

Capitolo 6 *FVM*: Applicazioni all'ingegneria

Questo capitolo è il risultato di una ricerca di articoli nella bibliografia recente inerenti alle applicazioni del metodo ai volumi finiti nell'ingegneria. Tale ricerca ha prodotto un numero consistente di articoli specialistici che raramente hanno riguardato le equazioni ellittiche analizzate in questo lavoro. Le applicazioni più frequenti vertono sul campo della fluidodinamica ed in particolare sulle equazioni iperboliche. Gli articoli orientati allo studio di problemi ellittici sono stati scritti da matematici e quindi mirano allo studio della convergenza dal punto di vista prettamente teorico.

6.1 Flusso all'interfaccia di due mezzi porosi

Il primo esempio applicativo del metodo studiato in questa relazione riguarda un problemo idrodinamico che si verifica nel sottosuolo. Si tratta appunto dello studio numerico del flusso all'interfaccia di due mezzi porosi. Lo schema presentato ma non implementato è quello ai volumi finiti. L'articolo infatti persegue l'obiettivo di risolvere con delle modalità alternative ai volumi finiti il problema di flusso tra due roccie porose. Le alternative trovate si basano su un problema associato chiamato di *Riemann*, la cui soluzione analitica è data dal flusso di *Godunov* e la soluzione approssimata è data dall' *upstream mobility flux*. Se si trascurano gli effetti della capillarità, il flusso in un mezzo poroso è modellato attraverso delle equazioni non lineari iperboliche. Il caso trattato nell'articolo farà riferimento al caso in cui il mezzo sia discontinuo. In questo caso la funzione di flusso della legge di conservazione è discontinua rispetto alla variabile spaziale. L'articolo è indirizzato verso il calcolo del flusso numerico all'interfaccia tra le due tipologie di roccia.

6.1.1 Introduzione

Nella simulazione di un flusso bifase in un mezzo poroso, il mezzo poroso può essere non omogeneo. Il dominio di calcolo è diviso in diversi sottodomini

corrispondenti a differenti tipi di roccia separati attraverso linee o superfici lungo le quali, non solo la porosità e la permeabilità assoluta cambiano, ma la permeabilità relativa e le funzioni della pressione di capillarità cambiano molto da un sottodominio all'altro. Solitamente il dominio di calcolo è discretizzato tale che il contorno tra i sottodomini con le differenti tipologie di roccia coincidono con le condizioni delle singole celle.

Se si utilizza un metodo alle differenze finite a celle centrate o un metodo ai volumi finiti si ha da calcolare lungo i bordi il flusso numerico che rappresenta il trasferimento tra le singole celle. Come già detto nel seguito si trascurerà gli effetti della capillarità. Con differenti tipi di rocce questo è un caso in cui il problema è instabile e di limitato valore fisico. Nel codice implementato può essere introdotta una pressione di capillarità estremamente ridotta, a tal proposito è interessante vedere cosa succede al flusso numerico nel caso di pressione di capillarità nulla. Le analisi si limitano al caso monodimensionale.

Il flusso numerico che è ampiamente usato nell'ingegneria petrolifera è il flusso di mobilità a monte. Questo flusso è progettato solamente per flussi bifase da considerazioni fisiche ed è giustificato matematicamente nel caso in cui il mezzo sia inomogeneo. Nell'articolo viene mostrato sperimentalmente che il flusso restituisce una risposta corretta comparandolo con un altro, basato sulla tecnica di Godunov, e per la quale una giustificazione matematica può essere data in termini del solutore di Riemann.

6.1.2 Equazioni del flusso bifase

L'equazione iperbolica non lineare scalare che permette di modellare un flusso bifase è la seguente:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{6.1}$$

in cui si definisce ϕ la porosità della roccia, $S = S_1$ è la sturazione della fase 1 la quale sta nell'intervallo limitato $[S_m, S_M]$. La funzione di flusso f è la velocità di *Darcy* della fase 1.

$$f = \varphi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[q + (g_1 - g_2)\lambda_2 \right]$$
(6.2)

Posto $q = \varphi_1 + \varphi_2$ che denota la velocità di Darcy totale vale anche che:

$$\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[q + (g_2 - g_1)\lambda_1 \right] \tag{6.3}$$

Avendo assunto un flusso incompressibile , la velocità di Darcy totale q è indipendente dalla variabile spazio x. La permeabilità assoluta K può dipendere su x e le quantità k_l e λ_l sono funzioni di S che soddisfano le seguenti proprietà. $k_1 \in \lambda_1$ sono funzioni crescenti di S tale che:

$$k_1(S_m) = \lambda_1(S_m) = 0 \tag{6.4}$$

mentre $k_2 \in \lambda_2$ sono funzioni decrescenti di S tale che:

$$k_2(S_M) = \lambda_2(S_M) = 0 \tag{6.5}$$

La via più utilizzata per discretizzare l'equazione (6.1) è uno schema alle differenze finite o volumi finiti a celle centrate (equazione).

$$\frac{\phi_i}{\Delta t} \left(S_i^{n+1} - S_i^n \right) + \frac{1}{h} \left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0(6.6) \right)$$

in cui *i* denota l'indice di cella, i + 1/2 e i - 1/2 sono gli indici dei punti estremali della cella *i*-esima, Δt e *h* sono gli intervalli di discretizzazione del tempo e dello spazio che soddisfano le condizioni al contorno.

6.1.3 Flusso di Godunov

Il flusso numerico all'interfaccia tra le due celle è funzione dei valori a destra e sinistra della saturazione.

$$f_{i+1/2} = F(S_i, S_{i+1}) \tag{6.7}$$

Che è calcolato risolvendo in maniera esatta o approssimata il problema di Riemann evidenziato da (S_i, S_{i+1}, f) , associato ai dati iniziali S_i, S_{i+1} e alla funzione di flusso f. Per far si che lo schema ai volumi finiti associato sia convergente, la funzione F deve essere consistente, monotono e *Lipshitziana*. Il flusso di Godunov è definito come segue:

$$F^{G}(a,b) = \begin{cases} minf & if \ a < b \\ maxf & if \ a \ge b \end{cases}$$

E' ottenuto risolvendo in maniera esatta il problema associato di Riemann. I valori di $a \in b$ stanno ad indicare i valori estremi della saturazione.

6.1.4 Upstream mobility flux

Un'altra tipologia di funzione descrittiva del flusso numerico è quella considera il *upstream mobility flux*. E' una soluzione ad-hoc per i flussi bifase nei mezzi porosi, inventato per l'ingegneria petrolifera da semplici considerazioni fisiche, e corrisponde alla soluzione approssimata del problema di Riemann. La formulazione è esplicitata nell'equazione (6.8).

$$F^{UM}(a,b) = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_1^* + \lambda_2^*} [q + (g_1 - g_2)\lambda_2^*]$$

$$\lambda_l^* = \begin{cases} \lambda_l(a) & se \,\phi_l > 0\\ \lambda_l(b) & se \,\phi_l \le 0 \end{cases}$$
(6.8)

Come si può notare il flusso è calcolato utilizzando le variazioni delle fasi le quali sono a monte rispetto al flusso delle fasi. Questo flusso è stato dimostrato che possiede tutte le proprietà richieste per la convergenza del problema associato allo schema ai volumi finiti descritto nel secondo paragrafo. Quando due fasi avvengono nella stessa direzione, il flusso di Godunov e il upstream mobility flux restituiscono la stessa risposta, ciò non è altrettanto vero quando la direzione delle fasi è opposta.

6.1.5 Conclusioni

116

Il calcolo del flusso numerico all'interfaccia tra due tipologie di roccie è comparabile con la soluzione esatta del problema associato di Riemann. Questo flusso è basato sul flusso di Godunov. Questo flusso numerico è stato paragonato, nel calcolo ai volumi finiti, all' upstream mobility flux che è comunemente utilizzato nell'ingegneria petrolifera. Quest ultimo è comunque complesso da implementare, e sebbene non sia giustificabile matematicamente, da dei risultati che convergono alla soluzione esatta anche se molto lentamente. Questo raffronto dimostra sperimentalmente la validità della upstream mobility flux nel caso di due tipologie di roccia. Quando l'obiettivo da perseguire è l'accuratezza dei risultati, il flusso basato sul flusso di Godunov viene preferito.

6.2 Bio-Trasferimento di calore

Un esempio applicativo del metodo ai volumi finiti è stato trovato nel campo dell'ingegneria biomedica. Si tratta di un *report* riguardante la simulazione della distribuzione di temperatura all'interno dell'incubatrice nei bambini nati prematuramente al variare del tempo. L'esigenza di studiare questo fenomeno da parte di tre ricercatori tedeschi è nata dai dati oggettivi delle nascite premature in Germania (55000 su circa 800000 nascite all'anno). Le incubatrici sono dispositivi utilizzati per regolare le perdite di calore e liquidi nei neonati e per evitare la nascita di infezioni e hypoxemia. La termoregolazione del corpo umano viene modellata attraverso l'equazione del bio-trasferimento di calore la quale tiene conto di condizioni al contorno di *Neumann*. La soluzione numerica del problema del trasferimento di calore è calcolata attraverso il Metodo ai volumi finiti. La discretizzazione nello spazio è restituita da *CFD*, un programma che genera mesh tridimensionali. Le parti fondamentali in cui si articola la trattazione sono quattro. La prima riguarda la modellazione 3D del neonato, la seconda descrive il modello matematico adottato, la terza risolve con i volumi finiti tale modello e la quarta trae le conclusioni dalle analisi effettuate.

6.2.1 Modello matematico

Il problema matematico che si è posto davanti ai ricercatori tedeschi è un *Initial boundary value problem* (IBVP) dovuto all'equazione di *bio-heat-transfer-equation* (BHTE) con delle condizioni iniziali e al bordo di Neumann. La *BHTE* descrive la distribuzione di temperatura all'interno del neonato prematuro tenendo conto del trasferimento molecolare di calore,

della produzione di calore dovuta al metabolismo e al trasferimento di calore dovuto al flusso di sangue e alla perdita di liquidi data dalla respirazione. La scelta di un metodo ai volumi finiti per risolvere la BHTE è stata immediata perchè è direttamente applicabile alla forma integrale dell'equazione stessa e in secondo luogo perchè l'utilizzo di griglie non strutturate è necessario al fine di affrontare geometrie realistiche. I metodi ai volumi finiti sono formulati su volumi di controllo e quindi possono essere facilmente occupati su griglie non strutturate. In accordo con la legge fondamentale del trasferimento molecolare di calore, il flusso di calore è dato attraverso la posizione (6.9).

$$J: \bar{D} \times \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^3, \qquad J(x,t) := -\lambda(x) \cdot \nabla T(x,t) \tag{6.9}$$

In cui la divergenza del campo -J descrive il trasferimento molecolare di calore e λ rappresenta la *conduttività*. Gli operatori differenziali ∇ e *div* si riferiscono a una differenziazione solamente rispetto allo spazio. I termini $Q^{Met}(T, x, t), Q^{Blood}(T, x, t), Q^{RW}(x)$ modellano i flussi di calore in corrispondenza della pelle, ovvero la perdita di acqua per traspirazione e il trasferimento di calore per radiazione, convezione e conduzione rispettivamente. Posto che $k(x) := \rho(x)c(x)$ con *c* calore specifico e ρ densità, la distribuzione di temperatura *T* soddisfa la BHTE.

$$k(x)\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = div(-J)(x,t) + Q^{Met}(x,t) + Q^{Blood}(x,t) + Q^{RW}(x) \quad (6.10)$$

Le condizioni iniziali e al contorno sono:

$$\begin{cases} T(x,0) = T_0(x), & x \in D \\ < J(x,t), n(x) > = M^{TW}(x,t) + M^r(x,t) + M^{cv}(x,t) + M^{cd}(x,t) \\ (x,t) \in \partial_r D \times \mathbb{R}^*_+ \end{cases}$$

La soluzione esatta dell'equazione (6.10) si può calcolare solo in pochi casi. Il trattamento numerico quindi diventa una via frequentemente percorsa.

6.2.2 Soluzione ai volumi finiti

L'idea base è quella di eliminare i termini divergenza applicando il teorema di *Gauss* (o della divergenza). Come risultato si perviene ad una forma analoga ma di ordine ridotto di uno. Inoltre il metodo ai volumi finiti permette di analizzare geometrie complesse e griglie non strutturate, condizione ideale per la BHTE. L'analisi inizia con una discretizzazione nel tempo e nello spazio.

La prima discretizzazione produce dopo alcuni semplici passaggi la relazione evolutiva (6.11) definita per ogni volume di controllo σ_i .

$$\frac{du_i}{dt}(t) = \frac{1}{|\sigma_i|} \left(L_i^{IFL}(t) + L_i^{RFL}(t) + L_i^Q(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \quad i \in \{1, ..., N\}$$
(6.11)

In cui le funzioni $L_i^{IFL}(t)$, $L_i^{RFL}(t)$ e $L_i^Q(t)$ si approssimano con delle formule di quadratura e si esplicitano come segue:

$$\begin{split} L_i^{IFL}(t) &= \sum_{j=1}^N i \int_{f_{ij}} \langle v(x,t), n^i(x) \rangle \ dS(x) \quad t \in \mathbb{R}^*_+, \quad i \in \{1, ..., N\} \\ L_i^{RFL}(t) &= \sum_{j=1}^{\bar{N}_i} \int_{\bar{f}_{ij}} \langle v(x,t), n^i(x) \rangle \ dS(x) \quad t \in \mathbb{R}^*_+, \quad i \in \{1, ..., N\} \\ L_i^Q(t) &= \int_{\sigma_i} Q(x,t) \ dx \quad t \in \mathbb{R}^*_+, \quad i \in \{1, ..., N\} \end{split}$$

$$(6.12)$$

E la funzione v(x,t) è stata definita insieme alle funzioni $\Phi(x,t)$ e Q(x,t) all'inizio dell'integrazione.

$$v(x,t) = \frac{\lambda(x)}{k(x)} \nabla u(x,t) - \frac{\lambda(x)u(x,t)}{k^2(x)} \nabla k(x)$$

$$\Phi(x,t) = M^{TW}(x,t) + M^r(x,t) + M^{cv}(x,t) + M^{cd}(x,t), \quad (x,t) \in \partial_r D \times \mathbb{R}^*_+$$

$$Q(x,t) = Q^{Met}(x,t) + Q^{Blood}(x,t) + Q^{RW}(x), \quad (x,t) \in \partial_r D \times \mathbb{R}^*_+$$

(6.13)

Il metodo usato per l'integrazione nel tempo è chiamato *semi-implicit multistep method* BDF. Questo è stato scelto perchè permette step di tempo relativamente grandi. Non si entrerà nel dettaglio di questa fase perchè non interessante per il fine di questa tesi.

6.2.3 Conclusioni

La simulazione delle distribuzioni della temperatura all'interno del corpo umano è stata quindi ottenuta grazie al metodo ai volumi finiti. Questo metodo è un miglioramento degli articoli precedenti perchè grazie al FVM è possibile trattare geometrie complesse e quindi più realistiche. L'utilizzo del metodo BDF garantisce la stabilità e l'accuratezza dell'integrazione nel tempo. I test numerici mostrano dei risultati attendibili ottenuti con tempi di calcolo moderati. Il metodo sviluppato è quindi un corretto strumento per analizzare sistematicamente la termoregolazione nel neonato prematuro.

6.3 Propagazione di *tsunami* e inondazioni

La propagazione degli tsunami è descritta in maniera accettabile dalle cosiddette *Shallow water equations*. L'analisi numerica di tsunami verificatisi nel passato suggerisce di trattare queste equazioni nella loro più pertinente forma conservativa, come legge di conservazione integrale. L'articolo analizzato sviluppa un metodo ai volumi finiti per trattare diversi regimi di flusso degli tsunami. Questi metodi si adattano bene per il regime di inondazione, sono robusti in presenza di forti gradienti o di regioni asciutte e possono cogliere l'inondazione della linea di costa e le caratteristiche di quello che avviene prima. Inoltre questi metodi sono ben equilibrati nel senso che possono modellare adeguatamente la propagazione su larga scala. Per trattare con diverse scale spaziali, i ricercatori di Washington hanno utilizzato una algoritmo adattivo migliorato sviluppato per la dinamica dei gas, in cui spesso forti variazioni sono altamente localizzate in un dato istante di tempo ma avvengono in tutto il dominio. La tipologia di schema numerico ai volumi finiti presentato nell'articolo è spesso utilizzato per risolvere le equazioni iperboliche, specialmente le SWE in forma non lineare. Le difficoltà dei metodi numerici che derivano dall'utilizzo di queste equazioni dipendono dai vari regimi di flusso della soluzione che può variare di molto. Molti metodi sono stati sviluppati per le SWE, in ogni caso la bontà di un trattamento numerico rispetto ad un altro dipende dal regime di flusso che si deve studiare.

6.3.1 Le Shallow Water Equations

Le SWE possono essere derivate seguendo diverse strade, tutte dipendono dall'assunzione fondamentale che il flusso verticalmente è idrostatico o equivalentemente che l'accelerazione verticale delle particelle d'acqua è trascurabile. La validità di questa assunzione può essere dimostrata per flussi con elevate lunghezze d'onda rapportate alla profondità. Data per accettata questa approssimazione la forma generale e fisica più valida delle SWE è una legge integrale di conservazione per la *massa* e il *momento*, che in 1D si scrive come di seguito:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + (hu)_{xl}^{xr} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + \left(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2\right)_{xl}^{xr} = -\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} ghb_x dx$$
(6.14)

in cui h è la profondità dell'acqua, u è la velocità orizzontale, g è la costante di gravità e b altezza della superficie in fondo. La legge di conservazione integrale (6.14), è spesso usata per dedurre una serie di equazioni alle derivate parziali per la massa e il momento.

$$\begin{bmatrix} h\\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu\\ 1/2gh^2 + hu^2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0\\ -ghb_x \end{bmatrix}$$

dove il pedice sta ad indicare una differenziazione. Questa serie di *PDEs* può essere manipolata in seguito per produrre una forma più nota delle shallow water equations.

$$\begin{cases} \eta_t + u \left(\eta - b \right)_x = 0\\ u_t + u(u)_x + g \eta_x = 0 \end{cases}$$

 η è l'elevazione della superficie di acqua, $\eta = h + b$. Il sistema appena scritto è la forma più comunemente utilizzata per modellare gli tsunami perchè è meno problematica da maneggiare per propagazione di onde su larga scala.

6.3.2 Sistemi iperbolici di leggi di conservazione

Il sistema trattato nella sezione precedente appartiene a una più ampia classe di leggi di conservazione della forma:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)\,dx + f(q(x_2,t)) - f(q(x_1,t)) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(q,x)\,dx, \quad \forall (x_1,x_2)$$
(6.15)

in cui $q \in \mathbb{R}^m$ è un vettore di quantità che si conservano, $f(q) \in \mathbb{R}_m$ è il flusso di queste quantità e ψ è il termine che sta ad indicare la sorgente. Se la soluzione q(x,t) è differenziabile allora (6.15) può essere manipolata nella forma seguente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[q_t(x,t) + f(q(x,t))_x - \psi(q,t) \right] \, dx = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \tag{6.16}$$

la quale implica un'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$q_t(x,t) + f(q(x,t))_x = \psi(q,t)$$
(6.17)

nel caso ψ non nullo, la (6.15) è spesso riferita a una legge di bilancio dovuta al contributo dato dalla sorgente. In ogni caso se si prende la (6.15) come una legge di conservazione e si analizza il caso speciale $\psi = 0$ si ottiene:

$$q_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0 (6.18)$$

che è una legge di conservazione *omogenea*. I sistemi (6.17) e (6.18) sono iperbolici se lo Jacobiano f'(q) ha autovalori reali e una serie completa di autovettori. Questi fenomeni che descrivono la propagazione di onde sono spesso posti attraverso i sistemi iperbolici e generalmente le velocità d'onda sono gli autovalori dello Jacobiano. Le shallow water equations sono iperboliche con autovalori \sqrt{gh} .

6.3.3 Metodo ai volumi finiti

In due dimensioni la dimensione del volume finito è tipicamente un rettangolo, $K_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$, ma si possono pensare anche forme più complicate. Per modellare gli tsunami è stata scelta una griglia Cartesiana uniforme, utilizzando le coordinate di latitudine e longitudine, direttamente dalla griglia della mappa del mondo. Varie classi di metodi numerici sono stati sviluppati con delle difficoltà per risolvere i sistemi iperbolici del tipo (6.15), la maggior parte di questi sono metodi ai volumi finiti. La soluzione numerica ai volumi finiti consiste in una funzione continua e costante Q_i^n che approssima il valore medio della soluzione $q(x, t^n)$ in ogni cella della griglia K_{ij} . Un metodo conservativo ai volumi finiti aggiorna continuamente la soluzione differenziando i flussi numerici al bordo di ogni cella della griglia.

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right]$$
(6.19)

in cui

$$F_{i-1/2}^{n} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n}}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt$$
(6.20)

е

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t^n) \, dx$$
 (6.21)

Si noti che (6.19) è una diretta rappresentazione discreta della legge di conservazione integrale (6.15) su ogni volume di controllo, utilizzando approssimazioni dei flussi al contorno mediate nel tempo. La proprietà essenziale del metodo ai volumi finiti viene dall'approssimazione dei flussi numerici fatta con la posizione (6.20).

6.3.4 Simulazione dello tsunami di Sumatra

La scala globale degli tsunami è simile nel senso che le onde si propagano in tutto il dominio avendo bisogno quindi di vari livelli di raffinatezza per i diversi istanti di tempo e spazio. Questi algoritmi necessitano quindi di una discretizzazione che evolve nel tempo e nello spazio nel senso che varia il grado di raffinatezza in funzione dell'area di dominio che l'onda sta percorrendo. Il metodo numerico sviluppato è stato implementato nel programma di calcolo *TsunamiClaw* una parte disponibile e gratuita del pacchetto software *Clawpack*. Il codice adattivo è stato utilizzato per modellare lo tsunami che si è generato nell'Oceano Indiano nel 2004. Lo tsunami è numericamente generato da un movimento dinamico del fondo del mare in accordo col modello spazio-temporale della faglia di rottura di Sumatra-Andaman. La parte delle analisi che ha portato via molto tempo è stata la modellazione della batimetria della regione dell'Oceano Indiano che è stata digitalizzata manualmente partendo dalle carte nautiche. Le analisi sono state condotte in fasi successive raffinando la dimensione della griglia e hanno portato ai risultati visibili di nella figura 6.1.



Figura 6.1: Simulazione dello tsunami nell'Oceano Indiano con tre tipi di griglie

6.4 Combustione nel motore a scoppio

L'ultimo articolo scelto tratta la modellazione numerica del processo di combustione in un motore a scoppio. L'obiettivo principale che ha motivato questo studio è stato quello di valutare la produzione di ossidi di azoto durante il ciclo di lavoro del motore stesso. Vi sono dei modelli di flusso per i gas comprimibili, per il trasporto di calore e di massa e per le reazioni chimiche. Il modello di flusso utilizzato per realizzare il report in esame è tratto dalla soluzione delle equazioni di *Navier* e *Stokes* e dalle equazioni di *continuità* attraverso un metodo agli elementi finiti. Il problema del trasporto è descritto attraverso le *advection* ed *energy equation* modellate con un metodo ai volumi finiti. Le reazioni chimiche sono modellate localmente in ogni volume finito.

6.4.1 Modello fisico

Il modello è governato dalle *convection equations*, dall'equazione di bilancio della massa, dall' energy equation , dall'equazione di trasporto di massa, e dalle equazioni che descrivono le reazioni chimiche, le quali sono risolte in regioni limitate dipendenti dal tempo e con condizioni al contorno e condizioni iniziali. Vengono quindi utilizzate le equazioni di Navier-Stokes (6.22) e le convection equation. Si trascura il termine gravità perché non ha apprezzabili effetti.

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot grad) u = -\frac{1}{\rho}gradp + \frac{\eta}{\rho}\Delta u \tag{6.22}$$

In questo caso u denota il vettore flusso delle velocità, p è la pressione, ρ è la densità di massa del gas ed $\eta(T)$ è la viscosità dinamica. L'equazione di continuità (bilancio di massa) può essere usata nella formula più generale:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho u) = 0 \tag{6.23}$$

L'equazione semplificata dell'energia modella il *heat advection* e la produzione attraverso la combustione e le forze meccaniche.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + div(\rho Eu) = -div(pu) + \rho uF + \rho q \qquad (6.24)$$

Dove E denota la densità dell' energia totale del gas $E = u + 1/2u^2$, T è la temperatura, q denota la quantità di energia prodotta durante la reazione chimica ed F denota la densità delle forze meccaniche esterne. Il trasporto di massa è modellato attraverso la 'advection equation':

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_i) + div(\rho c_i u) = 0 \tag{6.25}$$

Dove i c_i indicano la concentrazione dello *i*-esimo gas nella miscela. La reazione chimica può essere descritta attraverso un'equazione chimica generale che ha la seguente struttura:

$$k_{l1}A_{l1} + k_{l2}A_{l2} + k_{l3}A_{l3} + \dots \quad \xrightarrow{time t} \quad k_{r1}A_{r1} + k_{r2}A_{r2} + k_{r3}A_{r3} + q \quad (6.26)$$

Il tempo t speso per la reazione chimica dipende dalla temperatura T, dalla pressione p e dalla tipologia delle quantità reagenti. L'energia prodotta

q dipende solamente dalle quantità chimiche che hanno reagito. L'equazione che mette in relazione temperatura, pressione e densità di massa è l' equazione di stato:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{6.27}$$

in cui R è una costante che dipende solamente dal tipo di gas.

La dipendenza dal tempo del dominio complica la formulazione matematica dello schema numerico. Il problema (6.22) - (6.27) è quindi diviso in tre problemi principali: flusso, trasporto di massa e calore, e reazioni chimiche. Ognuno di questi è modellato separatamente. I modelli sono risolti in un ciclo e gli output che escono da un modello sono poi gli input per gli altri.

6.4.2 FVM per l'equazione del trasporto

Le equazioni del trasporto di energia (6.24) e di massa (6.25) sono risolte attraverso il metodo ai volumi finiti. La forma del volume finito è quella mostrata nella figura 6.2.



Figura 6.2: Forma del volume finito in 3D

I termini a destra dell'uguale nella (6.24) sono modellati separatamente. Il metodo allora risulta nella soluzione di un largo numero di semplici equazioni.

$$\frac{V^e}{\Delta t}\rho^e c_i^e + \sum_{l=0}^4 c_i^{el} f_l^e = \frac{V^e}{\Delta t}\rho^{e0} c_i^{e0}, \qquad \frac{V^e}{\Delta t}\rho^e E^e + \sum_{l=0}^4 E^{el} f_l^e = \frac{V^e}{\Delta t}\rho^{e0} E^{e0}$$
(6.28)

dove ρ^e , c_i^e , e E^e denotano rispettivamente la densità media di massa, la concentrazione media della *i*-esima parte della miscela di gas e la densità dell'energia totale nel volume finito. V_e significa il volume del volume finito e, Δt è lo step di tempo, l'esponente $_0$ significa le condizioni iniziali per il calcolo del time step e infine f_{l^e} è l'estremo flusso attraverso la *l*-esima faccia del volume e, e:

$$c_i^{el} = \begin{cases} c_i^e & for f_l^e > 0\\ c_i^{e_l^*} else \end{cases}$$

$$E^{e_l} = \begin{cases} E^e & for f_l^e > 0\\ E^{e_l^*} else \end{cases}$$

Dove e_l^* denota il volume finito vicino a e attraverso la sua l-esima faccia.

6.4.3 Conclusioni

Il modello non è ancora in grado di calcolare la produzione di ossido di azoto. Il presente programma assume gas combustibile, non modella i processi di diffusione e turbolenti e ha anche altre limitazioni. La calibrazione mostra che il comportamento globale del modello è buono e gli autori sono ottimisti riguardo le previsioni sulle future capacità del metodo. Diversi test di calibrazione sono stati fatti e i risultati mostrano che il modello è in grado di produrre globalmente dati rilevanti. I test hanno mostrato anche la necessità di alcuni cambiamenti nel modello, specialmente nel ciclo di iterazioni del modello di flusso. Il modello non include la diffusione di trasporto e non include le turbolenze, e non considera il combustibile fluido.

126 CAPITOLO 6. FVM: APPLICAZIONI ALL'INGEGNERIA

Capitolo 7 Conclusioni

Sono stati implementati i tre metodi studiati per l'equazioni ellittiche fino al caso bidimensionale. In una dimensione si è notato che i tempi macchina per ottenere la soluzione numerica sono praticamente identici e si arriva rapidamente a convergenza per tutti e tre i metodi a prescindere dal termine noto che si decide di esaminare. La prima stima dell'errore scelta ha dimostrato che il FEM approssima esattamente nei nodi della discretizzazione la soluzione esatta a differenza del FVM e del DFM.

Nel caso piano si è verificato che a seconda della stima dell'errore scelta si arriva a convergenza per tutte le tipologie di carico, fatto salvo il *carico* esponenziale B. Seppure la forma e l'ordine di grandezza della soluzione analitica viene approssimata dai metodi implementati, il valore di picco esatto è comunque tra il 40 e il 60 per cento più basso rispetto a quello dei metodi. Ciò è dovuto agli elevati gradienti localizzati nello spigolo della membrana che i gli schemi numerici non riescono ad approssimare. Un'altra causa è l'ipotesi di condizioni al contorno nulle sui lati, che determina un salto della soluzione in corrispondenza dello spigolo, dal valore massimo al valore zero in poco spazio. Come rimedio a questo problema si propone una mesh non *uniforme*, molto fitta nel vertice della membrana e rada negli altri. Altro rimedio proposto sono l'implementazione di condizione al bordo di Neumann come alternativa a quelle di Dirichlet al fine di cogliere gli elevati gradienti della soluzione al bordo. Altro limite dedotto dai programmi implementati è stato il vincolo sul numero di elementi della mesh, fissato ad un massimo di 100. Si è notato infine, per quanto riguarda la convergenza dei metodi, che passando dall'1D al 2D nel caso di *carico polinomiale*, le differenze finite sono da preferire rispetto al FVM e al FEM. In ogni caso i programmi si possono migliorare al fine di avere un rendimento di calcolo massimo per qualsiasi tipo di termine noto.

In ultima analisi dalla bibliografia si sono trovati pochi esempi applicativi del FVM alle equazioni ellittiche. Gli articoli letti riguardano la soluzione di questa categoria di equazioni mediante il FEM o più raramente il DFM. I volumi finiti sono frequentemente utilizzati nel campo dell'ingegneria meccanica, dell'ingegneria idraulica e nell'ingegneria geotecnica, laddove i fenomeni studiati si basano su equazioni o sistemi di equazioni *iperboliche*. In generale si può affermare che l'utilizzo di un metodo piuttosto che un altro è spesso dovuto all'abitudine più che alla praticità, quindi laddove il metodo agli elementi finiti è largamente utilizzato con buoni risultati da oltre 50 anni (vedi per esempio l'Ingegneria Strutturale) non vi è la necessità di sperimentare nuove metodologie, cosiccome laddove il metodo ai volumi finiti è utilizzato da più di 20 anni (vedi per esempio l'Ingegneria Idraulica) con buoni risultati non vi è la necessità di applicare il *FEM* o il *DFM* (utilizzato da i primi del novecento).

Bibliografia

- R. Eymard, T. Gallouet and R. Herbin (2003), *Finite Volume Methods*, LATP, University of Marseilles.
- [2] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu (2004), The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition.
- [3] K.J. Bathe (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Massachusetts Institute of Technology.
- [4] C. Carmignani (2008), Introduzione al metodo degli elementi finiti, Università di Pisa, Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Nucleare e della Produzione.
- [5] Quarteroni, Sacco e Saleri (2005), Matematica numerica, Springer.
- [6] F. Auricchio (2007), Dispense del corso di Metodi numerici per l'analisi di Materiali e Strutture, Pavia.
- [7] P. Venini (2006), Dispense del corso di Teoria delle strutture, Pavia.
- [8] C. Lovadina (2005), Dispense del corso di Calcolo Numerico, Pavia.
- [9] J. Jaffré (2007), Numerical calculation of the flux across an interface between two rock types of a porous medium for a two-phase flow, Le Chesnay Cédex, France.
- [10] M. Ludwig, J. Koch e B. Fischer (2007), An application of the finite volume method to the bio-heat-transfer-equation in premature infants, University of Lubeck, Germany.
- [11] D.L. George e R.J. Le Veque (2006), Finite volume methods and adaptive refinement for global tsunami propagation and local inundation, University of Washington, Department of Applied Mathematics, U.S.A.
- [12] J. Sembera e J.Maryska (2002), Discussion on numerical modelling of physical processes in a combustion engine, University of Liberec, Department of Modelling of Processes, Czech Republic.
- [13] F. Boyer e F. Hubert (2002), Finite Volume Method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities, University of Provence, France.

- [14] S. Bartels, C. Carstensen e A. Hecht (2005), 2D Isoparametric FEM in Matlab, Research Center MATHEON, Berlin.
- [15] L. Agbezuge, Finite Element Solution of the equation with Dirichlet Boundary Conditions in a rectangular domain, Rochester Institute of Technology, Rochester, NY.
- [16] L.T. Nguyen (2008), Finite Difference Method for Boundary Value Poisson Problem, University of California, Berkeley.
- [17] M.L. Smedinghoff (2005), Solving the Poisson Equation with Multigrid, Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, USA .