

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
DIPARTIMENTO DI MECCANICA STRUTTURALE

USO DI MATERIALI  
AUTODIAGNOSTICANTI  
PER LA DETERMINAZIONE  
DELLO STATO DI DANNO  
DI ELEMENTI STRUTTURALI

Relatore: Chiar.mo Prof. Ferdinando Auricchio

Tesi di Laurea di  
Fabio Sarchi

Anno Accademico 1999/2000

*A mio padre, a mia madre  
a mia sorella, ai miei nonni*

# Indice

<b>Sommario</b>	<b>iii</b>
<b>1 Materiali autodiagnostici: stato dell'arte</b>	<b>1</b>
1.1 Le fibre di carbonio . . . . .	2
1.2 La ricerca . . . . .	2
1.3 I composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica	2
1.3.1 Prove a trazione . . . . .	3
1.3.2 Prove a flessione . . . . .	11
1.4 Calcestruzzi rinforzati con fibre di carbonio . . . . .	13
1.4.1 Prove di carico sulle malte di cemento . . . . .	13
1.4.2 Prove di carico sui calcestruzzi . . . . .	17
<b>2 Corrente elettrica stazionaria: un semplice modello</b>	<b>21</b>
2.1 Il campo elettrostatico . . . . .	21
2.1.1 Il flusso del campo elettrostatico . . . . .	23
2.1.2 Il potenziale elettrico . . . . .	24
2.2 Corrente elettrica stazionaria . . . . .	26
2.3 Cenni di termodinamica . . . . .	29
2.3.1 Il primo principio della termodinamica . . . . .	29
2.3.2 Il secondo principio della termodinamica . . . . .	30
2.4 La trasmissione del calore . . . . .	31
2.4.1 Conduzione termica . . . . .	32
2.5 Parallelo fra campo termico e campo elettrico . . . . .	36
2.6 Analisi della trasmissione del calore col metodo degli elementi finiti . . . . .	36
2.7 Analisi del passaggio della corrente elettrica stazionaria . . . . .	39
<b>3 Legge di variazione della resistività elettrica</b>	<b>41</b>
3.1 Il modello matematico . . . . .	44
3.2 Integrazione del modello . . . . .	46
<b>4 Valutazione della capacità di autodiagnosi</b>	<b>49</b>
4.1 Trave in materiale autodiagnosticante . . . . .	49
4.2 Barre autodiagnostici . . . . .	65

<i>INDICE</i>	ii
4.2.1 Configurazione a dodici barre . . . . .	65
4.2.2 Configurazione a quattro barre . . . . .	71
<b>A Fibre di carbonio</b>	<b>78</b>
<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>80</b>

# Sommario

La realizzazione di un efficiente sistema di monitoraggio per le strutture è un obiettivo che sempre più insistentemente viene posto ai progettisti.

Molte sono le soluzioni proposte e fra queste sembra di particolare interesse la possibilità di unire in un unico elemento capacità strutturali e diagnostiche.

Questo obiettivo può ad esempio essere ottenuto attraverso l'utilizzo di fibre di carbonio come materiale da costruzione: queste fibre infatti accoppiano capacità meccaniche e caratteristiche diagnostiche.

Oggetto di questa tesi è lo studio di un materiale autodiagnosticante in grado di fornire, analogamente alle fibre di carbonio, una risposta di origine elettrica derivante da uno stimolo di origine meccanica.

Il problema elettrico, grazie ad ipotesi semplificative, è stato trattato analogamente al problema termico in funzione del parallelismo fra i problemi di conduzione della corrente elettrica continua e di conduzione termica stazionaria.

Si è quindi modellata un'equazione di legame tra lo stato di sforzo e la variazione della resistività elettrica del materiale partendo dai dati sperimentali a disposizione. Tale legame è stato implementato in un codice di calcolo sviluppando un opportuno elemento finito tridimensionale elettromeccanico.

Successivamente si sono modellati differenti provini al fine di valutare la capacità di autodiagnosi del materiale.

Per primo si è preso in esame un provino interamente costituito da materiale autodiagnosticante: esso è stato sottoposto a un carico flessionale. Dai valori di differenza di potenziale ottenuti attraverso differenti procedure di misurazione si è determinata la regione del provino in cui si è avuto il maggior accumulo di danno. Successivamente, in funzione di questa analisi, si è determinato il massimo valore di sforzo raggiunto nel materiale.

In seguito è stato studiato un provino costituito da un materiale privo di capacità di autodiagnosi a cui sono state applicate esternamente delle barre in materiale autodiagnosticante secondo due diverse configurazioni. Il provino è stato caricato seguendo lo schema della flessione per tre punti. In funzione dei valori di differenza di potenziale misurati è stato possibile determinare lo stato di danno delle barre e, in base a questi dati, si è suc-

cessivamente risaliti al massimo valore di sforzo a cui le barre sono state sottoposte. Il passo successivo è stato quello di determinare la massima tensione registrata nel provino.

I risultati a cui si è giunti mostrano che il modello implementato permette di stabilire lo stato di danno dell'elemento strutturale consentendo la determinazione del massimo valore di sforzo che si è raggiunto nel materiale.

# Capitolo 1

## Materiali autodiagnostici: stato dell'arte

La sicurezza delle strutture è da sempre uno degli obiettivi dei progettisti. Purtroppo, strutture che non presentano danni evidenti (o rilevabili da un'indagine visiva) possono risultare più o meno seriamente danneggiate. Risulta evidente che un efficace sistema di monitoraggio può dimostrarsi un valido mezzo per individuare con sufficiente preavviso l'insorgere del pericolo.

Molti sono i modi per realizzare un tale sistema. Per individuare le zone della struttura in cui il danno è localizzato si può far ricorso a un metodo basato su emissioni acustiche; tuttavia le apparecchiature necessarie sono costose e rendono l'applicazione di questo metodo impensabile per le strutture convenzionali.

Le misurazioni condotte per mezzo di trasduttori elettro-meccanici presentano un limite sostanziale dovuto alla necessità di applicare tali strumenti di misura in corrispondenza della frattura. Il monitoraggio di grandi strutture richiede, in aggiunta, un numero elevato di questi strumenti, con conseguente aumento dei costi.

La strada che qui si studia prevede di realizzare dei sensori che siano parte integrante della struttura, unendo capacità portanti a capacità di diagnosi.

La funzione di rilevazione fornita da questi nuovi sensori è basata sulla loro capacità di tradurre in una risposta elettrica gli effetti di un campo di sforzi. Tale effetto si basa sull'uso delle fibre di carbonio. Le caratteristiche meccaniche di queste fibre unite alla capacità di condurre corrente elettrica costituiscono il punto di partenza per la realizzazione di materiali che permettano una valutazione non distruttiva dello stato tensionale e dello stato di danno della struttura.

## 1.1 Le fibre di carbonio

Le fibre di carbonio sono fibre con un contenuto in carbonio superiore al 90%, ottenute dalla pirolisi controllata di appropriate fibre dette precursori.

I precursori sono sottoposti a un trattamento termico che rimuove elementi come l'ossigeno, l'azoto, l'idrogeno; questo trattamento fa sì che le proprietà delle fibre risultino migliorate in funzione dell'aumentato grado di cristallizzazione e di orientamento dei cristalli stessi, nonché per la diminuzione dei difetti del materiale.

Precursori organici largamente utilizzati sono il poliacrilonitrile (PAN) e la pece di petrolio o di catrame di carbon fossile.

Le fibre di carbonio sono utilizzate in varie forme nella realizzazione di materiali compositi; alcuni di questi materiali si prestano ad essere utilizzati come materiali intelligenti grazie ad un comportamento che ben li adatta a sostituire i materiali da costruzione attualmente utilizzati.

## 1.2 La ricerca

Particolare interesse riveste la ricerca su due tipi di materiali compositi:

- I composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica (Carbon Fiber Glass Fiber Reinforced Plastic) sono in grado di fornire una valutazione dello stato di danno della struttura sulla base della variazione di resistenza elettrica delle fibre di carbonio [2] [3] [4] [5] [6] [7].
- I calcestruzzi rinforzati con fibre di carbonio mescolate alla pasta di cemento (Carbon Fiber Reinforced Concrete) permettono di determinare lo stato di sforzo a cui è soggetta la struttura in funzione della variazione di resistività elettrica che li caratterizza [9] [10] [11].

Nei paragrafi seguenti vengono descritti studi e prove condotte sui materiali precedentemente citati. Le nozioni e i risultati mostrati rappresentano le conoscenze finora acquisite e costituiscono il punto di partenza nella modellazione del comportamento di un materiale intelligente.

## 1.3 I composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica

I composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica si presentano in forma di barre, e vengono utilizzati in alternativa all'acciaio come armature nel cemento armato. Sebbene il loro costo sia più elevato rispetto a quello dell'acciaio, la loro maggiore durezza, legata alla elevata resistenza agli agenti chimici e alla corrosione, e il minor numero di controlli di cui necessitano, li rendono competitivi nel lungo periodo.

Questi composti sono realizzati utilizzando fibre di carbonio, caratterizzate da basso valore di allungamento ultimo e elevata conducibilità elettrica, e fibre di vetro, che presentano un elevato valore di allungamento ultimo e elevata resistenza elettrica. I due tipi di fibre, costituite in fasci, sono inglobate in una matrice plastica, caratterizzata da un valore di allungamento ultimo superiore a quello delle fibre di vetro, che ha il compito di proteggere i fasci di fibre dagli attacchi degli agenti esterni.

Nella realizzazione delle barre studiate si sono utilizzati tre tipi di fibre di carbonio:

- fibre Pitch-HPCF (High Property Carbon Fiber);
- fibre PAN-HMCF (High Modulus Carbon Fiber);
- fibre PAN-HSCF (High Strength Carbon Fiber);

caratterizzate da diversi valori di allungamento ultimo.

Le fibre di vetro scelte sono le fibre E-glass, adatte a garantire un elevato isolamento elettrico; esse svolgono una duplice funzione: portano il carico applicato e fanno in modo che il provino mantenga la forma originale dopo la rottura delle fibre di carbonio.

Per la matrice plastica si è scelto estere di vinile, che presenta elevata stabilità agli attacchi chimici.

Le caratteristiche meccaniche delle materie prime utilizzate sono elencate nella tabella 1.1 mentre la tabella 1.2 riporta le caratteristiche dei fasci di fibre impiegati e i valori di resistività elettrica.

La caratterizzazione del comportamento di questi composti è passata attraverso differenti tipi di prove di carico:

- mediante prove di carico a trazione, effettuate sulle barre, si è individuato il legame tra la sollecitazione meccanica e la variazione di resistenza elettrica;
- mediante prove di carico a flessione condotte su travi in cemento armato con barre in composti fibra di carbonio/fibra di vetro in matrice plastica si è valutata la possibilità di questi composti di fungere da materiali intelligenti.

### 1.3.1 Prove a trazione

Le prove sono state condotte su provini aventi sezione trasversale di  $64\text{mm}^2$ , lunghezza totale di  $750\text{mm}$  e lunghezza di test pari a  $450\text{mm}$ , caratterizzati ciascuno da un contenuto in volume di fibre di vetro pari al  $31.6\%$  e, rispettivamente, da un contenuto in volume di fibre di carbonio pari allo  $0.38\%$  per fibre Pitch-HPCF, allo  $0.33\%$  per fibre PAN-HMCF e allo  $0.36\%$  per fibre PAN-HSCF. Si sono stati applicati degli estensimetri per la misura

Tipo	$\sigma_u$	Modulo elastico	$\epsilon_u$
	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	%
Pitch-HPCF	2600	245000	0.8
PAN-HMCF	3000	350000	1.0
PAN-HSCF	4000	240000	1.7
Fibra di vetro	2500	74000	4.8
Estere di vinile	83	3500	5.3

Tabella 1.1: Caratteristiche meccaniche dei materiali.

Tipo	Diametro delle fibre	Numero di fibre per fascio	Resistività elettrica
	$\mu\text{m}$		$\mu\Omega\text{mm}$
Pitch-HPCF	10.0	3000	14800
PAN-HMCF	6.7	6000	26300
PAN-HSCF	7.0	6000	24400
Fibra di vetro	16.0	4200	

Tabella 1.2: Caratteristiche geometriche ed elettriche delle fibre.

della deformazione in prossimità di una tacca nel materiale; mediante un adesivo con elevate caratteristiche di conducibilità elettrica sono stati fissati due elettrodi in rame alle estremità dei provini per permettere il passaggio di corrente elettrica.

I provini sono stati sollecitati ciclicamente a trazione, con un progressivo incremento nella deformazione, alla velocità di 0.1mm/min. Durante i test è stata fatta circolare una corrente continua di intensità pari a 1mA.

Indicata con  $R_0$  la resistenza elettrica iniziale dei fasci di fibre di carbonio,  $R - R_0$  è detta *variazione di resistenza elettrica* e  $\frac{R-R_0}{R_0}$  è detta *variazione relativa di resistenza elettrica*. Nelle figure 1.1-1.3 è possibile valutare la variazione delle grandezze qui definite e del carico applicato in funzione della deformazione del provino.

Come si può osservare dai diagrammi, sia la resistenza elettrica offerta dai fasci di fibre di carbonio che il carico applicato aumentano all'aumentare della deformazione secondo una legge approssimativamente lineare per piccoli valori di deformazione.

Nei successivi cicli di carico, caratterizzati da una deformazione maggiore, per valori di deformazione che superano la deformazione massima raggiunta nei cicli precedenti, l'aumento della resistenza elettrica dei fasci di

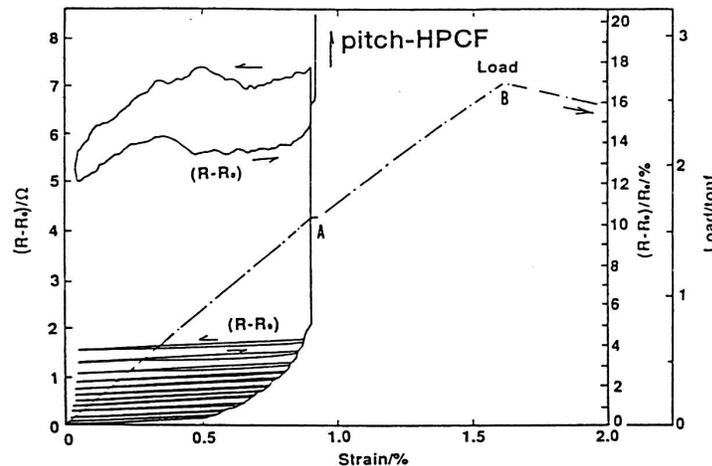


Figura 1.1: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per il composto Carbon Fiber Glass Fiber Reinforced Plastic (CFGFRP) contenente lo 0.38% in volume di Pitch-HPCF (figura numero 3 a pagina 50 nel riferimento [7]).

fibre di carbonio diventa più marcato, discostandosi dalla crescita lineare.

In corrispondenza del punto A è possibile notare una variazione nella caratteristica deformazione-carico, tuttavia tale variazione non è sufficientemente precisa per poter essere utilizzata come parametro nel monitoraggio del materiale.

Valutando invece la variazione di resistenza elettrica dei fasci di fibre di carbonio in corrispondenza del punto A si evidenzia in maniera netta un brusco aumento della resistenza elettrica: tale punto corrisponde al punto di rottura delle fibre di carbonio.

Si può facilmente notare che il provino è comunque in grado di portare carico, grazie alla presenza delle fibre di vetro, fino al punto B.

Dunque i composti CFGFRP non collassano dopo la rottura delle fibre di carbonio; il punto A può considerarsi il segnale che ulteriori aumenti del carico possono portare alla rottura del materiale.

Da questo punto di vista, il controllo della variazione della resistenza elettrica può essere un valido metodo per monitorare lo stato di danno di questi composti e di conseguenza anche lo stato di danno di una struttura.

Se, durante un ciclo, nella fase di carico si supera il valore di deformazione raggiunto nel ciclo precedente, nella fase di scarico si può notare la non coincidenza fra ramo di carico e ramo di scarico nel diagramma deformazione-resistenza elettrica. In particolare, terminata la fase di scarico, il valore di resistenza elettrica non è tornato al valore iniziale del ciclo, ma si è attestato su un valore di *resistenza elettrica residua* più elevato: la variazione di resistenza elettrica assume quindi valori positivi.

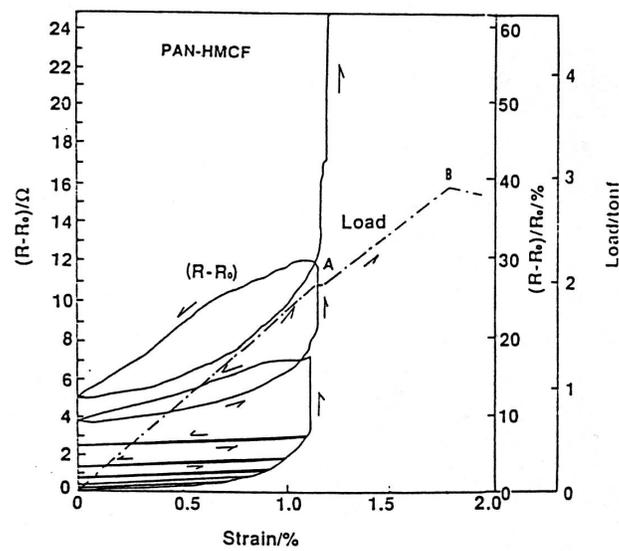


Figura 1.2: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per il composto CFGFRP contenente lo 0.33% in volume di PAN-HMCF (figura numero 4 a pagina 50 nel riferimento [7]).

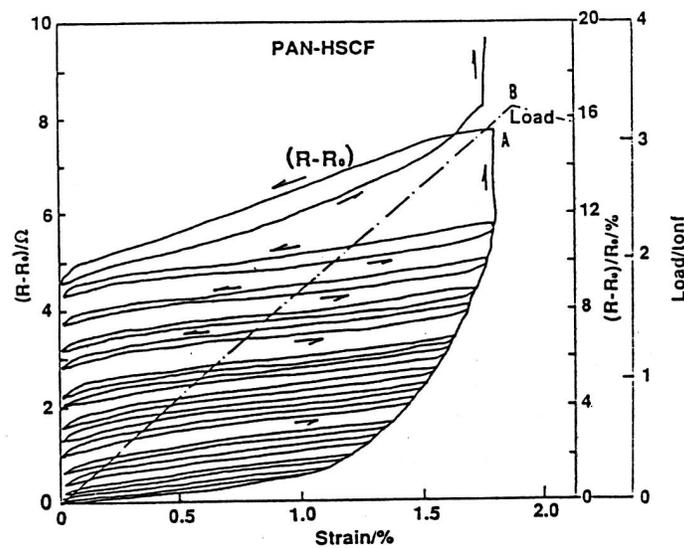


Figura 1.3: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per il composto CFGFRP contenente lo 0.36% in volume di PAN-HSCF (figura numero 5 a pagina 51 nel riferimento [7]).

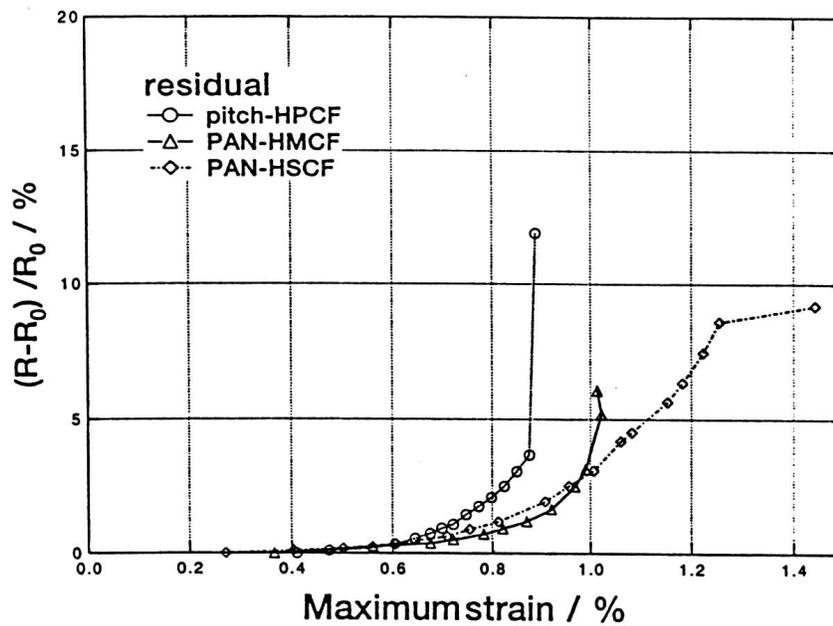


Figura 1.4: Variazione relativa della resistenza elettrica residua in funzione della massima deformazione applicata (figura numero 8 a pagina 53 nel riferimento [7]).

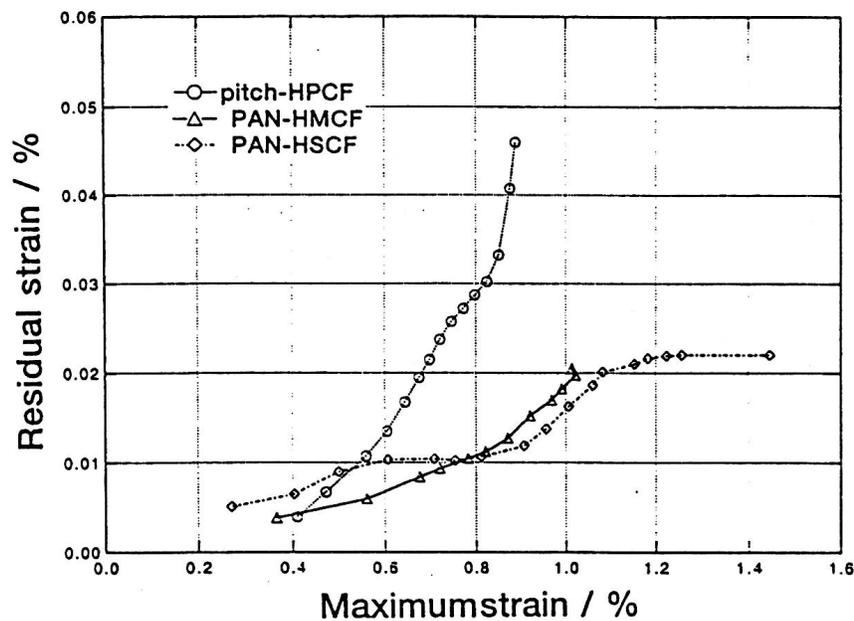


Figura 1.5: Deformazione residua allo scarico in funzione della massima deformazione applicata (figura numero 8 a pagina 53 nel riferimento [7]).

Si è ipotizzato che la variazione di resistenza elettrica residua delle fibre di carbonio dopo lo scarico sia in relazione al numero di fratture nei fasci di fibre, al parziale ricongiungimento fra i fasci fratturati dopo la rimozione del carico, e al grado di disorientamento dei fasci di fibre di carbonio. Quest'ultima ipotesi ha però peso poco rilevante.

Nelle figure 1.4 e 1.5 sono rappresentate la variazione relativa di resistenza elettrica residua e la deformazione residua dopo la fase di scarico in funzione della massima deformazione applicata (i grafici riportati in queste figure derivano dalle figure 1.1-1.3). Dalla figura 1.4 si può osservare che la posizione del deciso aumento di resistenza elettrica durante la fase di carico e al termine della fase di scarico si sposta verso valori di deformazione più bassi quando il valore di allungamento ultimo dei fasci di fibre di carbonio utilizzate è più piccolo; questo significa che il segnale di avviso della rottura del materiale può essere controllato attraverso una appropriata scelta dei fasci di fibre di carbonio da utilizzare, in funzione della loro deformazione ultima.

Dalle figure 1.4 e 1.5 si nota che le variazioni relative di resistenza elettrica residua dei vari provini sono simili alle variazioni di deformazione residua: ciò significa che i composti CFGFRP sono in grado di memorizzare, sotto forma di variazione di resistenza elettrica residua, il danno latente dopo lo scarico. Se fosse nota l'intera storia fra carico e resistenza elettrica residua fino a rottura, si potrebbe prevedere la rottura dei composti CFGFRP monitorando la variazione di resistenza elettrica residua allo scarico.

La figura 1.6 mostra la variazione di resistenza elettrica, la variazione relativa di resistenza elettrica e il carico per il provino contenente lo 0.38% di Pitch-HPCF caricato a trazione fino a rottura. Si può osservare che le variazioni delle grandezze sono simili a quelle viste nella figura 1.1: si può dedurre che la relazione fra carico, deformazione e variazione di resistenza elettrica non è influenzata dai cicli di carico.

La figura 1.7 mostra la variazione di resistenza elettrica, la variazione relativa di resistenza elettrica e il carico in funzione della deformazione per provini contenenti lo 0.33% di PAN-HMCF caricati ciclicamente con un progressivo decremento nella deformazione: nella fase di carico si sono effettuati quattro cicli principali, raggiunto ognuno dei quali il carico è stato progressivamente ridotto. Si nota che i rami di scarico del diagramma deformazione-variazione di resistenza elettrica, nella fase di decremento del carico, tornano al medesimo valore di resistenza elettrica residua. In particolare, per i quattro cicli principali di carico, la resistenza elettrica residua si attesta ai valori contraddistinti dalle lettere A, B, C, D.

Dalla figura 1.8 si può notare che la variazione di resistenza elettrica del provino non è influenzata dalla velocità di applicazione del carico: infatti, mantenendo costante l'intervallo di deformazione, il valore della resistenza elettrica residua non varia.

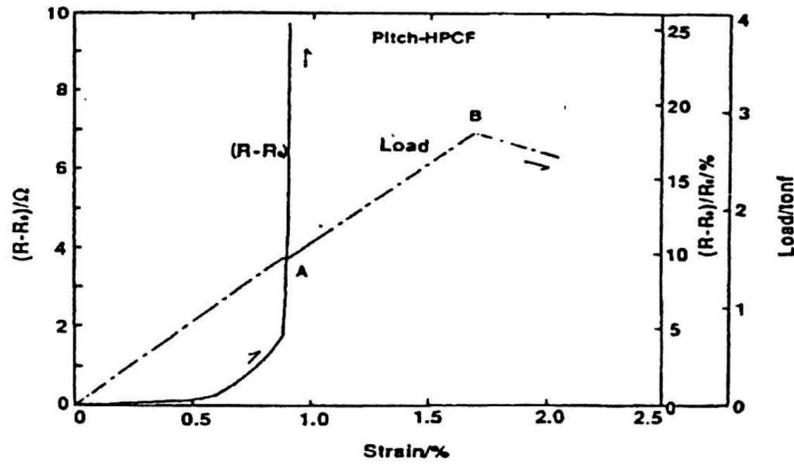


Figura 1.6: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico per il provino contenente lo 0.38% di Pitch-HPCF caricato in trazione fino a rottura (figura numero 2 a pagina 326 nel riferimento [6]).

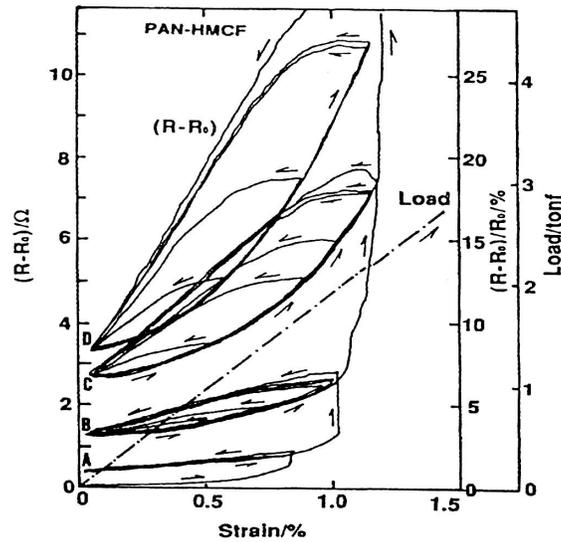


Figura 1.7: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per provini contenenti lo 0.33% di PAN-HMCF caricati ciclicamente con un progressivo decremento nella deformazione (figura numero 8 a pagina 328 nel riferimento [6]).

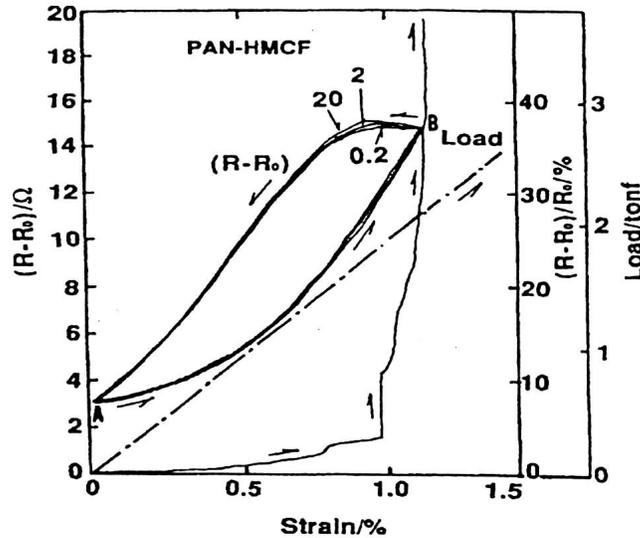


Figura 1.8: Effetto della velocità di applicazione del carico sulla variazione di resistenza elettrica del provino (figura numero 9 a pagina 328 nel riferimento [6]).

### Schema elettrico

Il comportamento descritto attraverso i grafici riportati può essere spiegato analizzando i fasci di fibre di carbonio come un sistema di conduttori. Una tale modellazione è molto semplificativa dei fenomeni che si verificano, ma chiarisce le ipotesi fatte sul comportamento del materiale; Si ipotizzi che la singola fibra di carbonio abbia resistenza  $R_f$ , che un fascio di fibre di carbonio, costituito da  $n$  fibre, possa vedersi come un parallelo elettrico: allora la resistenza elettrica del fascio, se tutte le fibre sono uguali, è data dalla relazione  $R_0 = \frac{R_f}{n}$ . Se  $n_f$  è il numero di fibre di carbonio fratturate, la resistenza del fascio varrà  $R = \frac{R_f}{n-n_f}$ . La variazione di resistenza elettrica sarà data dalla relazione:  $(R - R_0) = \frac{R_f n_f}{n(n-n_f)} = \frac{R_0 n_f}{n-n_f}$ ; la variazione relativa si potrà esprimere come:  $\frac{R-R_0}{R_0} = \frac{n_f}{n-n_f}$ .

### 1.3.2 Prove a flessione

Il passo successivo è stato quello di realizzare provini di cemento armato con i composti CFGFRP al fine di valutare se il comportamento intelligente dei composti poteva essere sfruttato nella determinazione dello stato di danno delle strutture.

Le prove sono state condotte su provini aventi lunghezza pari a 1000mm, con una sezione di 200mm×100mm. Nella matrice di calcestruzzo è stata incorporata una griglia costituita da due barre in composti CFGFRP disposte parallelamente all'asse del provino e da barre in composti fibra di vetro in matrice plastica (GFRP) trasversali all'asse del provino, poste a distanza di 100mm le une dalle altre. È stato applicato un carico ciclico utilizzando il metodo della flessione per tre punti con un progressivo aumento nell'inflessione.

Le figure 1.9-1.10 mostrano la variazione di resistenza elettrica, la variazione relativa di resistenza elettrica e l'inflessione in funzione del carico per i provini di cemento armato con i composti CFGFRP contenenti rispettivamente lo 0.38% di fibre di carbonio pitch-HPCF e lo 0.33% di fibre di carbonio PAN-HMCF.

Un sensibile aumento della resistenza elettrica durante la fase di carico e dopo la fase di scarico può essere osservato in corrispondenza del punto di transizione A, indicativo dell'avvenuta rottura dei fasci di fibre di carbonio, mentre le fibre di vetro ancora portano il carico.

Dopo la fase di scarico i provini presentano una resistenza elettrica residua che è funzione del massimo carico applicato. Quindi il deterioramento meccanico del cemento armato con i composti CFGFRP può facilmente essere osservato mediante misurazione della variazione di resistenza elettrica residua.

Nel monitoraggio di una struttura, l'utilizzo di trasduttori richiede la loro applicazione nel punto dove la frattura ha origine, e grandi strutture richiedono un gran numero di trasduttori. Mediante la misura della variazione di resistenza elettrica e della variazione di resistenza elettrica residua è possibile, in maniera facile ed economica, valutare lo stato di danno del materiale.

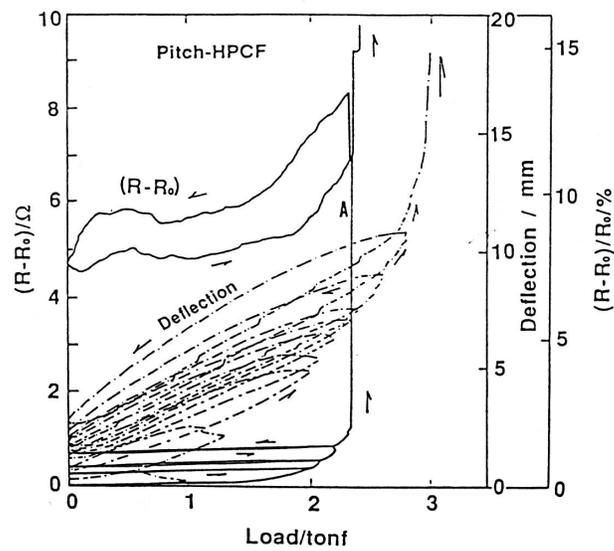


Figura 1.9: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per il cemento armato con i composti CFGFRP contenenti lo 0.38% in volume di Pitch-HPCF (figura numero 12 a pagina 56 nel riferimento [7]).

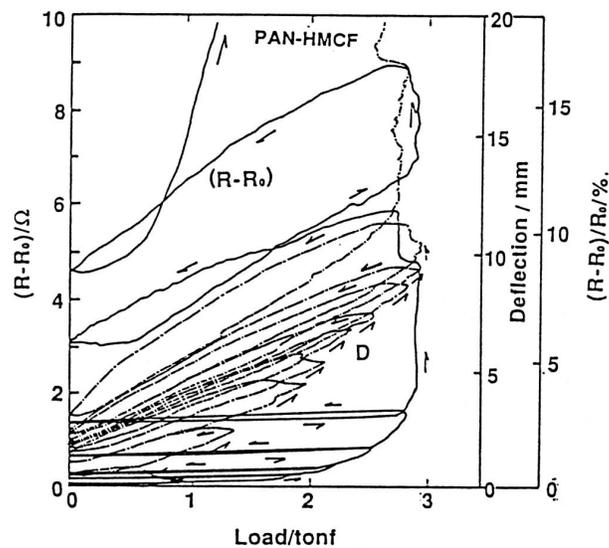


Figura 1.10: Variazione di resistenza elettrica, variazione relativa di resistenza elettrica e carico in funzione della deformazione per il cemento armato con i composti CFGFRP contenenti lo 0.33% in volume di PAN-HMCF (figura numero 13 a pagina 56 nel riferimento [7]).

## 1.4 Calcestruzzi rinforzati con fibre di carbonio

Questi calcestruzzi sono ottenuti aggiungendo alla pasta di cemento una miscela costituita da fibre di carbonio (tabella 1.3) e sostanze disperdenti, che hanno il compito di rendere uniforme la distribuzione delle stesse all'interno della matrice.

L'aggiunta delle fibre di carbonio cambia in maniera sostanziale il comportamento del calcestruzzo:

- lo rende un materiale da costruzione migliore, aumentandone le doti di resistenza e durezza;
- lo rende un materiale intelligente, capace di tradurre in un effetto elettrico lo stimolo meccanico.

Diametro del filamento	10 $\mu\text{m}$
Sforzo ultimo	690 MPa
Modulo elastico	48 GPa
Deformazione ultima	1.4%
Resistività elettrica	30000 $\mu\Omega\text{mm}$
Peso specifico	$1.6 \times 10^{-5} \text{ Nmm}^{-3}$
Contenuto in carbonio	98 % in peso

Tabella 1.3: Caratteristiche delle fibre di carbonio utilizzate.

### Il comportamento intelligente

L'origine del segnale elettrico è data dalla variazione della resistività elettrica di contatto fra la fibra di carbonio e la matrice (calcestruzzo), dovuta a una parziale estrazione della fibra dalla sua posizione originaria.

Le fibre che subiscono la parziale estrazione sono quelle che fanno da ponte fra le microfratture che si generano nella matrice. In questo modo si ottiene un controllo sull'ampiezza e sulla reversibilità delle microfratture, controllo che è la chiave per poter utilizzare il materiale come un sensore.

Questo comportamento si traduce nella variazione della resistenza elettrica del composto.

#### 1.4.1 Prove di carico sulle malte di cemento

Per valutare il comportamento del materiale sono state condotte prove di carico a trazione, a compressione e a flessione. In base al tipo di sollecitazione considerata si sono realizzati diversi provini. Il carico è stato applicato secondo due leggi: un carico monotonicamente crescente fino a rottura e un

carico ciclico spinto fino a una frazione (1/3 a compressione, 1/2 a trazione) del carico di rottura. Le misurazioni della resistenza elettrica sono state effettuate facendo passare nei provini una corrente elettrica continua compresa tra 0.1 e 4 Ampère.

In funzione delle piccole variazioni dimensionali indotte dal campo di deformazioni la variazione relativa di resistenza elettrica è stata assunta equivalente alla variazione di resistività elettrica:  $\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ .

Le figure 1.11–1.13 mostrano gli andamenti della variazione di resistenza elettrica e degli sforzi ottenuti per provini contenenti fibre di carbonio caricati a compressione, a trazione e a flessione in funzione della deformazione (della freccia nel caso di carico flessionale).

In tutti i diagrammi riportati si può riscontrare che la variazione di resistenza elettrica è positiva, cioè la resistività elettrica aumenta quando si ha deformazione. L'aumento maggiore si ha per i provini soggetti a compressione (figura 1.11), in funzione della più elevata duttilità del materiale.

Dall'analisi del diagramma riportato in figura 1.11 si nota che, per piccoli valori di deformazione, la curva deformazione-variazione di resistenza elettrica ha un andamento di tipo parabolico: questo comportamento è dovuto all'effetto di collegamento fra le microfratture esercitato dalle fibre di carbonio, che ne diminuiscono il contributo all'aumento della resistenza elettrica del materiale. Più la curva si discosta dalla linearità, maggiore è il contributo delle fibre di carbonio.

Nel caso di carico flessionale si nota come la variazione di resistenza elettrica registrata per il lato in compressione sia più ampia di quella misurata sul lato in trazione.

Test condotti su provini privi di fibre di carbonio hanno dimostrato che le malte non sono in grado di fornire un comportamento intelligente: infatti in questi provini il segnale elettrico viene registrato in corrispondenza della frattura del materiale e risulta quindi irripetibile.

Le piccole differenze nei valori delle resistività elettriche di contatto iniziali  $\rho_0$  fra malte senza e con l'aggiunta di fibre di carbonio suggeriscono che la diminuzione della resistività elettrica da sola non può spiegare il comportamento intelligente delle malte. È il controllo esercitato dalle fibre di carbonio sulle microfratture a giocare un ruolo importante in questo senso.

Le relazioni tra campo di sforzi e variazione di resistenza elettrica evidenziate nelle figure 1.11–1.13 possono essere utilizzate come curve di calibrazione che consentono di impiegare le malte come sensori per la determinazione degli sforzi di compressione e di trazione.

Dal momento che la variazione di resistenza elettrica in compressione è più ampia rispetto al caso di trazione, le malte sono più efficacemente utilizzabili come sensori di pressione piuttosto che come sensori atti a misurare sforzi di trazione.

Risultati notevoli si sono ottenuti anche sollecitando ciclicamente a trazione

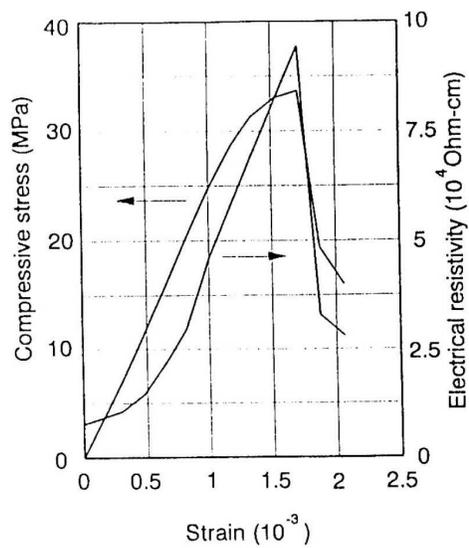


Figura 1.11: Andamento dello sforzo di compressione e della variazione di resistività elettrica in funzione della deformazione per una malta di cemento contenente metilcellulosa e lo 0.24% in volume di fibre di carbonio (figura numero 6 a pagina 26 nel riferimento [9]).

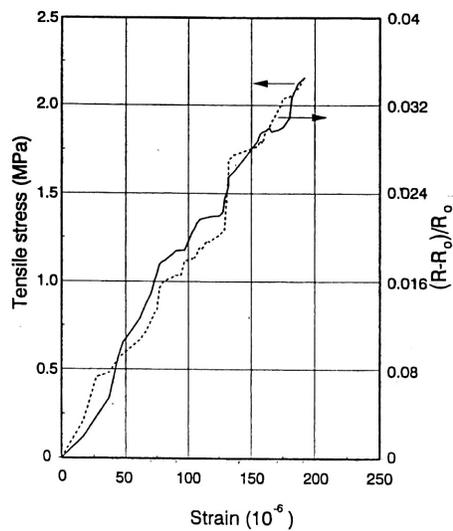


Figura 1.12: Andamento dello sforzo di trazione e della variazione relativa di resistenza elettrica in funzione della deformazione per una malta di cemento contenente metilcellulosa e lo 0.53% in volume di fibre di carbonio (figura numero 3 a pagina 16 nel riferimento [11]).

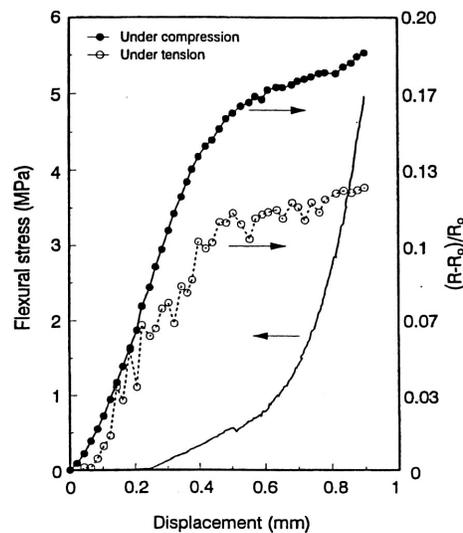


Figura 1.13: Andamento dello sforzo flessionale e della variazione relativa di resistenza elettrica (per il lato in compressione e per il lato in trazione) in funzione dell'inflessione per una malta di cemento contenente metilcellulosa e lo 0.35% in volume di fibre di carbonio (figura numero 4 a pagina 17 nel riferimento [11]).

e a compressione i provini. Mentre nelle malte prive di fibre di carbonio non è stato osservato alcun tipo di comportamento intelligente, i provini contenenti fibre di carbonio hanno mostrato, per tutti i tipi di disperdenti, una capacità di rilevazione dello stato di sforzo che presenta una netta differenza a seconda che il provino fosse caricato a compressione o a trazione.

Sotto ponendo i provini a un carico ciclico a compressione in regime elastico (figura 1.14) il comportamento intelligente è stato osservato come:

- un aumento irreversibile della variazione relativa di resistenza elettrica durante il primo ciclo di carico, dovuto a un danno permanente, probabilmente associato all'aumento irreversibile della resistività elettrica di contatto all'interfaccia fibra-matrice;
- un aumento reversibile della variazione relativa di resistenza elettrica durante tutte le fasi di scarico, attribuito all'apertura di fessure, nascoste dall'effetto della pressione esercitata dal carico con la conseguente estrazione delle fibre di carbonio;
- una diminuzione reversibile della variazione relativa di resistenza elettrica durante il secondo e i successivi cicli di carico, dovuta alla chiusura delle fessure.

Il comportamento reversibile di chiusura e apertura delle fessure è attribuito alla funzione di collegamento offerta dalle fibre di carbonio.

Sotto ponendo i provini a un carico ciclico di trazione in regime elastico (figura 1.15) il comportamento intelligente è stato osservato come:

- un aumento irreversibile della variazione relativa di resistenza elettrica durante la prima fase del primo ciclo di carico;
- un aumento reversibile durante la seconda fase del primo ciclo di carico e durante gli altri cicli di carico;
- una diminuzione reversibile allo scarico per ogni ciclo.

L'aumento della resistenza elettrica è dovuto all'apertura delle fessure, la diminuzione della resistenza elettrica alla loro chiusura.

L'incremento irreversibile nella prima fase del primo ciclo di carico è dovuto all'indebolimento dell'interfaccia fibra-matrice, con conseguente innalzamento della resistività elettrica di contatto.

Le fessure, durante la trazione del provino, sono preferenzialmente orientate perpendicolarmente all'asse di applicazione dello sforzo.

#### 1.4.2 Prove di carico sui calcestruzzi

Sono stati ottenuti risultati anche per quanto riguarda i calcestruzzi. Come per le malte, senza l'aggiunta delle fibre di carbonio non si è osservato alcun comportamento intelligente. L'intervallo di variazione della resistenza elettrica, per contenuti in volume di fibre di carbonio simili, è molto più contenuto per i calcestruzzi che per le malte, mentre la resistività di contatto iniziale è più elevata nei calcestruzzi.

Nonostante l'alto valore della resistività di contatto si ha comunque un comportamento intelligente da parte del calcestruzzo, a ulteriore indicazione che il comportamento intelligente non è governato dal valore della resistività. Un aumento nel contenuto in volume delle fibre di carbonio nel calcestruzzo abbassa il valore della resistività di contatto e innalza la variazione di resistenza elettrica, ma l'aumento è ancora inferiore ai valori riscontrati per le malte, anche quando la resistività di contatto del calcestruzzo è inferiore a quella delle malte. Ciò significa che la contenuta variazione di resistenza elettrica dei calcestruzzi non è dovuta all'alto valore della resistività di contatto, ma piuttosto alla presenza dell'aggregato, che rende meno efficace la funzione di controllo delle fibre di carbonio sulla generazione delle microfratture. La misura della variazione di resistenza elettrica non presenta comunque difficoltà anche per bassi contenuti di fibre di carbonio.

Si osserva che lo sviluppo delle fessure avviene prima nei calcestruzzi che nelle malte, probabilmente in relazione al minor controllo sulla fessurazione esercitato dalle fibre di carbonio.

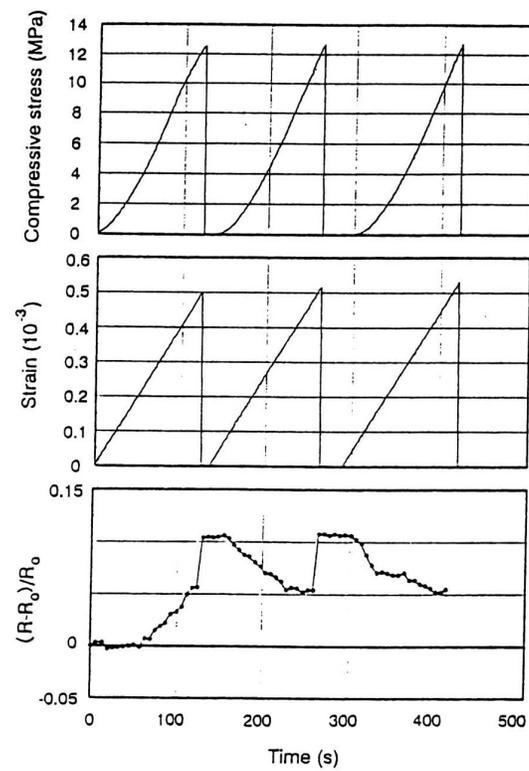


Figura 1.14: Andamento dello stato di sforzo, dello stato di deformazione e della variazione relativa di resistenza elettrica per un provino contenente metilcellulosa e lo 0.24% in volume di fibre di carbonio sottoposto a un carico ciclico di compressione in funzione del tempo (figura numero 8 a pagina 347 nel riferimento [10]).

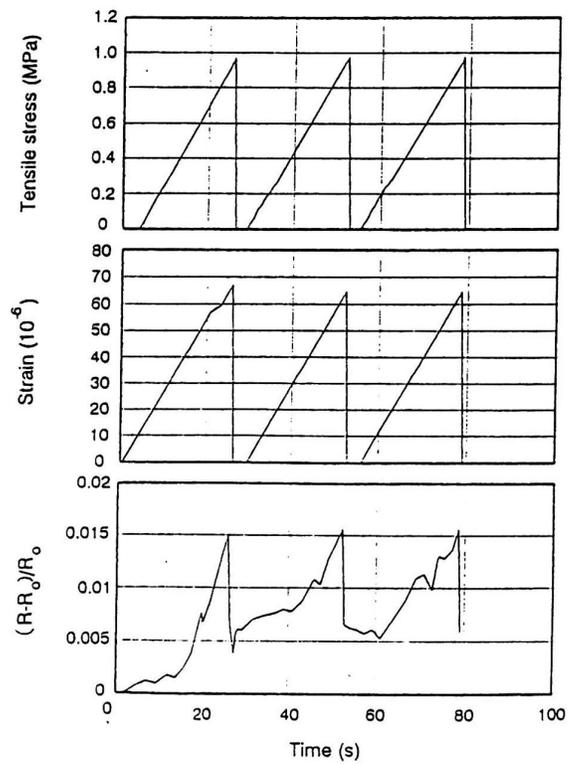


Figura 1.15: Andamento dello stato di sforzo, dello stato di deformazione e della variazione relativa di resistenza elettrica per un provino contenente metilcellulosa e lo 0.53% in volume di fibre di carbonio sottoposto a un carico ciclico di trazione in funzione del tempo (figura numero 9 a pagina 347 nel riferimento [10]).

L'andamento delle fessure è più regolare per malte di cemento prive di fibre di carbonio, ma è tanto più intricato quanto più aumenta il contenuto in fibre di carbonio. Quindi il ruolo delle fibre di carbonio non è solo quello di aumentare la conducibilità del calcestruzzo, ma è anche quello di diminuire l'ampiezza delle fessure e di aumentarne la tortuosità. Questo effetto delle fibre di carbonio sul meccanismo di frattura è responsabile del comportamento intelligente.

## Capitolo 2

# Corrente elettrica stazionaria: un semplice modello

In base ai principi di funzionamento dei materiali intelligenti introdotti nel precedente capitolo è necessario richiamare brevemente le nozioni fondamentali sul passaggio di corrente elettrica stazionaria in un conduttore [12]; la conoscenza delle equazioni che reggono il problema del passaggio della corrente elettrica stazionaria permetterà di formulare un algoritmo di soluzione utilizzando l'analogia esistente fra queste equazioni e le equazioni che governano il problema della conduzione del calore in un solido.

### 2.1 Il campo elettrostatico

Una carica elettrica puntiforme  $Q$  modifica le proprietà dello spazio nel quale è posta; infatti, una seconda carica  $q$  che si trovi nelle sue vicinanze, risulta soggetta ad una forza di tipo elettrostatico. Il campo vettoriale che si instaura per effetto della carica puntiforme  $Q$  è detto **campo elettrostatico** e verrà indicato con la lettera  $\mathbf{e}_0$ . L'andamento del campo elettrostatico generato da una carica singola può essere espresso dalla relazione:

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \mathbf{r}^1 \quad (2.1)$$

$\epsilon_0$  è detta *costante dielettrica del vuoto*, e vale:

---

1

- $\mathbf{r}$  è il vettore posizione del generico punto rispetto alla carica sorgente  $Q$ ;
- $r$  è il modulo del vettore posizione.

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (2.2)$$

La carica  $Q$ , la cui posizione è stazionaria, è detta *sorgente* del campo elettrico. Il campo elettrico così definito si presta bene a descrivere la forza esercitata su una carica di prova da una configurazione *fissa* di cariche.

Il calcolo del campo elettrico generato da una configurazione fissa di cariche, ancorchè laborioso, non presenta difficoltà significative: vale infatti, per il campo elettrico, il *principio di sovrapposizione*. In base a questo principio, il campo elettrico risultante da un sistema di cariche fisse è in ogni punto dello spazio pari alla somma dei contributi delle singole cariche sorgenti. Nel caso di un numero finito di cariche  $Q_i$ , la cui posizione è espressa dal raggio vettore  $r_i$ , si ha:

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.3)$$

Avendo a che fare con un numero molto grande di cariche, risulta impensabile l'uso della relazione su scritta. Si introduce allora il concetto di distribuzione continua di carica, descritta da una *densità volumica di carica*  $\rho(x, y, z)$ ; la carica elementare è data da:

$$dq = \rho(x, y, z) d\tau \quad (2.4)$$

dove  $d\tau = dx dy dz$  indica l'elemento infinitesimo di volume. Sostituendo l'integrale alla sommatoria e la carica elementare alla carica puntiforme, si ottiene l'espressione del campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche fisse:

$$\mathbf{e}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x, y, z)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\tau \quad (2.5)$$

La trattazione precedente evidenzia come il calcolo del campo elettrostatico, benchè in alcuni casi laborioso, sia concettualmente assai semplice nel caso di una configurazione fissa di cariche. Gli strumenti fin qui introdotti si dimostrano però del tutto insufficienti nella determinazione del campo elettrostatico generato da cariche dislocate su corpi conduttori; in tal caso è nota solamente la carica totale presente sul conduttore, ma non la distribuzione che essa assume. Per poter descrivere anche in questo caso il campo elettrostatico è necessario introdurre due nuovi strumenti: il *flusso del campo elettrostatico* e il *potenziale elettrico*.

---

<sup>2</sup>Coulomb C: unità di misura della carica elettrica.

### 2.1.1 Il flusso del campo elettrostatico

Si consideri un campo vettoriale  $\mathbf{a}(x,y,z)$  che goda della proprietà di additività, che abbia, per sorgenti puntiformi, modulo inversamente proporzionale al quadrato della distanza e che sia diretto come la congiungente con il punto sorgente. Si indichi con la lettera  $S$  una superficie immersa nel campo vettoriale  $\mathbf{a}$ . Assegnata ad essa una faccia positiva che, nel caso la superficie sia chiusa, coincide con la faccia esterna, si indichi con  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$  la porzione elementare di superficie, avendo indicato con  $\mathbf{n}$  il versore normale all'elemento di superficie considerato. Sotto queste ipotesi si definisce flusso elementare del campo vettoriale  $\mathbf{a}$  attraverso la superficie  $d\mathbf{S}$  la grandezza  $d\phi(\mathbf{a})$  data dalla relazione:

$$d\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}dS \quad (2.6)$$

Integrando l'equazione 2.6 sull'intera superficie si ottiene il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{a}$  attraverso la superficie  $S$ :

$$\phi(\mathbf{a}) = \int_S d\phi(\mathbf{a}) = \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.7)$$

In ragione dell'equazione 2.1 e del fatto che il campo elettrostatico goda del principio di sovrapposizione, è possibile definire il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie  $S$  qualunque come:

$$\phi_s(\mathbf{e}_0) = \int_S \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{S} \quad (2.8)$$

Se il campo elettrostatico è generato da un numero finito di cariche l'equazione 2.8 assume la forma:

$$\phi_s(\mathbf{e}_0) = \int_S \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i = \frac{Q_{TOT}^{int}}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

cioè il flusso del campo elettrostatico nel vuoto  $\mathbf{e}_0$  attraverso una superficie chiusa generica  $S$  è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, divisa per  $\epsilon_0$ ; eventuali cariche disposte esternamente alla superficie  $S$  non portano contributo al flusso. Nel caso di distribuzione continua di cariche all'interno del volume racchiuso dalla superficie, l'equazione 2.9 può essere scritta nella forma:

$$\phi_s(\mathbf{e}_0) = \int_S \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau \quad (2.10)$$

Si consideri ora una regione dello spazio in cui è definito un campo vettoriale: si definisce *linea di forza* del campo vettoriale una linea che in ogni punto ha la direzione del campo come tangente.

Si consideri ora una linea chiusa per ogni punto della quale passi una linea di forza; l'insieme di queste linee di forza costituisce una superficie tubolare che prende il nome di *tubo di flusso*.

Sia data una porzione di tubo di flusso del campo elettrico delimitata da due sezioni  $S_1$  e  $S_2$ . Se nel tubo di flusso non sono presenti cariche elettriche si ha che è nullo il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa costituita dalle due sezioni e dalla superficie laterale del tubo di flusso. In particolare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale del tubo di flusso è nullo poichè  $\mathbf{e}_0$  è ad essa tangente. Si verifica l'uguaglianza del flusso di  $\mathbf{e}_0$  attraverso le superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Da questo deriva che il flusso di  $\mathbf{e}_0$  è una caratteristica del tubo di flusso. Il tubo di flusso quindi varierà la sua sezione in funzione dell'intensità del campo elettrico.

### La prima equazione di Maxwell

Applicando il teorema della divergenza all'equazione 2.8 è possibile scrivere:

$$\phi_s(\mathbf{e}_0) = \int_S \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{dS} = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{e}_0 d\tau \quad (2.11)$$

Uguagliando i terzi membri delle equazioni 2.10 e 2.11 si ottiene:

$$\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{e}_0 d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho(x, y, z) d\tau \quad (2.12)$$

Essendo arbitrario il volume di integrazione  $\tau$  l'equazione 2.12 è vera se e solo se sono uguali le funzioni integrande:

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho(x, y, z) \quad (2.13)$$

L'equazione 2.13 costituisce la I equazione di Maxwell.

### 2.1.2 Il potenziale elettrico

Dato il campo elettrico generato da una carica puntiforme, si ipotizzi di moltiplicare scalarmente l'equazione 2.1 per uno spostamento elementare  $\mathbf{dl}$  e quindi di integrare lungo una traiettoria qualsiasi che unisca i punti A e B; si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{dl} &= \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{dl} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} r dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Questa relazione mostra che il campo elettrico è conservativo: il suo integrale di linea fra due posizioni A e B dipende solamente dalle posizioni finale e iniziale e non dalla traiettoria seguita per portarsi da uno all'altro dei due punti.

Se si pone  $V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$  si ha:

$$\int_A^B \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} = V_0(A) - V_0(B) \quad (2.15)$$

Se A è una posizione di riferimento e P una posizione generica si ha:

$$V_0(x, y, z) = - \int_A^P \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} + V_0(A) \quad (2.16)$$

La funzione  $V_0(x, y, z)$  così definita prende il nome di *Potenziale elettrostatico* e viene misurata in volt. È da notare che la funzione  $V_0$  risulta essere una grandezza **scalare**. Dalla definizione di potenziale si deduce la relazione:

$$\mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} = -dV_0 \quad (2.17)$$

che, espressa in coordinate cartesiane diventa:

$$e_{0x} dx + e_{0y} dy + e_{0z} dz = - \left[ \frac{\partial V_0}{\partial x} dx + \frac{\partial V_0}{\partial y} dy + \frac{\partial V_0}{\partial z} dz \right] \quad (2.18)$$

Poichè tale relazione deve essere valida per qualsiasi  $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ , segue che:

$$e_{0x} = - \frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$e_{0y} = - \frac{\partial V_0}{\partial y} \quad (2.20)$$

$$e_{0z} = - \frac{\partial V_0}{\partial z} \quad (2.21)$$

Utilizzando il vettore  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  è possibile compattare le equazioni 2.20, 2.21, 2.21 nella forma:

$$\mathbf{e}_0 = -\nabla V_0 \quad (2.22)$$

In modo analogo è possibile ricavare l'espressione del potenziale elettrico per una distribuzione discreta e continua di cariche stazionarie:

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.23)$$

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x, y, z)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} d\tau \quad (2.24)$$

Se si calcola l'integrale di linea del campo elettrico lungo una linea chiusa si ottiene:

$$\int_A^A \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} = V(A) - V(A) = 0 = \oint \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} \quad (2.25)$$

dove il simbolo  $\oint$  indica appunto l'integrale lungo una linea chiusa e prende il nome di circuitazione. È dunque possibile affermare che la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla: questa è condizione necessaria e sufficiente alla conservatività del campo elettrico. Introducendo il teorema di Stokes si può scrivere:

$$\oint \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{S} \quad (2.26)$$

Dall'equazione 2.25 discende:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{e}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.27)$$

Tale relazione è valida per qualsiasi superficie  $S$  avente la linea chiusa  $l$  come contorno; da ciò deriva che deve essere nullo l'integrando:

$$\nabla \times \mathbf{e}_0 = 0 \quad (2.28)$$

L'equazione 2.28 permette di dire che il campo elettrico è irrotazionale ed esprime in forma locale la conservatività del campo elettrico.

## 2.2 Corrente elettrica stazionaria

Si consideri un materiale conduttore, cioè un corpo al cui interno siano presenti degli elettroni (cariche) liberi di muoversi. Si ipotizzi ora che fra due punti del conduttore A e B a un dato istante  $t$  esista e sia misurabile una differenza di potenziale  $\Delta V = V(A) - V(B) = V_A - V_B$ ; in accordo con l'equazione 2.15 fra i due punti è presente un campo elettrico  $\mathbf{e}$ . Se ora si suppone di effettuare nel tempo la misura del valore della differenza di potenziale, senza porre ulteriori ipotesi si osserva che questa tende ad annullarsi rapidamente con legge esponenziale così come accade per il campo elettrico. Il fenomeno osservato presenta dunque caratteristiche di non stazionarietà, ma consente di affermare che nel conduttore si è avuto un *passaggio di corrente elettrica*: per effetto del campo elettrico presente fra i punti A e B si è avuto un movimento ordinato di cariche elettriche.

Perché si possa studiare il fenomeno stazionario è necessario che la differenza di potenziale fra i punti A e B, e quindi il campo elettrico, vengano mantenuti costanti nel tempo. Sotto queste ipotesi si definisce *corrente elettrica* il rapporto fra la carica elettrica  $dQ$  che fluisce nel tempo  $dt$  attraverso la sezione del conduttore e il tempo  $dt$  stesso:

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (2.29)$$

La corrente elettrica è misurata in Ampère. Dunque per effetto del campo elettrico le cariche elettriche si muovono con una velocità che prende il nome di velocità di deriva  $\mathbf{v}_d$ . Mediandola su volumetti macroscopicamente significativi, al fine di evitare le fluttuazioni microscopiche, si può osservare che, all'interno del conduttore, la velocità di deriva costituisce un campo vettoriale. Questo è parallelo o antiparallelo al campo elettrico a seconda che la carica in movimento sia positiva o negativa. Si consideri un tubo di flusso elementare del campo vettoriale  $\mathbf{v}_d$  e sia  $d\mathbf{S}$  una sua sezione. La quantità di carica che nel tempo  $dt$  passa attraverso la sezione  $d\mathbf{S}$  vale:

$$dq = nq\mathbf{v}_d \cdot d\mathbf{S}dt \quad (2.30)$$

dove  $n$  rappresenta il numero di portatori di carica e  $q$  la carica elettrica. Alla quantità:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_d \quad (2.31)$$

si dà il nome di **densità di corrente**. È da notare che il vettore  $\mathbf{j}$  risulta sempre parallelo e concorde col verso del campo elettrico, essendo i termini  $q$  e  $\mathbf{v}_d$  sempre concordi in segno. Il vettore densità di corrente è misurato in  $A/m^2$ . Dalle equazioni 2.30 e 2.31, ricordando la 2.29, la corrente elettrica che passa nel tubo di flusso elementare può scriversi:

$$di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.32)$$

Integrando sull'intera sezione del conduttore si ottiene:

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.33)$$

Il vettore densità di corrente è quel vettore il cui flusso attraverso la sezione di un conduttore fornisce la corrente elettrica che attraversa la sezione stessa. In molti casi di interesse pratico è possibile scrivere una relazione funzionale tra il campo elettrico e la densità di corrente del tipo  $\mathbf{j} = f(\mathbf{e})$ . Per conduttori lineari e isotropi la precedente relazione si riduce alla:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (2.34)$$

dove  $\sigma$  è una costante e prende il nome di *conducibilità elettrica*. Nel caso di un conduttore anisotropo la precedente relazione diventa:

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} \quad (2.35)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è il *tensore di conducibilità elettrica*.

Si applichi il principio di conservazione della carica elettrica: si consideri una superficie  $S$  al cui interno è presente una carica totale  $Q(t)$ . Se nel tempo  $dt$   $Q(t)$  diminuisce della quantità  $dQ$ , per la conservazione della carica elettrica,  $dQ$  deve essere uscita dalla superficie  $S$ :

$$-dQ = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt \quad (2.36)$$

da cui si ottiene:

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.37)$$

Introducendo la densità volumica di carica si può scrivere:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (2.38)$$

e applicando il teorema della divergenza al flusso del vettore densità di corrente si può ottenere l'equazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.39)$$

che viene detta **equazione di continuità della corrente**. In condizioni stazionarie le grandezze non dipendono dal tempo, per cui l'equazione 2.39 può essere scritta:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.40)$$

Integrando tale relazione su un generico volume  $\tau$  avente come contorno la superficie  $S$  si ottiene:

$$0 = \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{j} d\tau = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.41)$$

cioè il flusso del vettore densità di corrente attraverso una superficie chiusa è nullo. Il vettore densità di corrente è detto *solenoidale*. Ne deriva che in condizioni stazionarie la corrente che fluisce attraverso due generiche sezioni di un tubo di flusso è la stessa; infatti, per definizione di tubo di flusso, il contributo della superficie laterale è nullo. Quanto su scritto può essere esteso al caso di più sezioni formate dall'intersezione di più tubi di flusso con una superficie generica  $S$ .

## 2.3 Cenni di termodinamica

Il calore viene definito in termodinamica come quella forma di energia che si propaga, attraverso i confini di un sistema, in conseguenza di una differenza di temperatura [8]. Il carattere energetico del calore viene stabilito dal *primo principio della termodinamica*, mentre il senso della sua spontanea propagazione nella direzione delle temperature decrescenti è indicato dal *secondo principio della termodinamica*.

La termodinamica classica inoltre permette di valutare la quantità complessiva di calore scambiato durante un processo in cui un sistema passa da uno stato di equilibrio ad un altro. Essa tuttavia non fornisce esplicite informazioni sulle modalità del processo di scambio "non in equilibrio" e sul valore del flusso termico in gioco.

### 2.3.1 Il primo principio della termodinamica

Il primo principio stabilisce che la variazione nel tempo dell'energia totale di un sistema è uguale alla somma degli scambi di calore e lavoro effettuati dal sistema con l'ambiente circostante nello stesso tempo.

In base alla convenzione usualmente adottata di ritenere positivo il calore ricevuto dal sistema e negativo il lavoro fatto su di esso, la precedente formulazione si esprime:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta L}{dt} \quad (2.42)$$

dove:

- $E$  è l'energia totale del sistema;
- $Q$  è il calore scambiato;
- $L$  è il lavoro scambiato;
- $t$  è il tempo.

Considerando un generico volume  $\tau$  delimitato dalla superficie  $S$ , l'espressione del primo principio, in riferimento alle sole componenti meccaniche, può essere scritta nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} e \rho d\tau = - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS - \int_S (h + \frac{1}{2}v^2 + gz) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - P_a - P_e \quad (2.43)$$

L'equazione 2.43 esprime l'uguaglianza tra la variazione nel tempo dell'energia totale  $E$  del fluido contenuto nel volume  $\tau$  considerato e la differenza tra i flussi di energia entranti e uscenti attraverso la superficie  $S$  che lo delimita.

Il termine  $e$  indica l'energia totale per unità di massa del fluido; il primo termine a secondo membro rappresenta il flusso termico scambiato attraverso la superficie  $S$ , essendo  $\mathbf{q}$  il vettore flusso termico per unità di superficie e  $\mathbf{n}$  il vettore unitario normale alla stessa, diretto verso l'esterno; il segno negativo deriva dalla convenzione usualmente adottata per il segno degli scambi di calore e lavoro. Il secondo termine a secondo membro rappresenta il flusso energetico convettivo, essendo  $h = u + p/\rho$  l'entalpia per unità di massa del fluido entrante o uscente dal volume  $\tau$ ,  $u$  la sua energia interna specifica,  $v^2/2$  la sua energia cinetica e  $gz$  l'energia potenziale; con  $\mathbf{v}$  si indica il vettore velocità e con  $\rho$  la densità. Infine  $P_e$  e  $P_a$  rappresentano la potenza d'elica o esterna netta e il lavoro viscoso d'attrito per unità di tempo.

In condizioni di regime permanente, a basse velocità, in assenza di lavoro d'elica e trascurando il lavoro dissipativo d'attrito, l'equazione 2.43 assume la forma:

$$-\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S h \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.44)$$

che rappresenta la base della maggior parte delle analisi di scambio termico.

### 2.3.2 Il secondo principio della termodinamica

Mentre il primo principio esprime l'idea della conservazione dell'energia, il secondo principio della termodinamica permette di definire la direzione di evoluzione dei processi spontanei. Esso si esprime attraverso l'introduzione di una funzione di stato denominata *entropia*, che interviene nella relazione fondamentale:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{\theta} \quad (2.45)$$

secondo cui, in un qualunque processo, la variazione entropica del sistema è maggiore o uguale (per i processi reversibili) al rapporto tra il calore scambiato  $\delta Q$  e la temperatura attuale  $\theta$  della porzione di confine del sistema attraverso cui avviene lo scambio.

la variazione di entropia nel tempo sarà quindi maggiore o uguale al rapporto tra il flusso termico scambiato e la temperatura  $\theta$  prima definita:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{\theta} \frac{\delta Q}{dt} \quad (2.46)$$

In riferimento a un volume generico  $\tau$ , si può esprimere l'equazione 2.46 come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} s \rho d\tau + \int_S s \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \geq - \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS \quad (2.47)$$

in cui  $s$  è l'entropia per unità di massa.

Introducendo la produzione entropica per unità di tempo  $\sigma_\tau$ , dovuta ai fenomeni di irreversibilità presenti nel volume  $\tau$ , il bilancio entropico in base all'equazione 2.47 si può esprimere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau s \rho d\tau + \int_S s \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} dS + \sigma_\tau \quad (2.48)$$

## 2.4 La trasmissione del calore

Lo studio dei fenomeni termici che accompagnano la propagazione del calore ed il calcolo dei valori del flusso termico costituiscono l'obiettivo fondamentale della trasmissione del calore. Questa scienza riguarda la descrizione dei meccanismi di propagazione termica mediante appropriate relazioni, sia teoriche sia empiriche, tra il flusso termico, i parametri del sistema (geometria, proprietà fisiche, portate) e le condizioni termiche dell'ambiente.

Alla base delle analisi di trasmissione del calore, oltre ai due principi della termodinamica, vi sono le leggi di conservazione della massa e della quantità di moto e le relazioni di trasmissione appropriate allo specifico problema.

### Legge di conservazione della massa

Si consideri un volume  $\tau$ , la conservazione della massa all'interno del volume può esprimersi come:

$$\frac{\partial m_\tau}{\partial t} = \dot{m}_e - \dot{m}_u \quad (2.49)$$

dove:

- $m_\tau$  è la massa attuale presente nel volume;
- $\dot{m}_e, \dot{m}_u$  sono le portate istantanee in entrata e in uscita dallo stesso volume.

In termini più generali, l'equazione 2.49 può scriversi nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \rho d\tau = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.50)$$

### Legge di conservazione della quantità di moto

La legge di conservazione della quantità di moto o seconda legge di Newton esprime l'uguaglianza tra la risultante delle forze agenti sul sistema e il valore istantaneo della variazione nel tempo della sua quantità di moto. per un sistema soggetto a forze di risultante  $\mathbf{f}$  si può scrivere:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{m}}{dt} \quad (2.51)$$

dove  $\mathbf{m}$  è la quantità di moto del sistema.

Con riferimento a un volume  $\tau$ , l'equazione 2.51 può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau + \int_S \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.52)$$

In questi termini la legge di conservazione della quantità di moto stabilisce che la risultante delle forze agenti sul volume considerato è uguale al valore istantaneo della variazione nel tempo della quantità di moto del volume  $\tau$  più il flusso netto della quantità di moto associata alla massa che attraversa la superficie  $S$ .

## Meccanismi di trasmissione del calore

Le relazioni di trasmissione del calore sono fundamentalmente costituite dalle leggi di Fourier, di Newton e di Stefan-Boltzmann, in riferimento rispettivamente ai tre meccanismi in cui i fenomeni di trasmissione del calore possono essere classificati: conduzione, convezione, irraggiamento.

La conduzione è uno scambio di energia per interazione diretta tra le molecole di un mezzo in presenza di gradienti di temperatura. Si verifica nei gas, nei liquidi e nei solidi, ed ha una base teorica fondata sulla teoria cinetica molecolare. La propagazione termica può essere espressa in funzione del gradiente di temperatura secondo la legge di Fourier. Questo fenomeno è analogo alla conduzione elettrica, in regime permanente, segue leggi analoghe.

La convezione può essere descritta come un fenomeno di trasporto di calore in un fluido dovuto all'azione combinata di conduzione e irraggiamento con il movimento del fluido. I moti del fluido possono essere dovuti a differenze di temperatura, come avviene nel campo gravitazionale per effetti di galleggiamento, o possono essere provocati da un'azione esterna. nel primo caso la convezione è detta *libera* o *naturale*, nel secondo è detta *forzata*.

L'irraggiamento è un trasferimento di energia termica sotto forma di onde elettromagnetiche emesse in conseguenza dell'agitazione atomica alla superficie di un corpo. Come tutte le onde elettromagnetiche, la radiazione termica si propaga alla velocità della luce.

### 2.4.1 Conduzione termica

La conduzione del calore è un fenomeno di propagazione dell'energia per contatto diretto delle particelle di un corpo. Il meccanismo di base che controlla la propagazione per conduzione è diverso a seconda della struttura fisica del corpo.

La conduzione termica nei gas è dovuta alla diffusione atomica e molecolare, mentre nei liquidi e nei solidi dielettrici avviene per mezzo di onde elastiche. Nei metalli il fenomeno è principalmente dovuto alla diffusione degli

elettroni liberi, risultando di minore importanza l'effetto dell'oscillazione elastica della struttura cristallina.

Indipendentemente dal meccanismo di base che si presenta, la teoria analitica della conduzione fa riferimento a un mezzo continuo non tenendo conto della sua struttura molecolare.

La propagazione del calore per conduzione, come avviene per tutti i meccanismi di scambio termico, si manifesta solo quando esistono differenze di temperatura tra diversi punti del corpo. Lo studio del fenomeno quindi richiede la conoscenza del campo di temperature all'interno del corpo e cioè la precisazione della funzione:

$$\theta = \theta(x, y, z, t) \quad (2.53)$$

che rappresenta la temperatura in ogni punto e ad ogni istante prefissato.

Quando il campo termico è indipendente dal tempo la conduzione avviene in regime stazionario, mentre quando la temperatura varia da punto a punto e nel tempo, ciò è caratteristico della conduzione in regime transitorio. La forma più semplice della conduzione si ha in regime stazionario ed in particolare quando la propagazione avviene in una sola dimensione.

In un mezzo continuo, il luogo dei punti ad uguale temperatura individuata, ad un dato istante, una *superficie isoterma*; le superfici isoterme non si intersecano in quanto nessun punto può essere simultaneamente a temperature diverse.

In regime variabile le superfici isoterme sono mobili e deformabili, mentre in regime stazionario esse sono invariabili.

L'intersezione di un piano con le superfici isoterme determina su quel piano l'insieme delle *curve isoterme*, che, come le superfici, non possono intersecarsi, sono continue all'interno del corpo e terminano sulla sua superficie esterna, ovvero sono in esso contenute.

### La legge di Fourier

La maggior differenza di temperatura per unità di lunghezza si incontra attraversando le superfici isoterme nella direzione normale  $n$ .

Secondo l'ipotesi di Fourier, la quantità di calore  $dQ$  che attraversa un elemento di superficie isoterma  $dS$  nella direzione normale nell'intervallo di tempo  $dt$ , è proporzionale alla differenza di temperatura per unità di lunghezza nella stessa direzione secondo la relazione:

$$dQ_n = -k dS \frac{\partial \theta}{\partial n} dt \quad (2.54)$$

in cui il fattore di proporzionalità  $k$ , denominato *conduttività termica*, è una proprietà fisica caratteristica del mezzo e ne definisce l'attitudine a condurre calore; il segno meno è introdotto per tener conto che il calore si propaga nel senso delle temperature decrescenti.

In base all'equazione 2.54 si può definire il flusso termico specifico  $\mathbf{q}$  come la quantità di calore che si propaga per unità di tempo attraverso l'unità di area di una superficie isoterma nella direzione normale. Si ha dunque:

$$\mathbf{q} = -k \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (2.55)$$

Per una superficie isoterma da area  $A$ , il flusso termico che la attraversa è in generale dato da:

$$\mathbf{q}' = - \int_A k \frac{\partial \theta}{\partial n} dA \quad (2.56)$$

L'equazione 2.55 può essere espressa con le notazioni del calcolo vettoriale:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} \quad (2.57)$$

in cui  $\nabla \theta$  è il gradiente della distribuzione di temperatura nel punto considerato, ed  $\mathbf{n}$  il vettore unitario in direzione normale alla superficie isoterma passante per il punto ed orientato nel senso delle temperature decrescenti.

Il gradiente della distribuzione di temperatura, nel punto  $P$ , è un vettore orientato nella direzione delle temperature crescenti, normale alla superficie isoterma e passante per  $P$ . Si può pertanto anche definire un vettore flusso termico specifico ponendo:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta \quad (2.58)$$

Il vettore flusso termico  $\mathbf{q}$  è anch'esso normale alla superficie isoterma nel punto  $P$ , ma orientato nella direzione delle temperature decrescenti. I due campi vettoriali  $\mathbf{q}$  e  $\nabla \theta$  sono sovrapposti e coincidenti a meno del verso e dell'intensità.

Si definiscono *linee di flusso* quelle linee che in ogni punto hanno come tangente il gradiente locale di temperatura. L'insieme delle linee di flusso che partono da un contorno chiuso definisce un *tubo di flusso*; in regime stazionario il flusso termico che si propaga attraverso di esso è costante su ogni sezione.

Su una superficie generica  $S$  passante per il punto  $P$ , il flusso termico specifico  $q_S$  è dato da:

$$q_S = \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} \quad (2.59)$$

essendo  $\mathbf{s}$  il vettore unitario normale alla superficie  $S$  considerata nel punto  $P$ .

La legge di Fourier espressa dall'equazione 2.58 è valida per la conduzione in solidi isotropi e la sua applicazione pratica richiede la misura in laboratorio della conduttività termica  $k$ , su campioni rappresentativi dei mezzi interessati. Nel caso di mezzi anisotropi il vettore flusso termico non è

necessariamente parallelo al gradiente di temperatura e quindi non normale alle superfici isoterme. Infatti, la conduttività termica nei mezzi isotropi è la stessa in tutte le direzioni, mentre nei mezzi anisotropi manifesta variazioni direzionali.

La legge di Fourier può essere generalizzata per il caso di mezzi anisotropi secondo la relazione:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla\theta \quad (2.60)$$

dove  $\mathbf{k}$  è il tensore di conduttività termica.

Indicando il vettore gradiente di temperatura come

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\nabla\theta \quad (2.61)$$

il flusso termico può essere espresso per mezzo della relazione:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.62)$$

### Equazione generale della conduzione

Lo studio della propagazione del calore per conduzione all'interno di un mezzo comporta l'analisi del campo termico al suo interno, ossia la precisazione della funzione introdotta nell'equazione 2.53. Tale funzione può essere ottenuta dalla risoluzione dell'equazione generale della conduzione, che esprime il bilancio di energia di un sistema sede di propagazione del calore per conduzione.

Nell'impostare il bilancio energetico si assumono le seguenti ipotesi:

- Il mezzo è costituito da un solido "opaco" a baricentro fermo, con proprietà fisiche definite e indipendenti dal tempo;
- Le variazioni di volume, conseguenti alle variazioni di temperatura, sono trascurabili in confronto al volume stesso;
- Le sorgenti di calore interne rappresentano l'energia generata per unità di volume, nell'unità di tempo.

Si consideri un volume  $\tau$  all'interno del corpo opaco sede di un processo di conduzione, sia  $S$  la superficie che lo delimita ed  $\mathbf{n}$  la normale uscente; in base alla formulazione generale del primo principio della termodinamica e alle ipotesi fatte in precedenza, è possibile scrivere:

$$-\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_\tau \dot{q} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau u \rho d\tau \quad (2.63)$$

Il primo termine a primo membro rappresenta il flusso termico netto entrante nel volume  $\tau$  attraverso la superficie  $S$ ; il secondo l'energia generata

per unità di tempo nello stesso volume; il termine a secondo membro esprime la variazione nel tempo dell'energia interna del volume  $\tau$ .

Per il teorema della divergenza, il primo membro dell'equazione 2.63 può essere scritto nella forma:

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_\tau \nabla \mathbf{q} d\tau \quad (2.64)$$

Tenendo conto dell'equazione 2.64 e della relazione  $dU = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} d\tau dt$ , che esprime il termine di energia interna, si ha:

$$\int_\tau \left[ \nabla \mathbf{q} - \dot{q} + \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] d\tau \quad (2.65)$$

data l'arbitrarietà del volume  $\tau$  si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} - \dot{q} = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.66)$$

In condizioni stazionarie, e ipotizzando che all'interno del sistema non vi sia produzione di calore, l'equazione 2.66 assume la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.67)$$

## 2.5 Parallelo fra campo termico e campo elettrico

Le equazioni 2.61, 2.62, 2.67, governano il problema della conduzione termica sotto l'ipotesi che il calore generato all'interno del sistema sia nullo e che il fenomeno della trasmissione del calore avvenga in condizioni stazionarie.

Riprendendo le equazioni scritte analizzando il campo elettrico è possibile notare un parallelismo tra le equazioni 2.61, 2.62, 2.67, che regolano la conduzione del calore in un solido e le equazioni 2.22, 2.35, 2.40, che governano il passaggio di corrente elettrica stazionaria in un conduttore.

Utilizzando la terminologia del campo meccanico è possibile individuare, per i due campi, l'equazione di equilibrio, l'equazione di legame, l'equazione di congruenza. Nella tabella 2.1 è mostrato il parallelo tra le equazioni che governano il passaggio della corrente elettrica continua e le equazioni che regolano la conduzione del calore.

## 2.6 Analisi della trasmissione del calore col metodo degli elementi finiti

In base alle ipotesi fatte e ai risultati ottenuti nei precedenti paragrafi è possibile impostare la risoluzione del problema della trasmissione del calore utilizzando il metodo degli elementi finiti [1]. Questa strada implica la scrittura del problema in forma debole.

Equazioni	Campo termico	Campo elettrico
Equilibrio	$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$
Legame	$\mathbf{q} = \mathbf{k}\epsilon$	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$
Congruenza	$\epsilon = -\nabla\theta$	$\mathbf{e}_0 = -\nabla V_0$

Tabella 2.1: Parallelo fra le equazioni che regolano il passaggio di corrente elettrica stazionaria e le equazioni che regolano la conduzione del calore.

Così come per il campo meccanico anche per il campo termico è possibile scrivere il principio degli spostamenti virtuali, che in questo caso prende il nome di *principio delle temperature virtuali*.

Il punto di partenza è dato dall'equazione di bilancio termico:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + q^B = 0 \quad (2.68)$$

Sulla superficie del corpo devono essere verificate le seguenti condizioni:  
La **condizione essenziale**:

$$\theta = \theta^S \quad \text{su} \quad S_\theta \quad (2.69)$$

e la **condizione naturale**:

$$k_n \frac{\partial \theta}{\partial n} = q^S \quad \text{su} \quad S_q \quad (2.70)$$

$\theta^S$  è la temperatura superficiale nota sulla porzione di superficie  $S_\theta$ ;  $k_n$  è la conduttività termica del corpo lungo la direzione individuata dalla normale  $\mathbf{n}$ . La normale  $\mathbf{n}$  è considerata positiva se uscente dal corpo.  $q^S$  è il flusso termico per unità di superficie noto sulla porzione di superficie  $S_q$ . Le due porzioni in cui risulta divisa la superficie totale  $S$  sono tali per cui  $S_\theta \cup S_q = S$  e  $S_\theta \cap S_q = 0$ .

L'equazione 2.68 può essere scritta, in base all'equazione 2.60, come:

$$\nabla \cdot (\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}') + q^B = 0 \quad (2.71)$$

dove, per semplicità di notazione, si è indicato con  $\boldsymbol{\theta}'$  il vettore gradiente di temperatura  $\nabla\theta$ .

Si consideri ora una distribuzione di temperature  $\hat{\theta}$  scelta in maniera arbitraria, tale che  $\hat{\theta} = 0$  su  $S_\theta$ .

Valutando i contributi sull'intero volume del solido è possibile scrivere la seguente equazione di bilancio:

$$\int_V [\nabla \cdot (\mathbf{k}\boldsymbol{\theta}') + q^B] \hat{\theta} dV = 0 \quad (2.72)$$

$\hat{\theta}$  prende il nome di *distribuzione delle temperature virtuali*.

Essendo  $\hat{\theta}$  arbitraria, perché la 2.72 sia soddisfatta deve essere nullo il termine tra parentesi quadre, il che riconduce all'equazione di bilancio termico 2.71. L'obiettivo di questa trattazione è quello di esprimere l'equazione di bilancio termico in una forma che contenga derivate di ordine inferiore, cioè in una forma che contenga derivate del primo ordine. Per ottenere questo risultato si utilizzerà la condizione al contorno naturale.

Si consideri la relazione matematica:

$$\nabla \cdot (\hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}') = \hat{\boldsymbol{\theta}}'^T \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' + \hat{\theta} \nabla \cdot (\mathbf{k} \boldsymbol{\theta}') \quad (2.73)$$

Sostituendo, l'equazione 2.72 assume la forma:

$$\int_V [\nabla \cdot (\hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}') - \hat{\boldsymbol{\theta}}'^T \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' + q^B \hat{\theta}] dV = 0 \quad (2.74)$$

In base al teorema della divergenza si ha:

$$\int_V \nabla \cdot (\hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}') dV = \int_S \hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.75)$$

Esprimendo la condizione naturale come:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_n = q^S \quad \text{su } S_q \quad (2.76)$$

è possibile riscrivere l'equazione 2.75 nella forma:

$$\int_V (\nabla \cdot (\hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}')) dV = \int_S \hat{\theta} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \hat{\theta} q_n dS \quad (2.77)$$

Sostituendo nell'equazione 2.74 si ottiene:

$$\int_V [-\hat{\boldsymbol{\theta}}'^T \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' + q^B \hat{\theta}] dV = \int_S \hat{\theta} q_n dS \quad (2.78)$$

In base alla condizione al contorno naturale, espressa dall'equazione 2.76, e all'ipotesi che  $\hat{\theta} = 0$  su  $S_\theta$ , si può infine scrivere:

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\theta}}'^T \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' dV = \int_V q^B \hat{\theta} dV + \int_{S_q} \hat{\theta}^S q^S dS \quad (2.79)$$

L'equazione 2.79 può essere riscritta aggiungendo un termine che tenga conto dei flussi termici concentrati:

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\theta}}'^T \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}' dV = \int_V q^B \hat{\theta} dV + \int_{S_q} \hat{\theta}^S q^S dS + \sum_i \hat{\theta}^i Q^i \quad (2.80)$$

dove:

- $Q^i$  sono i flussi termici concentrati;
- $\mathbf{k}$  è il tensore di conducibilità termica.

L'equazione 2.80 esprime il *principio delle temperature virtuali*.

## 2.7 Analisi del passaggio della corrente elettrica stazionaria

In funzione dell'analogia tra campo elettrico e campo termico, evidenziata nella tabella 2.1, è lecito estendere la trattazione mediante il metodo degli elementi finiti vista nel precedente paragrafo anche al problema del passaggio della corrente elettrica continua.

Infatti, fra le grandezze caratteristiche dei campi termico ed elettrico, è possibile individuare le corrispondenze riportate nella tabella 2.2:

Campo termico	$\theta$	$\epsilon$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{q}$
Campo elettrico	$V$	$\mathbf{e}$	$\sigma$	$\mathbf{j}$

Tabella 2.2: Corrispondenze fra le grandezze del campo termico e le grandezze del campo elettrico.

La scrittura in forma debole del problema del passaggio di corrente elettrica continua permette di ottenere, dualmente con quanto visto per il campo termico, l'equazione che esprime il *principio dei potenziali virtuali*:

$$\int_V \hat{\mathbf{V}}'^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}' dV = \int_V j^B \hat{V} dV + \int_S \hat{V} j_n dS + \sum_i \hat{V}^i J^i \quad (2.81)$$

dove:

- $\hat{\mathbf{V}}'^T = \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} \right]$ ;
- $\boldsymbol{\sigma}$  è il tensore di conducibilità elettrica;
- $j^B$  rappresenta la corrente elettrica generata all'interno del conduttore;
- $J^i$  sono densità di corrente concentrate.

L'equazione 2.81 è valida assunta una distribuzione arbitraria del potenziale elettrico  $\hat{V}$ .

Come per il campo termico, anche per il campo elettrico si assumono le seguenti condizioni al contorno:

La **condizione essenziale**:

$$V = V^S \quad \text{su} \quad S_V \quad (2.82)$$

e la **condizione naturale**:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = j_n = j^S \quad \text{su} \quad S_j \quad (2.83)$$

Per le due porzioni della superficie totale  $S$  valgono le seguenti proprietà:  $S_V \cup S_j = S$  e  $S_V \cap S_j = 0$ . In particolare la distribuzione arbitraria del potenziale elettrico sarà tale da annullarsi su  $S_V$ . Sotto questa ipotesi, e ricordando le equazioni 2.82 e 2.83, il principio dei potenziali virtuali può essere scritto nella forma:

$$\int_V \hat{\mathbf{V}}'^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}' dV = \int_V j^B \hat{V} dV + \int_{S_j} \hat{V}^S j^S dS + \sum_i \hat{V}^i J^i \quad (2.84)$$

In funzione dell'ipotesi di stazionarietà e nel caso sia nulla la corrente elettrica generata all'interno del conduttore, l'equazione 2.84 può essere scritta come:

$$\int_V \hat{\mathbf{V}}'^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}' dV = \int_{S_j} \hat{V}^S j^S dS + \sum_i \hat{V}^i J^i \quad (2.85)$$

In particolare l'equazione 2.85 rappresenta la forma debole del problema del passaggio di corrente elettrica continua che si utilizzerà nella valutazione del comportamento del materiale autodiagnosticante.

## Capitolo 3

# Legge di variazione della resistività elettrica

I materiali intelligenti esposti nel capitolo 1 presentano due comportamenti ben distinti: da una parte si ha la possibilità di valutare lo stato di danno di una struttura, dall'altra la capacità di individuarne lo stato tensionale. Nel prosieguo della trattazione si è scelto di privilegiare la descrizione del comportamento di un materiale in grado di fornire informazioni sullo stato di danno della struttura sotto forma di variazione e memorizzazione di una grandezza elettrica facilmente misurabile.

Il punto di partenza della trattazione è il comportamento dei composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica. Nelle figure 3.1 e 3.2 sono rappresentati gli andamenti della variazione di resistenza elettrica, rispettivamente in funzione della deformazione e della tensione, che si osservano per i composti contenenti fibre di carbonio PAN-HMCF. Le due serie di dati rappresentate sono state ottenute a partire dai diagrammi esistenti in letteratura [6] [7]. In analogia a questo comportamento, la variazione di resistenza elettrica sarà il segnale fornito dal modello che si intende sviluppare. Alla base di questa legge costitutiva si pone la seguente ipotesi: la misura della variazione di resistenza elettrica è frutto delle letture strumentali effettuate sui provini sottoposti ai test; ricordando che la resistenza elettrica può essere espressa mediante la relazione:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

con

- $\rho$ : resistività elettrica;
- $l$ : lunghezza del conduttore;
- $S$ : sezione del conduttore;

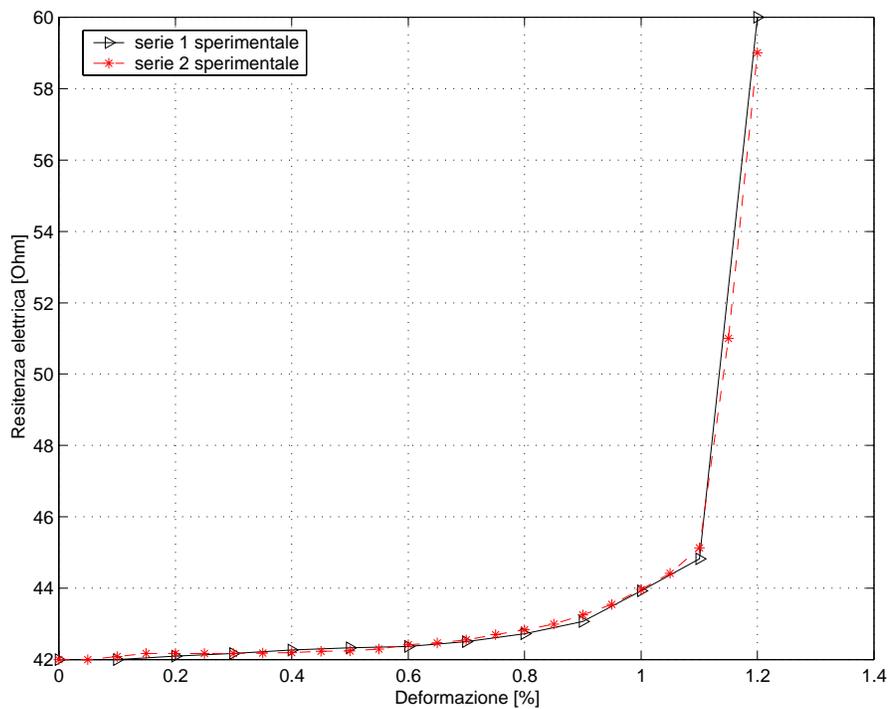


Figura 3.1: Variazione della resistenza elettrica nei composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica contenenti fibre di carbonio PAN-HMCF in funzione della deformazione

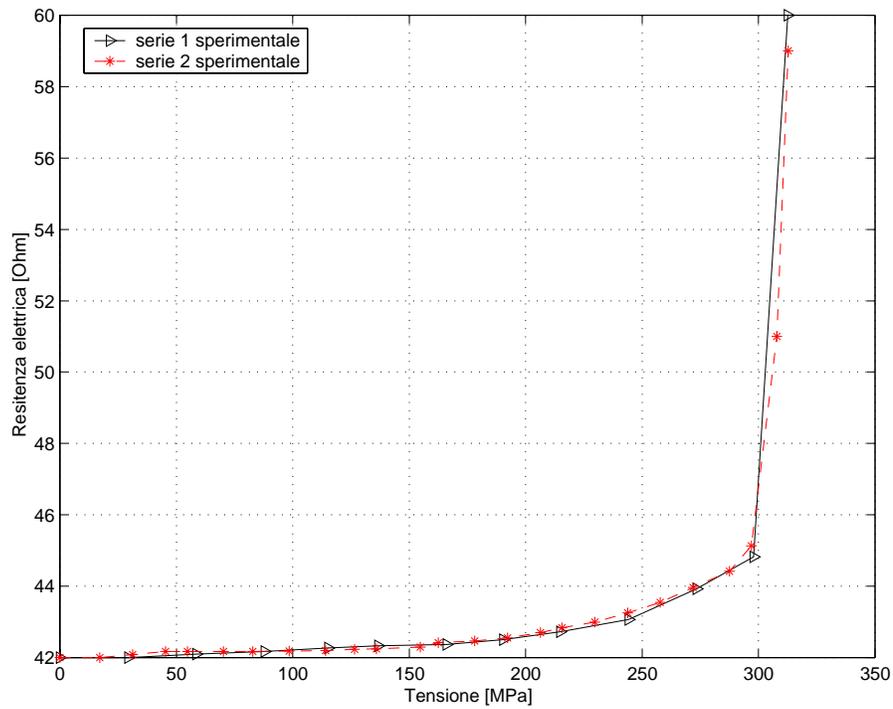


Figura 3.2: Variazione della resistenza elettrica nei composti fibre di carbonio/fibre di vetro in matrice plastica contenenti fibre di carbonio PAN-HMCF in funzione della tensione

si assume che la variazione di resistenza elettrica sia proporzionale alla variazione di resistività elettrica, trascurando le variazioni nella geometria del materiale conduttore:  $\Delta R = \Delta \rho \frac{l}{S}$ .

### 3.1 Il modello matematico

Si studia il problema esprimendo la variazione di resistività elettrica in funzione dell'invariante secondo della parte deviatorica del tensore degli sforzi; la scelta di una relazione di questo tipo è legata ai pochi dati disponibili.

Indicato con  $\mathbf{s}$  il tensore deviatorico, le sue componenti sono definite come  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{hh}}{3}\delta_{ij}$ . L'invariante secondo è dato dalla relazione:

$$J2 = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2) \quad (3.1)$$

Analizzando, alla luce delle assunzioni precedentemente fatte, gli andamenti riportati nella figura 3.2, si nota come l'incremento di resistenza elettrica sia contenuto per valori di sforzo inferiori a 250MPa, dove si ha una crescita approssimativamente lineare, mentre si evidenzia un aumento fortemente non lineare del diagramma sforzi-variazione di resistenza elettrica quando il valore della tensione si avvicina a 300MPa.

La modellazione della legge di variazione della resistività elettrica tiene conto di questi due aspetti: il modello proposto contiene un termine lineare, adatto a descrivere la prima fase del comportamento, e un termine parabolico adatto a descrivere la fase finale:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left[ 1 + \beta \cdot \left( \frac{\langle F(J2) \rangle}{Y} \right)^\alpha + \mu \cdot \left( \frac{\langle F(J2) \rangle}{Y} \right) \right] \quad (3.2)$$

Dove:

- $\rho_0$  rappresenta il valore iniziale della resistività elettrica del materiale;
- $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ , sono parametri determinati in maniera opportuna sulla base della variazione di resistenza elettrica riscontrata per i composti CFGFRP;
- $F$  prende il nome di *Funzione limite*;
- $Y$  è la *Funzione d'innescio*.

La funzione limite è espressa come  $F = f - Y$ . Il termine  $f$  rappresenta la *funzione di danno* del materiale. La scrittura della funzione limite come parte positiva della differenza tra la funzione di danno e la funzione d'innescio è stata scelta in seguito all'ipotesi di trascurare la variazione di resistenza elettrica per piccoli valori di sforzo.

La funzione d'innescio, la cui forma verrà descritta in seguito, rappresenta il valore dello stato di sforzo equivalente, al di sotto del quale il materiale non manifesta un comportamento intelligente.

La relazione che lega il campo di sforzi al segnale elettrico vale quando è soddisfatta la *condizione limite*:

$$g(F(J2)) > 0 \quad (3.3)$$

L'equazione 3.3 si traduce nella relazione:

$$F = f - Y > 0 \quad (3.4)$$

La funzione di danno è definita secondo il modello di Drucker-Prager:

$$f = \sqrt{J2} + 3\gamma p \quad (3.5)$$

Dove:

- $p$  è la pressione:  $p = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ ;
- $\gamma$  è un parametro del materiale.

La funzione d'innesco  $Y$  viene ricavata come un particolare valore della funzione di danno  $f$  ipotizzando che il materiale sia soggetto a uno stato tensionale monoassiale.

Sotto questa ipotesi il tensore degli sforzi può essere scritto come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Riscrivendo l'equazione 3.5 per questo stato di sforzo si ottiene:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2\sigma_0}{3} \right)^2 + \left( -\frac{\sigma_0}{3} \right)^2 + \left( -\frac{\sigma_0}{3} \right)^2 \right]} + 3\gamma \frac{\sigma_0}{3} \quad (3.6)$$

Sviluppando i conti si ottiene l'equazione della funzione d'innesco:

$$Y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \gamma\sigma_0 \quad (3.7)$$

dove:

- $\sigma_0$  è lo *sforzo di attivazione*;
- $\gamma$  è il parametro del materiale definito per la funzione di danno.

A questo punto la condizione limite può essere scritta come:

$$\sqrt{J2} + 3\gamma p - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \gamma\sigma_0 > 0 \quad (3.8)$$

## 3.2 Integrazione del modello

Il modello presentato è stato implementato nel codice di calcolo FEAP. Nell'ambiente numerico è stato modellato un provino al fine di valutare la curva di variazione della resistenza elettrica. Il provino è stato caricato secondo due leggi di carico mediante controllo dello spostamento:

- carico crescente in maniera monotona;
- carico ciclico, applicato con un progressivo incremento nella deformazione.

Le figure 3.3 e 3.4 riportano gli andamenti ottenuti per le due leggi di carico. Nella figura 3.3 l'andamento ottenuto è messo a confronto con le due serie di dati sperimentali; l'intervallo di variazione della resistenza elettrica mostrato in questa figura rappresenta il limite della capacità di autodiagnosi del materiale che, per una variazione relativa della resistenza elettrica pari al 45.7%, risulta irrimediabilmente danneggiato. La figura 3.4 mostra che, in corrispondenza di ogni ciclo di scarico, il valore di resistenza elettrica si attesta sul valore raggiunto nel precedente ciclo di carico. Benchè il modello sia molto semplice, si è scelto di utilizzarlo non esistendo in letteratura altri dati sperimentali su cui basarsi o precedenti modelli.

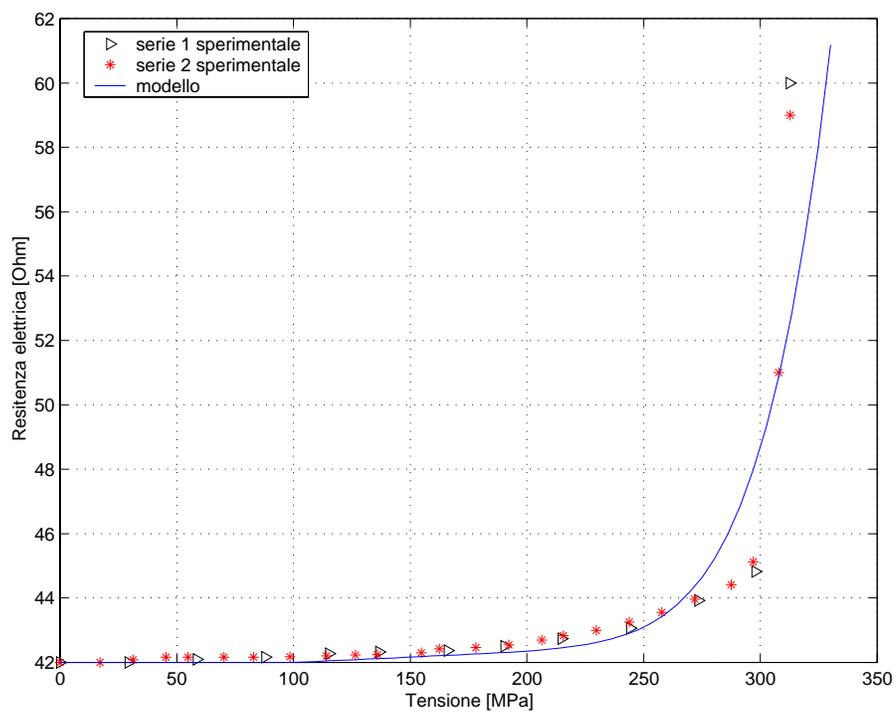


Figura 3.3: Confronto fra il modello di variazione della resistenza elettrica e i dati sperimentali in funzione della tensione

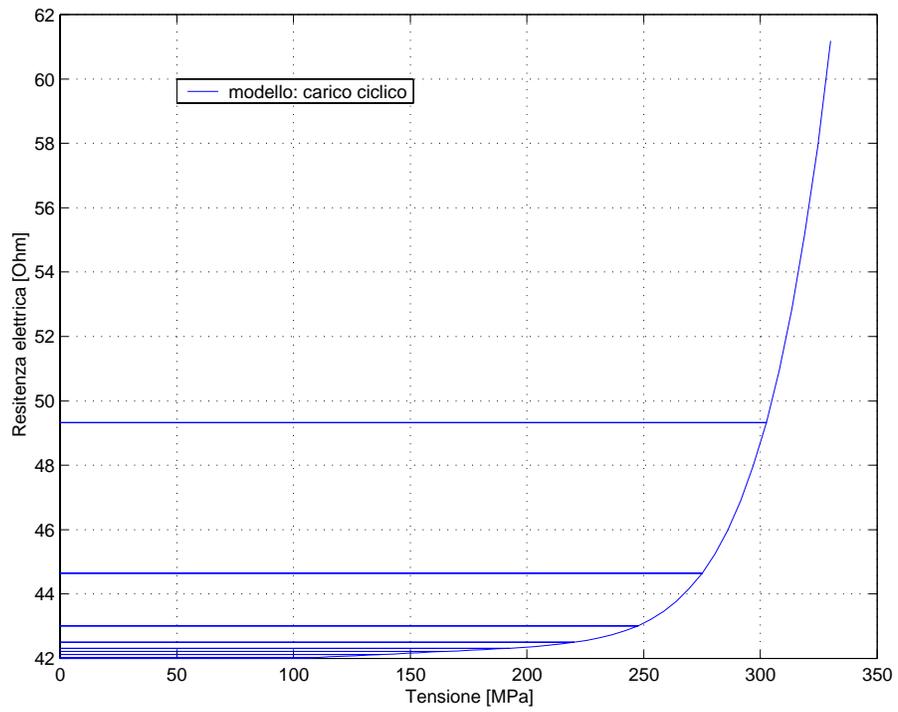


Figura 3.4: Andamento della variazione di resistenza elettrica per il provino soggetto a carico ciclico

## Capitolo 4

# Valutazione della capacità di autodiagnosi

Nei paragrafi che seguono sono illustrati i procedimenti e i risultati ottenuti dall'analisi svolte per valutare il comportamento del materiale autodiagnosticante il cui modello è stato presentato nel precedente capitolo.

Ipotizzando diverse possibilità d'impiego, nell'ambito del codice di calcolo FEAP si sono modellati differenti provini:

- Una trave costituita da materiale autodiagnosticante;
- Una trave in materiale non autodiagnosticante a cui sono applicate esternamente dodici barre in materiale autodiagnosticante;
- Una trave in materiale non autodiagnosticante a cui sono applicate esternamente quattro barre in materiale autodiagnosticante.

I test condotti su questi provini hanno lo scopo di stabilire la possibilità di risalire al massimo valore dello stato di sforzo raggiunto nel materiale, partendo dalle variazioni dei valori del potenziale elettrico.

### 4.1 Trave in materiale autodiagnosticante

Si ipotizza di avere un materiale omogeneo e isotropo, con caratteristiche autodiagnosticanti. Si considera quindi un provino di lunghezza pari a 600mm, avente sezione di 200mm×100mm, interamente costituito dal suddetto materiale. Il provino è sottoposto ad un carico applicato in mezzzeria (figura 4.2a), crescente in maniera monotona mediante controllo dell'inflessione. La figura 4.1 mostra l'andamento dell'inflessione in funzione del tempo: partendo da un valore di inflessione nullo si è arrivati al valore massimo di 9mm: sulla base del comportamento osservato allo scarico (figura 3.4) non si rende necessario sottoporre il provino a un carico ciclico.

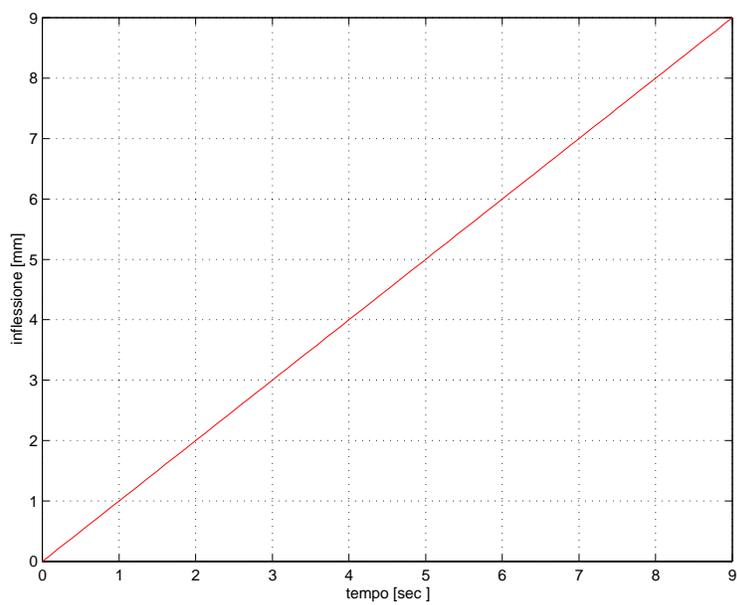


Figura 4.1: Andamento dell'inflexione in funzione del tempo

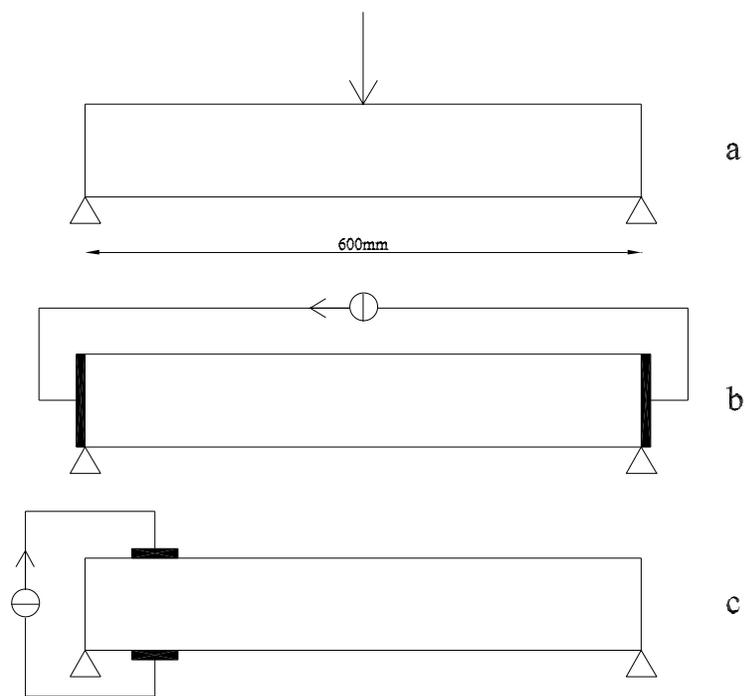


Figura 4.2: a) Schema statico; b-c) Schemi dei circuiti elettrici adottati.

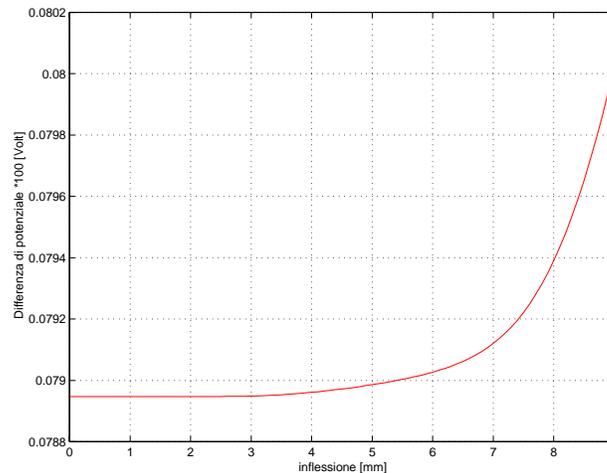


Figura 4.3: Variazione della differenza di potenziale misurata agli estremi della trave in funzione dell'inflexione

Durante l'applicazione del carico si fa circolare nel provino una corrente elettrica continua di intensità pari a 0.5A. Le figure 4.2b e 4.2c mostrano gli schemi dei circuiti elettrici impiegati.

Con riferimento allo schema di figura 4.2b, per tutta la storia di carico è stata misurata la differenza di potenziale agli estremi della trave. Nella figura 4.3 è riportato l'andamento della differenza di potenziale agli estremi della trave in funzione dell'inflexione. Come si può notare il valore della differenza di potenziale aumenta all'aumentare del carico. Ciò significa che il materiale è in grado di fornire, sotto forma di risposta elettrica, un segnale derivante da uno stimolo di origine meccanica. Dunque, dalla misurazione della differenza di potenziale, è possibile stabilire che il materiale ha subito un danno a causa dell'applicazione del carico. In particolare, la variazione della differenza di potenziale misurata agli estremi della trave risulta essere dell'1.36%.

#### Determinazione dello stato di danno lungo l'asse della trave

Il valore trovato, da solo, non permette di effettuare una valutazione dell'effettivo stato di danno della trave, ma indica solamente che, in seguito all'applicazione del carico, nel materiale si è avuto un accumulo di danno.

Per stabilire la regione del provino in cui è localizzato il danno, si è proceduto a una serie di misurazioni della differenza di potenziale trasversalmente all'asse, caricando il provino con la medesima legge di carico utilizzata in precedenza.

Utilizzando lo schema elettrico riportato in figura 4.2c si è ipotizzato di applicare, sulla faccia superiore e su quella inferiore del provino, due elettrodi, rispetto ai quali misurare la differenza di potenziale, delle dimensioni di

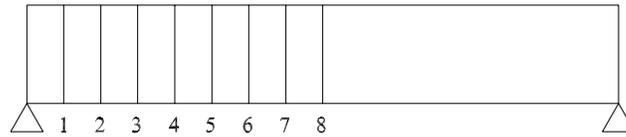


Figura 4.4: Sezioni di riferimento per la misura della differenza di potenziale nella determinazione dello stato di danno lungo l'asse della trave.

200mm×50mm. Gli elettrodi sono stati applicati in corrispondenza di otto sezioni significative (figura 4.4) poste a una distanza reciproca di  $L/16$ , dove  $L$  è la lunghezza totale del provino.

I valori registrati durante l'applicazione del carico hanno fornito, per ciascuna delle sezioni considerate, un diverso andamento della differenza di potenziale. Nella figura 4.5 sono messi a confronto gli andamenti ottenuti per le sezioni di ascissa  $5L/16$ ,  $3L/8$ ,  $7L/16$ ,  $L/2$  in funzione dell'inflessione del provino. Come si può notare la differenza di potenziale misurata è soggetta a una variazione tanto maggiore quanto più la sezione in esame è vicina alla mezzeria della trave.

Il dato significativo che è possibile ottenere da questa analisi è la variazione della differenza di potenziale relativa a ciascuna sezione: questa grandezza è in grado di descrivere lo stato di danno del materiale.

Nella tabella 4.1 sono riportate le massime variazioni percentuali della differenza di potenziale registrate per le sezioni esaminate.

Si può notare, in accordo con quanto mostrato in figura 4.5, che variazioni sensibili si hanno in corrispondenza della parte centrale del provino (sezioni 6, 7, 8): questo significa che il materiale ha subito un accumulo di danno nella zona di applicazione del carico, mentre altrove può considerarsi non danneggiato.

Traducendo i valori numerici contenuti nella tabella in un diagramma (figura 4.6) si evidenzia immediatamente un picco posizionato in corrispondenza della sezione numero 8, che è la sezione di mezzeria.

Nella figura 4.7 è rappresentato l'andamento del campo elettrico ottenuto applicando due elettrodi alle estremità del provino (figura 4.2b): le zone danneggiate sono quelle in cui il campo elettrico è meno intenso. Si può vedere come queste zone siano concentrate in prossimità della mezzeria della trave, in analogia con il risultato ottenuto dalle misurazioni della differenza di potenziale.

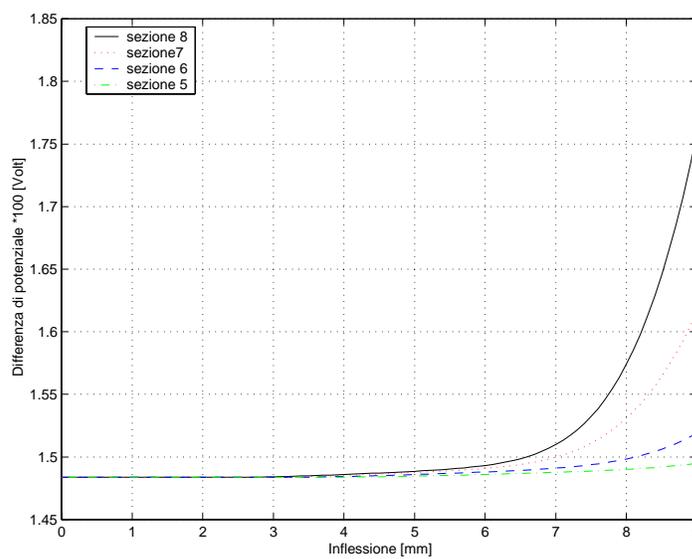


Figura 4.5: Variazione della differenza di potenziale per le sezioni 5, 6, 7, 8 in funzione dell'inflessione.

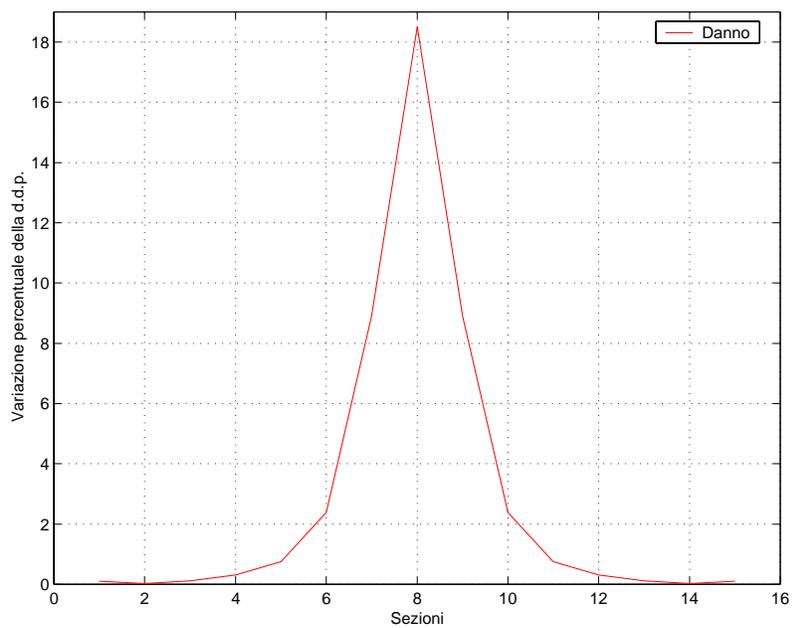


Figura 4.6: Visualizzazione dello stato di danno lungo l'asse della trave mediante la rappresentazione grafica della variazione percentuale della differenza di potenziale relativamente alle sezioni significative.

Sezione	Ascissa x/L	Variazione percentuale della d.d.p.
1	1/16	0.102
2	1/8	0.027
3	3/16	0.115
4	1/4	0.317
5	5/16	0.755
6	3/8	2.386
7	7/16	8.910
8	1/2	18.508

Tabella 4.1: Variazioni percentuali della differenza di potenziale relative alle otto sezioni considerate.

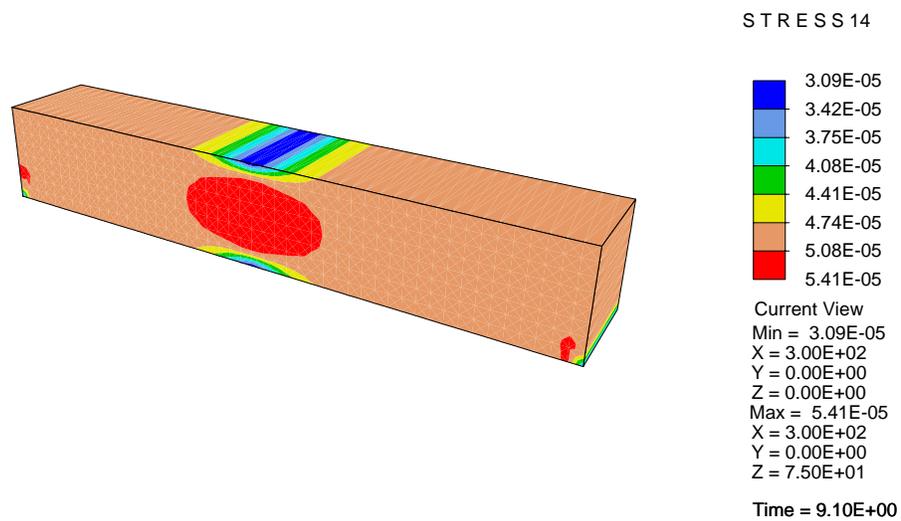


Figura 4.7: Andamento del vettore densità di corrente ottenuto per il provino danneggiato, applicando gli elettrodi alle estremità della trave.

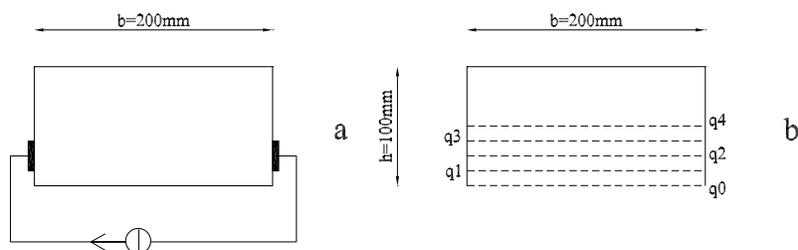


Figura 4.8: a) Schema del circuito elettrico; b) Quote di riferimento per la misura della d.d.p.

### Determinazione dello stato di danno lungo la sezione di mezzeria

Determinata la regione del provino in cui si ha maggior accumulo di danno, si vuole determinare lo stato di danno in riferimento alla sezione di mezzeria, che risulta la più sfavorita dai dati raccolti in precedenza.

Per determinare la variazione della differenza di potenziale si è ipotizzato di applicare alla trave due elettrodi delle dimensioni di  $25\text{mm} \times 25\text{mm}$ ; la differenza di potenziale successivamente misurata è stata riferita agli elettrodi. Lo schema a cui si è fatto riferimento è rappresentato nella figura 4.8a.

I valori della differenza di potenziale sono stati registrati applicando gli elettrodi a quote di riferimento a partire dalla faccia inferiore della trave. Come mostrato in figura 4.8b, si sono individuate le quote rappresentate dalle rette  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ .

La tabella 4.2 riporta le quote in funzione dell'altezza della sezione e le massime variazioni percentuali della differenza di potenziale relativamente a ciascuna quota.

Retta	Quota $z/h$	Variazione percentuale della d.d.p.
$q_0$	0	8.50
$q_1$	$1/8$	5.73
$q_2$	$1/4$	3.81
$q_3$	$3/8$	2.56
$q_4$	$1/2$	2.18

Tabella 4.2: Variazioni della differenza di potenziale relative a ciascuna quota.

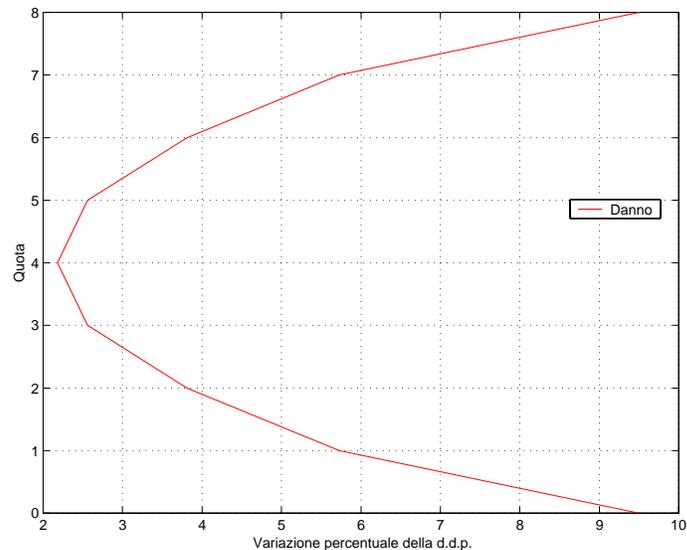


Figura 4.9: Visualizzazione dello stato di danno lungo la sezione della trave mediante rappresentazione grafica della variazione percentuale della differenza di potenziale riferita alle quote considerate.

Nella figura 4.9 è rappresentato l'andamento dello stato di danno lungo la sezione di mezzeria. Grazie alle caratteristiche del problema e del materiale è stato possibile estendere i dati all'intera sezione. Come si può notare le massime variazioni della differenza di potenziale si hanno in corrispondenza degli estremi della sezione, dove si hanno i massimi sforzi di trazione e di compressione. Il diagramma fornisce una variazione significativa della differenza di potenziale anche in corrispondenza dell'asse neutro.

In base a questa lettura, in corrispondenza dell'asse neutro, si evidenzia un accumulo di danno in seguito all'applicazione del carico; un simile comportamento non è però possibile: infatti, nel materiale autodiagnosticante in esame, il comportamento intelligente viene attivato a partire da un determinato stato tensionale descritto dalla funzione d'innescio  $Y$ .

Alla luce di questa osservazione è lecito supporre che le misure effettuate siano influenzate dall'andamento del vettore densità di corrente presente fra gli elettrodi: il brusco aumento della sezione, gli effetti di bordo e la variazione di resistività elettrica causano una grande (e non omogenea) dispersione delle linee di forza del campo elettrico.

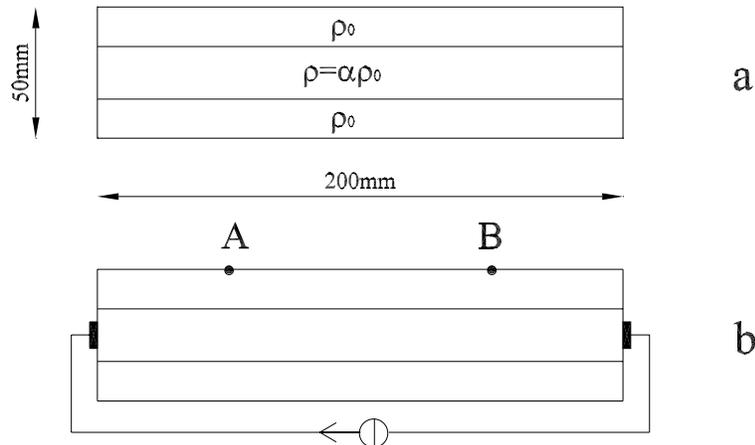


Figura 4.10: a) Conduttore costituito da strati con diverse resistività elettrica; b) Schema del circuito elettrico impiegato.

### Analisi dell'andamento delle linee di forza del vettore densità di corrente

Per chiarire questo aspetto si è analizzato l'andamento del vettore densità di corrente in un conduttore costituito da strati caratterizzati da differenti valori di resistività elettrica.

Come mostrato in figura 4.10a, il conduttore è costituito da tre strati: lo strato centrale ha una resistività  $\rho$  che è multiplo della resistività degli strati esterni tramite il coefficiente  $\alpha$ .

Sono stati applicati due elettrodi di  $10\text{mm} \times 50\text{mm}$  agli estremi del conduttore in corrispondenza dello strato centrale (figura 4.10b) e si è fatta circolare una corrente elettrica continua di intensità pari a  $0.1\text{A}$ . Nella figura 4.11 è mostrato l'andamento del vettore densità di corrente ottenuto per  $\alpha = 1000$ : si può notare come, a causa dell'elevata resistività dello strato centrale, le linee di forza del vettore densità di corrente, siano concentrate nei due strati esterni.

Successivamente si è ripetuto il test ponendo  $\alpha = 1$  e mantenendo la stessa intensità di corrente. La figura 4.12 mostra l'andamento ottenuto per il vettore densità di corrente: le linee di forza tendono a occupare l'intera sezione del conduttore.

Dal confronto fra le figure 4.12 e 4.11 è possibile notare che il diverso valore della resistività elettrica causa una diminuzione della sezione disponibile per il passaggio della corrente elettrica, con un conseguente incremento dell'intensità del vettore densità di corrente.

Nella tabella 4.3 sono riportati i valori della differenza di potenziale misurata fra i punti A e B, posti sullo strato a resistività costante, (figura

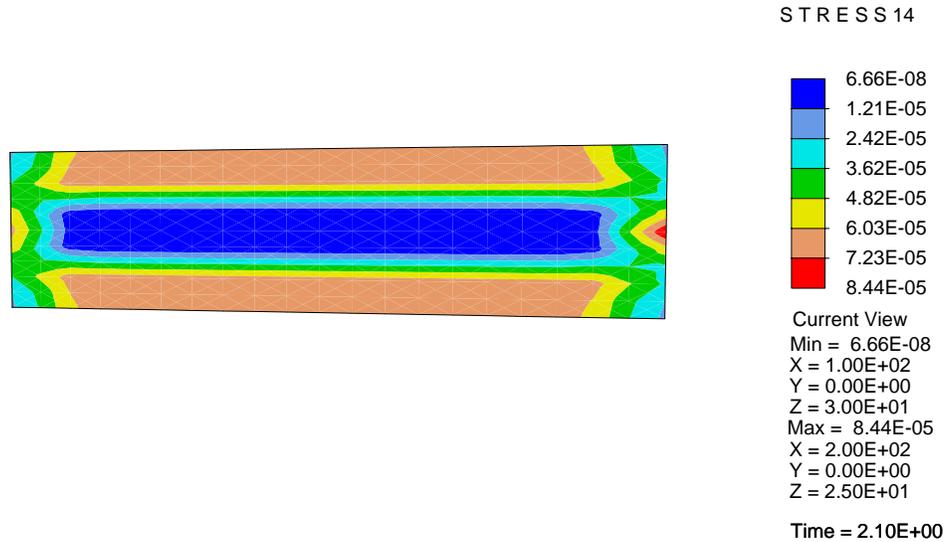


Figura 4.11: Andamento del vettore densità di corrente nel conduttore ottenuto per  $\alpha = 1000$ .

4.10b) per diversi valori del coefficiente  $\alpha$ . La variazione della resistività dello strato centrale, come si può notare, induce una variazione nella grandezza misurata.

	$\Delta V_{AB}$ volt
$\alpha = 1000$	0.0193
$\alpha = 1$	0.0115717

Tabella 4.3: Variazione della differenza di potenziale.

Alla luce di questo risultato è possibile arrivare alla seguente conclusione: *le linee di forza del vettore densità di corrente si concentrano in prossimità dell'asse neutro in funzione dell'aumento della resistività elettrica raggiunto nel materiale all'estremità della sezione.*

Questo comportamento, benchè permetta di ottenere un andamento qualitativo dello stato di danno coerente, dal punto di vista quantitativo introduce nelle misurazioni un errore tale da pregiudicare la possibilità di risalire al massimo sforzo al quale è stato sottoposto il materiale.

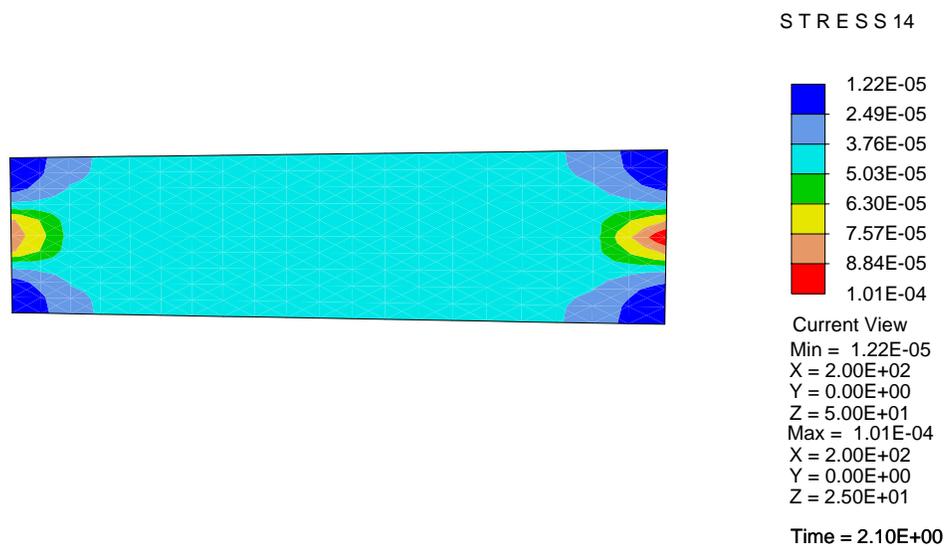


Figura 4.12: Andamento del vettore densità di corrente nel conduttore ottenuto per  $\alpha = 1$ .

### Determinazione del massimo valore di sforzo

Si vuole quindi valutare la possibilità di risalire al massimo valore dello stato di sforzo flessionale a partire dai valori di variazione della differenza di potenziale che hanno permesso di individuare l'andamento dello stato di danno lungo l'asse della trave (figura 4.6).

Questa assunzione è giustificata dal fatto che le dimensioni degli elettrodi utilizzati e la loro distanza reciproca consentono una minor dispersione delle linee di forza del vettore densità di corrente a favore di una maggiore precisione nelle misurazioni effettuate.

La figura 4.13 mostra l'andamento del vettore densità di corrente presente fra gli elettrodi posti in corrispondenza della sezione di ascissa  $L/2$ : il valore del campo elettrico si mantiene approssimativamente costante nel volume compreso fra gli elettrodi, mentre altrove si smorza rapidamente. Alla luce di questo andamento è lecito ritenere che le misurazioni della variazione della differenza di potenziale siano riferite alla sezione in esame.

Il calcolo del massimo valore di sforzo viene effettuato sotto le seguenti ipotesi:

- distribuzione lineare degli sforzi lungo la sezione;
- distribuzione parabolica del danno lungo la sezione.

In funzione della simmetria del problema è possibile restringere lo studio a metà sezione. Con riferimento alla figura 4.14, la lettura strumentale della variazione della differenza di potenziale fornisce il valore medio della variazione di resistenza elettrica, indicato con  $\Delta R_s$ ; con  $\Delta R_r$  si intende la variazione reale di resistenza elettrica, legata alla variazione reale di resistività elettrica, che, a seguito di una lettura strumentale, fornisce il medesimo valore di variazione della differenza di potenziale.

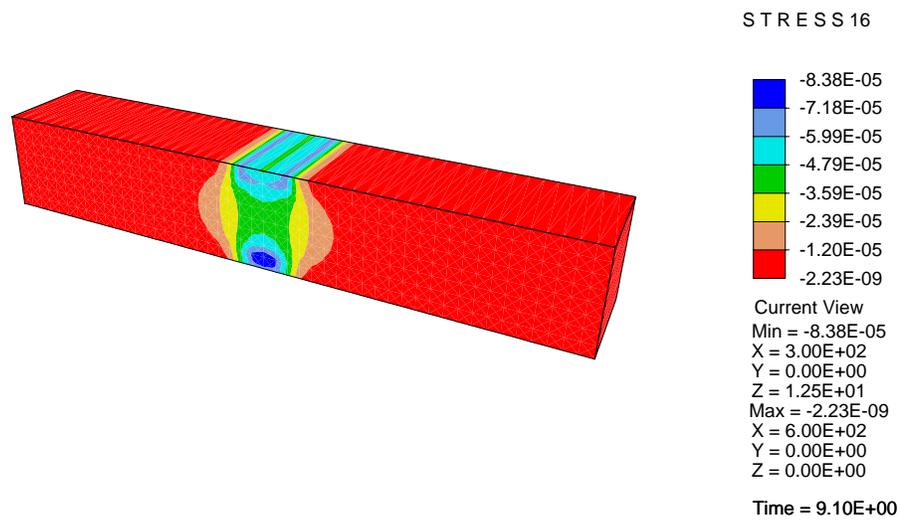


Figura 4.13: Andamento del vettore densità di corrente per gli elettrodi posti in corrispondenza della sezione di ascissa  $L/2$ .

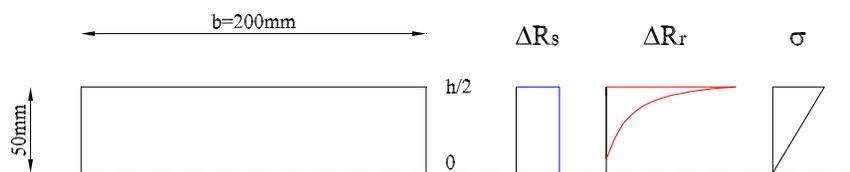


Figura 4.14: Schematizzazione della variazione di resistenza elettrica lungo la sezione:

$\Delta R_s$ : variazione della resistenza elettrica strumentale;

$\Delta R_r$ : variazione della resistenza elettrica reale;

Avendo ipotizzato che l'intensità di corrente elettrica si mantenga costante, la variazione della differenza di potenziale è proporzionale alla variazione di resistenza elettrica; infatti dall'equazione di legame:

$$\mathbf{e} = \rho \mathbf{j} \quad (4.1)$$

valida localmente, si deduce la relazione integrale, nota col nome di legge di Ohm:

$$\Delta V = R \cdot i \quad (4.2)$$

Indicando con la sigla *d.d.p.* la differenza di potenziale  $\Delta V$ , dall'equazione 4.2 si può ricavare la relazione di proporzionalità:

$$\Delta(d.d.p.) = \Delta R \cdot i \quad (4.3)$$

Dove:

- $\Delta(d.d.p.)$  indica la variazione della differenza di potenziale;
- $\Delta R$  la variazione di resistenza elettrica;
- $i$  la corrente elettrica.

Dividendo l'equazione 4.3 rispetto alla corrente elettrica si ottiene:

$$\frac{\Delta(d.d.p.)}{i} = \Delta R \quad (4.4)$$

Integrando l'equazione 4.4 su metà sezione si ha:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dz = \int_0^{\frac{h}{2}} \Delta R_s dz = \int_0^{\frac{h}{2}} \Delta R_r dz \quad (4.5)$$

L'equazione 4.5 costituisce il punto di partenza per il calcolo del massimo stato tensionale a cui è stato sottoposto il materiale.

L'andamento reale della variazione di resistività elettrica è descritto dalla legge costitutiva che rappresenta il modello di comportamento del materiale autodiagnosticante:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left[ 1 + \beta \cdot \left( \frac{\langle F(J2) \rangle}{Y} \right)^\alpha + \mu \cdot \left( \frac{\langle F(J2) \rangle}{Y} \right) \right] \quad (4.6)$$

Ricordando che la funzione limite è espressa come  $F = f(J2) - Y$ , si introduce una nuova variabile:

$$X = \frac{\langle f(J2) - Y \rangle}{Y} \quad (4.7)$$

funzione dello stato di sforzo incognito.

Sostituendo nell'equazione 4.6 la variabile  $X$  e sostituendo ai parametri i valori numerici si ottiene l'equazione:

$$\rho = \rho_0[1 + 0.00056X^8 + 0.0079X] \quad (4.8)$$

Ricavando dall'equazione 4.8 la variazione di resistività elettrica si ottiene:

$$\Delta\rho = \rho_0[0.00056X^8 + 0.0079X] \quad (4.9)$$

Esprimendo la resistenza elettrica in funzione della resistività elettrica, secondo la relazione  $R = \rho \frac{l}{S}$ , l'equazione 4.5 può essere scritta come:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dz = \int_0^{\frac{h}{2}} \Delta\rho_r \frac{l}{S} dz \quad (4.10)$$

il rapporto  $l/S$ , costante, può essere portato fuori dal segno di integrale:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dz = \frac{l}{S} \int_0^{\frac{h}{2}} \Delta\rho_r dz \quad (4.11)$$

esplicitando l'equazione 4.11 in funzione dell'integrale della variazione della resistività elettrica, si ha:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \Delta\rho_r dz = \frac{S}{l} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dz \quad (4.12)$$

sostituendo alla quota  $z$  la variabile  $X$ , l'equazione 4.12 può essere riscritta come:

$$\int_{-1}^X \Delta\rho_r dX = \frac{S}{l} \int_{-1}^X \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dX \quad (4.13)$$

l'integrale a primo membro dell'equazione 4.13 può essere espresso come:

$$\int_{-1}^X \Delta\rho_r dX = \int_{-1}^0 \Delta\rho_r dX + \int_0^X \Delta\rho_r dX = \int_0^X \Delta\rho_r dX \quad (4.14)$$

infatti, per definizione,  $\Delta\rho_r = 0$  per  $X \leq 0$ . L'equazione 4.13 può quindi scriversi:

$$\int_0^X \Delta\rho_r dX = \frac{S}{l} \int_{-1}^X \frac{\Delta(d.d.p.)}{i} dX \quad (4.15)$$

sostituendo i valori numerici e svolgendo gli integrali si ottiene un'equazione di nono grado nell'incognita  $X$ .

L'equazione risolvente

$$0.00016306X^9 + 0.01039X^2 - 0.5492X - 0.5492 = 0 \quad (4.16)$$

viene risolta mediante l'utilizzo del metodo di Newton.

Determinato il valore della variabile  $X$  si valuta il massimo sforzo ipotizzando uno stato tensionale monoassiale. Dall'equazione 4.7 si ricava:

$$f = XY + Y \quad (4.17)$$

Esprimendo l'equazione 4.17 in funzione della componente del tensore degli sforzi, e ricordando che  $\sigma_0$  è lo sforzo di attivazione, si ha:

$$\sigma = \frac{\left[ X \left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \gamma \sigma_0 \right) + \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \gamma \sigma_0 \right]}{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \gamma \right)} \quad (4.18)$$

Svolgendo i conti si ottiene  $\sigma = 385.122\text{MPa}$ .

Dall'analisi numerica si ottiene un valore massimo dello sforzo flessionale pari a  $347\text{MPa}$ .

Il valore di sforzo calcolato a partire dai dati di variazione della differenza di potenziale è superiore dell'11% rispetto al valore derivante dall'analisi numerica.

Un confronto con l'andamento del modello (figura 3.3) consente di affermare che il materiale ha già raggiunto il limite.

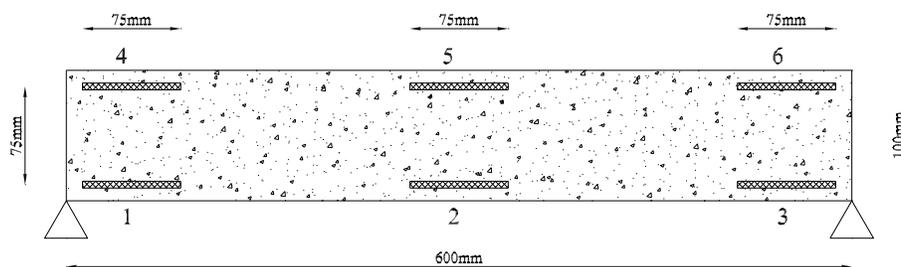


Figura 4.15: Schema di disposizione delle sei barre di materiale autodiagnosticante esternamente alla trave.

## 4.2 Barre autodiagnosticanti

Mantenendo le dimensioni del provino analizzato in precedenza, si considera una trave costituita da un materiale non dotato di caratteristiche autodiagnosticanti a cui sono applicate esternamente delle barre in materiale autodiagnosticante. Le barre sono considerate solidali con la trave. Si studiano due configurazioni: la prima prevede l'applicazione di dodici barre, sei per parte, ai lati della trave, la seconda prevede l'applicazione di due barre per lato per un totale di quattro barre. La variazione della differenza di potenziale rilevata alle estremità delle barre ha permesso di valutarne lo stato di danno.

Successivamente, in base all'ipotesi di perfetta aderenza fra le barre e la trave, e considerando una distribuzione lineare degli sforzi lungo la sezione della trave, si è determinato il massimo valore dello sforzo flessionale che si è raggiunto nella trave.

In entrambi i casi il provino è sottoposto a un carico crescente in maniera monotona mediante controllo dell'inflessione che, da un valore nullo, viene portata a un massimo di 11mm. Per tutta la storia di carico nelle barre è fatta circolare una corrente elettrica continua di intensità pari a 0.1A, applicando due elettrodi alle estremità delle barre.

### 4.2.1 Configurazione a dodici barre

Su ciascun lato della trave si applicano sei barre aventi sezione  $2\text{mm} \times 5\text{mm}$  e lunghezza pari a 75mm; nella figura 4.15 è mostrata la disposizione delle barre.

La misura della variazione della differenza di potenziale permette, in questo caso, di stabilire la zona del provino in cui si ha accumulo di danno: in questo modo le barre sono utilizzate come trasduttori elettro-meccanici.

La tabella 4.4 riporta le massime variazioni percentuali e le massime variazioni assolute della differenza di potenziale misurata agli estremi delle sei barre. È facile notare come per le barre poste alle estremità della trave

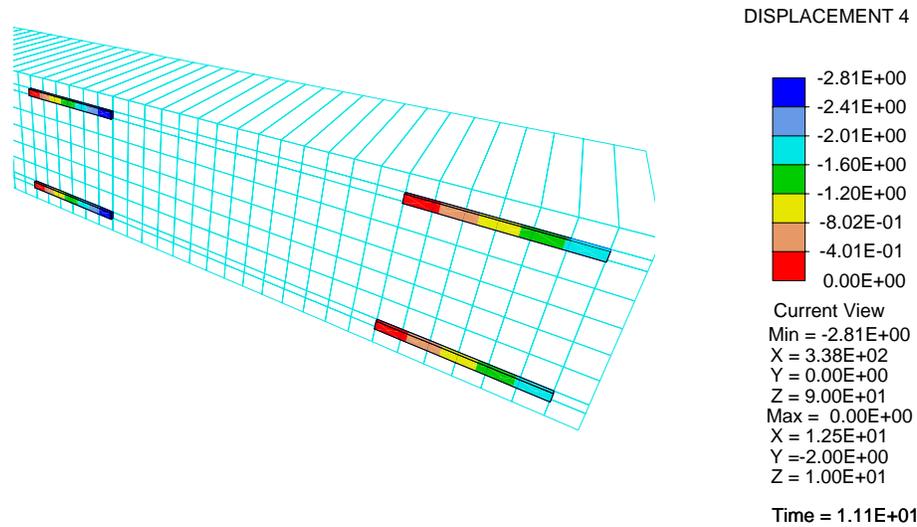


Figura 4.16: Andamento del potenziale elettrico lungo le barre: particolare delle barre 2, 5 a sinistra e 3, 6 a destra.

si siano registrate variazioni della differenza di potenziale trascurabili; al contrario, i valori riscontrati per le barre centrali (2 e 5) mettono in evidenza come in queste ci sia un accumulo di danno: questo dato indica che la zona della trave potenzialmente danneggiata è la zona di applicazione del carico.

Barra	Variazione di d.d.p. volt	Variazione di d.d.p. %
1	0.0002	0.01
2	0.83	42.06
3	0.0003	0.02
4	0.0002	0.01
5	0.8311	42.12
6	0.0003	0.02

Tabella 4.4: Massime variazione assolute e percentuali della differenza di potenziale misurata alle estremità delle sei barre autodiagnosticanti.

Le figure 4.16-4.18 mostrano, rispettivamente, l'andamento del potenziale elettrico, l'andamento del campo elettrico e la variazione della resistività elettrica per le sei barre. Come già evidenziato per i valori riportati nella tabella 4.4, nelle barre applicate alle estremità della trave non si ha accumulo di danno.

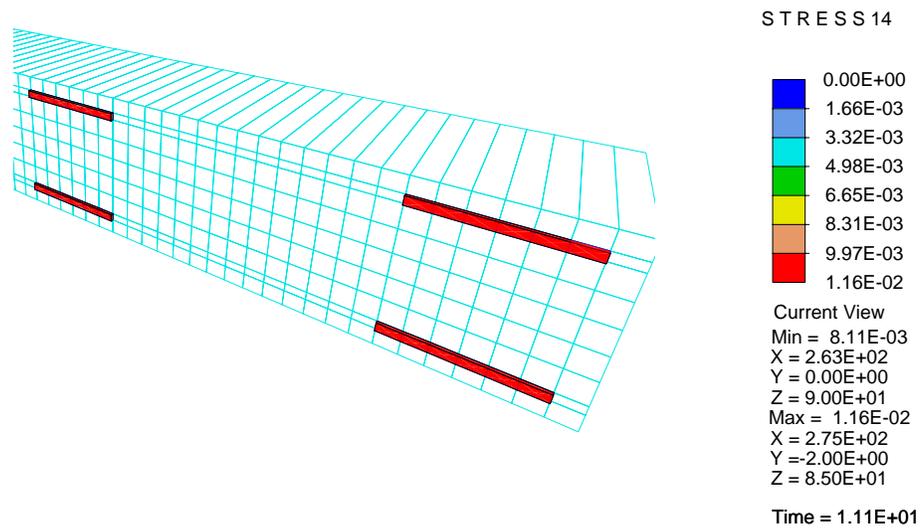


Figura 4.17: Andamento del vettore densità di corrente lungo le barre: particolare delle barre 2, 5 a sinistra e 3, 6 a destra.

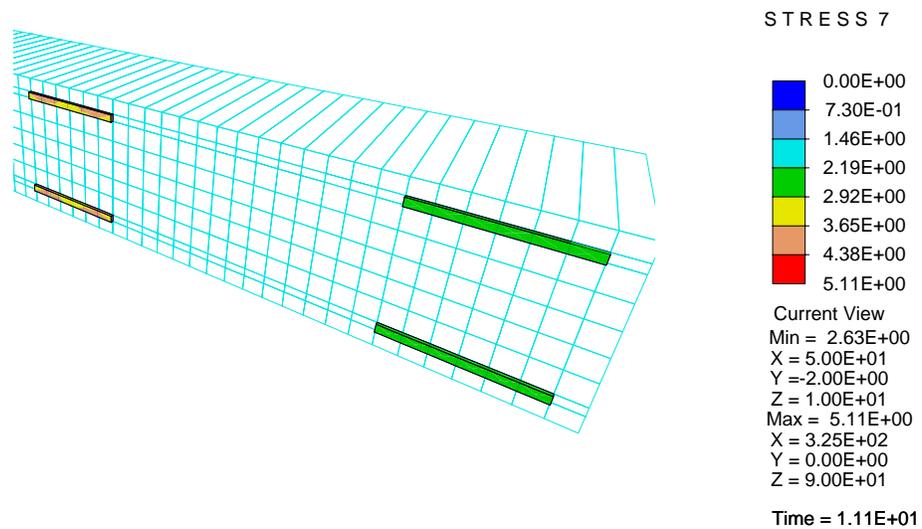


Figura 4.18: Massima variazione della resistività elettrica registrata nelle barre: particolare delle barre 2, 5 a sinistra e 3, 6 a destra.

### Determinazione del massimo valore di sforzo

Dopo aver stabilito la regione in cui si ha accumulato di danno, si vuole valutare il massimo valore dello sforzo flessionale a cui è stato sottoposto il provino.

Nel calcolo del massimo stato tensionale si ipotizza (figura 4.19):

- una distribuzione uniforme degli sforzi  $\sigma_{mb}$  lungo le sezioni delle barre;
- un andamento lineare degli sforzi lungo la sezione della trave.

In base all'equazione 4.4, e ricordando la relazione che lega resistenza e resistività elettrica, è possibile esprimere la variazione di resistività elettrica  $\Delta\rho_s$  a partire dal valore della variazione della differenza di potenziale:

$$\Delta\rho_s = \frac{\Delta(d.d.p.) \cdot S}{i \cdot l} \quad (4.19)$$

In base all'ipotesi secondo cui le barre sono soggette a uno stato tensionale monoassiale, la variazione reale della resistività elettrica è descritta dal modello espresso all'equazione 4.6.

Alla luce dell'equazione 4.7, e ricordando l'uguaglianza:

$$\Delta\rho_s = \Delta\rho_r \quad (4.20)$$

è possibile riscrivere l'equazione 4.9 nella forma:

$$\rho_0[0.00056X^8 + 0.0079X] - \frac{\Delta(d.d.p.) \cdot S}{i \cdot l} = 0 \quad (4.21)$$

L'equazione 4.21 viene scritta per le sei barre, sostituendo gli opportuni valori numerici. La soluzione mediante il metodo di Newton delle equazioni così ricavate permette di determinare il valore della massima tensione raggiunta nelle barre in funzione dell'equazione 4.18. I valori determinati sono messi a confronto, nella tabella 4.5, con i massimi valori di tensione ricavati dall'analisi al calcolatore.

I valori riportati nella tabella mostrano che, in base alla configurazione adottata, il modello è ben in grado di indicare l'effettivo stato di danno del materiale.

In riferimento alla figura 3.3, i valori di sforzo determinati permettono di capire che il materiale ha raggiunto il limite.

In base all'ipotesi di perfetta aderenza fra i materiali è possibile stabilire un coefficiente di proporzionalità tra i valori del campo di sforzi presente nelle barre e i valori del campo di sforzi della trave:

$$\epsilon_t = \epsilon_b \Rightarrow \frac{\sigma_t}{E_t} = \frac{\sigma_b}{E_b} \Rightarrow \sigma_t = \frac{E_t}{E_b} \sigma_b = p \cdot \sigma_b$$

Barra	Tensione normale calcolata in base al modello MPa	Tensione normale derivante dall'analisi numerica MPa
1	101.4	93.3
2	327.57	326.6
3	101.9	93.2
4	-101.4	-91.4
5	-327.61	-326.7
6	-101.9	-91.4

Tabella 4.5: Massime tensioni nelle barre calcolate in funzione del segnale elettrico del materiale autodiagnosticante e massime tensioni derivanti dall'analisi numerica.

I valori dei moduli elastici dei due materiali sono stati assunti rispettivamente pari a 30000MPa, per il materiale non autodiagnosticante che costituisce la trave, e 27500MPa per il materiale autodiagnosticante.

In base a questi valori il coefficiente di proporzionalità vale 1.091.

In funzione del coefficiente  $p$  e sfruttando la similitudine fra i triangoli ABC e ADE di figura 4.20 è possibile determinare il massimo valore dello sforzo flessionale a cui è stato sottoposto il materiale.

In base alla similitudine fra triangoli si ottiene il massimo valore di sforzo nel materiale autodiagnosticante che si avrebbe se la barra si trovasse all'estremità della sezione della trave:

$$\sigma_{b2} = \frac{\sigma_{b1} \cdot h_s}{h_b} = 436.809\text{MPa} \quad (4.22)$$

Moltiplicando il valore di sforzo così ottenuto per il coefficiente di proporzionalità si ottiene il massimo valore di sforzo raggiunto nella trave:

$$\sigma_c = \sigma_{b2} \cdot p = 476.559\text{MPa} \quad (4.23)$$

Il valore del massimo sforzo flessionale che si ottiene dall'analisi numerica è pari a 525MPa.

Il valore di sforzo calcolato in base ai dati di variazione della differenza di potenziale risulta essere inferiore del 9% rispetto al valore derivante dall'analisi al calcolatore.

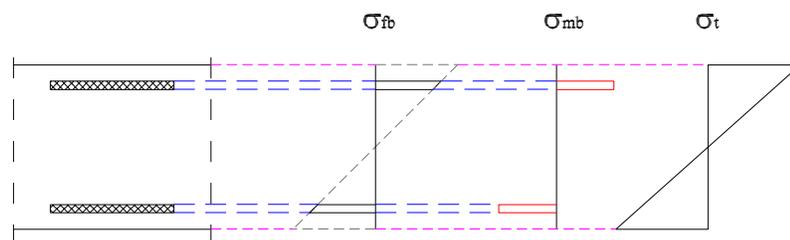


Figura 4.19: Schematizzazione dello stato tensionale presente nelle barre; Andamento degli sforzi di flessione lungo la sezione della trave.

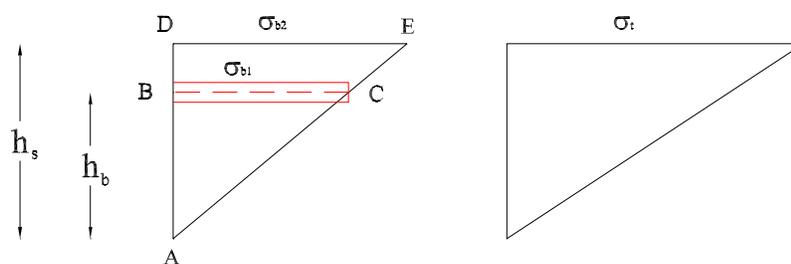


Figura 4.20: Schematizzazione adottata nel calcolo del massimo valore dello sforzo flessionale.

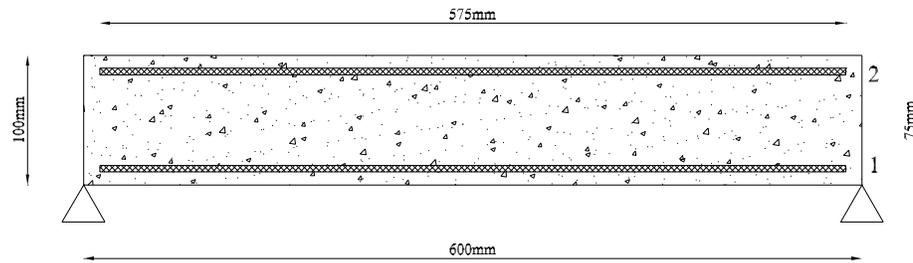


Figura 4.21: Schema della disposizione di due barre di materiale autodiagnosticante esternamente alla trave.

#### 4.2.2 Configurazione a quattro barre

La figura 4.21 mostra, in via schematica, la disposizione di due delle quattro barre su un lato del provino. Le barre hanno una sezione di  $2\text{mm} \times 5\text{mm}$  e una lunghezza di 575mm.

I dati relativi alle misurazioni della differenza di potenziale alle estremità delle barre evidenziano che, in funzione dell'aumento dell'inflessione, si ha un incremento dei valori di differenza di potenziale. Questo segnale indica che nelle barre si è avuto accumulo di danno. Nella figura 4.22 è mostrato l'andamento della variazione della differenza di potenziale registrato per la barra inferiore in funzione dell'inflessione.

Le variazioni della differenza di potenziale misurate (tabella 4.6) non permettono di stabilire quale sia la regione in cui si ha maggior accumulo di danno, ma solo che il materiale è danneggiato.

Barra	Variazione assoluta della d.d.p.	Variazione percentuale della d.d.p.
1	1.3422	9.24
2	1.3443	9.26

Tabella 4.6: Massime variazioni assolute e percentuali della differenza di potenziale misurata alle estremità delle barre.

Ipotizzando, con riferimento alla figura 4.19, che lungo le sezioni delle barre si abbia uno stato tensionale uniforme, è possibile procedere al calcolo del massimo valore di sforzo a cui è stato sottoposto il materiale.

Analogamente al metodo seguito nel precedente paragrafo, e in funzione dei valori numerici riscontrati in questa analisi, è possibile riscrivere l'equazione 4.21 nella forma:

$$0.0014728X^8 + 0.020777X - 0.234 = 0 \quad (4.24)$$

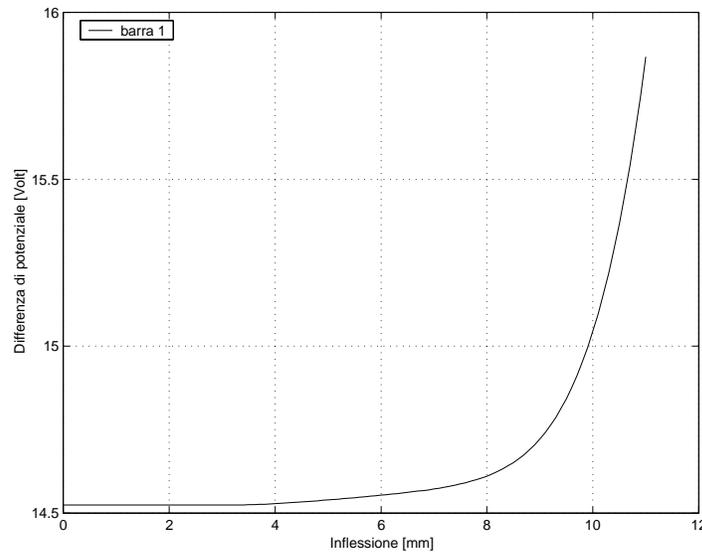


Figura 4.22: Variazione della differenza di potenziale misurata all'estremità della barra inferiore in funzione dell'inflessione.

La soluzione dell'equazione 4.24 permette di ricavare il valore  $\sigma_{mb} = 284.261\text{MPa}$ .

Il confronto fra questo valore di tensione e i valori ottenuti nel precedente paragrafo per le barre 2 e 5 evidenzia una differenza rilevante. Questa differenza è da imputare al comportamento del modello che causa una forte dispersione del segnale.

La figura 4.23 mostra la massima variazione di resistività elettrica che si riscontra lungo la barra. A differenza di quanto visto nel paragrafo precedente, nel quale le sei barre esaminate erano caratterizzate da una variazione di resistività elettrica pressochè uniforme, in questo caso si può facilmente vedere come l'intervallo di variazione della resistività elettrica sia più ampio.

### Determinazione dello stato di danno lungo l'asse della barra

Per poter determinare con maggiore precisione lo stato di danno lungo l'asse della barra, e quindi anche lungo l'asse della trave, è necessario che le misure della differenza di potenziale siano riferite a regioni della barra in cui sia lecito considerare uniforme la variazione di resistività elettrica: in tal modo ci si può ricondurre a un caso simile a quello esaminato nella "configurazione a dodici barre".

Con riferimento alla figura 4.24, si misura la differenza di potenziale relativa a ciascuno degli otto tratti in cui si è suddivisa la barra, caricando il provino con la medesima legge di carico utilizzata in precedenza.

Dai valori registrati (tabella 4.7) si può vedere come le massime variazioni

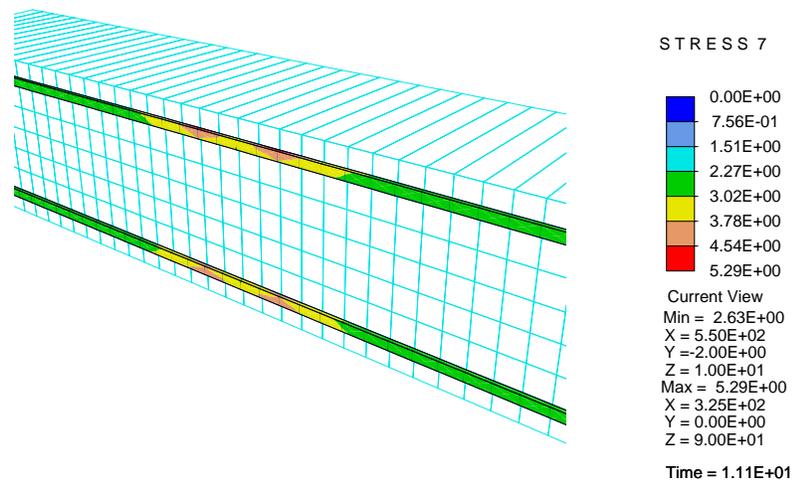


Figura 4.23: Particolare della massima variazione di resistività elettrica registrata nelle barre.

della differenza di potenziale interessino i tratti di barra prossimi alla zona di applicazione del carico, mentre altrove, nel materiale non c'è stato accumulo di danno.

Si nota che la variazione della differenza di potenziale per il tratto VIII risulta essere inferiore a quella del tratto VII. Questo valore anomalo è in realtà legato ai risultati dell'analisi numerica: infatti la legge di variazione della resistività elettrica è funzione dello stato di sforzo tridimensionale tramite l'invariante secondo del tensore deviatore.

Nella figura 4.25 sono mostrati gli andamenti della variazione della differenza di potenziale relativi ai tratti VI, VII, VIII in funzione dell'inflessione.

Plottando le massime variazioni percentuali della differenza di potenziale in riferimento agli otto tratti di trave (fig 4.26) è possibile ottenere l'andamento dello stato di danno lungo l'asse della barra.

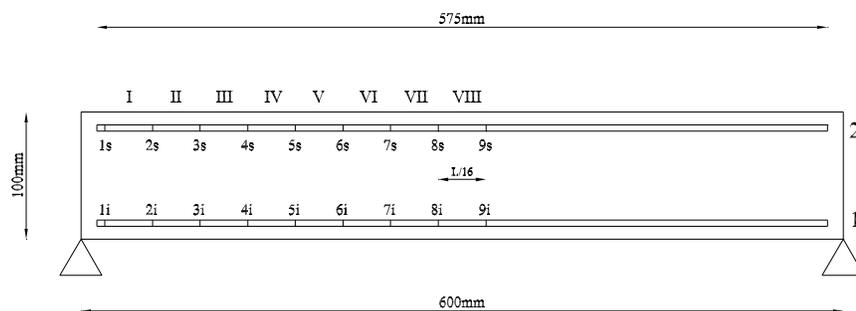


Figura 4.24: Suddivisione delle barre in otto tratti (I–VIII) rispetto ai quali misurare la variazione della differenza di potenziale.

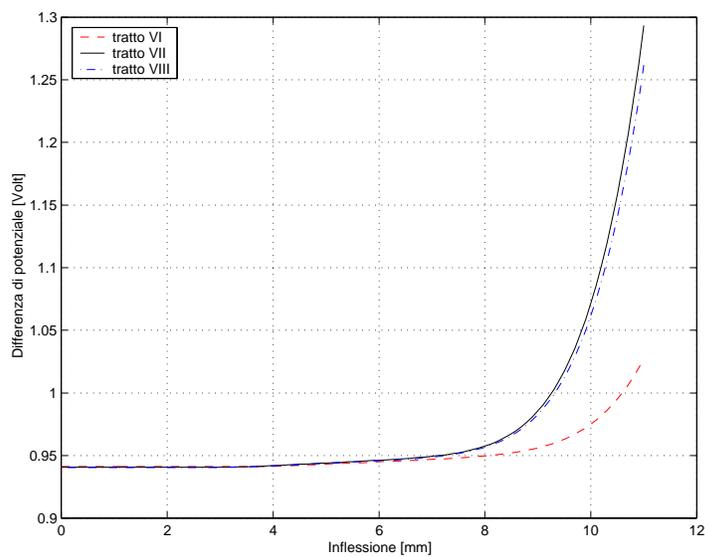


Figura 4.25: Andamento della variazione della differenza di potenziale per i tratti VI, VII, VIII in funzione dell'inflessione.

Tratto	Variazione percentuale della d.d.p. alla barra superiore	Variazione percentuale della d.d.p. alla barra inferiore
1	-0.033	-0.016
2	-0.026	-0.053
3	0.243	0.232
4	0.540	0.551
5	1.667	1.661
6	9.170	9.122
7	37.499	37.446
8	34.173	34.163

Tabella 4.7: Massime variazioni percentuali della differenza di potenziale misurata alle estremità delle barre.

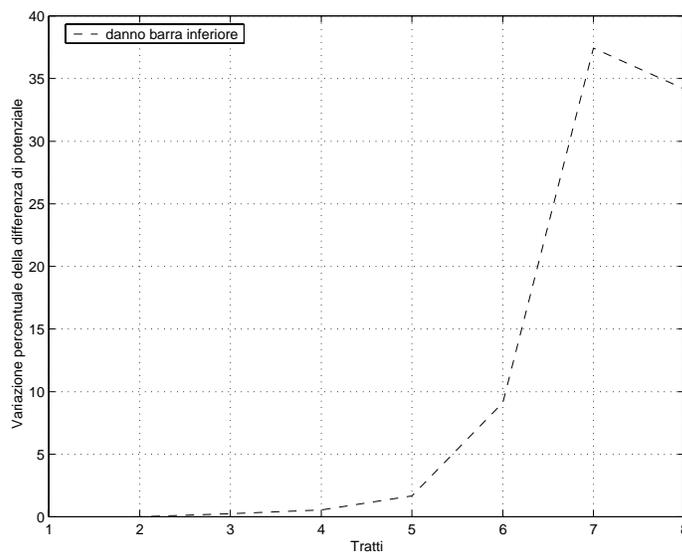


Figura 4.26: Visualizzazione dello stato di danno lungo l'asse della barra mediante la rappresentazione grafica della variazione percentuale della differenza di potenziale riferita ai tratti di barra.

### Determinazione del massimo stato tensionale

In funzione dei dati raccolti si calcola il massimo valore di sforzo raggiunto nel materiale nei tratti di barra analizzati; successivamente, dai risultati ottenuti, si risalirà al massimo valore dello sforzo flessionale a cui è stata soggetta la trave.

Con riferimento alla figura 4.19, si ipotizza che lungo le sezioni dei tratti di barra gli sforzi normali abbiano una distribuzione uniforme, e che l'andamento degli sforzi lungo la sezione della trave sia lineare.

In analogia al metodo adottato a pagina 68, a partire dai valori di variazione della differenza di potenziale è possibile ricavare le variazioni di resistività relative a ciascun tratto (equazione 4.19).

In base all'equazioni 4.20 e 4.18 è possibile ricavare i massimi valori di sforzo a cui è stato sottoposto il materiale. Nella tabella 4.8 sono messi a confronto i valori di tensione calcolati e i valori derivanti dall'analisi numerica per le due barre analizzate. I valori di sforzo ottenuti suddividendo in tratti le barre descrivono con maggior precisione lo stato di sforzo lungo la barra e, di conseguenza, anche lo stato di danno del materiale.

I valori relativi ai tratti VII e VIII permettono di dire, come per le barre 2 e 5, che il materiale ha raggiunto il limite.

Tratto	Tensione nella barra inf. (modello) MPa	Tensione nella barra inf. (a. n.) MPa	Tensione nella barra sup. (modello) MPa	Tensione nella barra sup. (a. n.) MPa
1	100.0	83.4	-100.0	-73.3
2	100.0	115.2	-100.0	-125.8
3	128.2	168.9	-129.5	-170.4
4	166.5	213.9	-165.2	-214.6
5	232.7	258.8	-232.8	-258.9
6	283.7	300.8	-283.8	-301.0
7	322.8	324.7	-322.8	-324.7
8	320.1	324.7	-320.1	-324.7

Tabella 4.8: Massime tensioni nei tratti di barra calcolate a partire dalle variazioni della differenza di potenziale e massime tensioni derivanti dall'analisi numerica.

Nella figura 4.27 è data rappresentazione grafica, con riferimento agli otto tratti di barra, dei valori calcolati. È da notare che i valori di sforzo relativi ai tratti I e II delle barre, calcolati in base alle variazioni della differenza di potenziale di tabella 4.8, non rappresentano l'effettivo stato tensionale, ma stanno a indicare che in quei tratti lo stato tensionale era al di sotto del valore di attivazione.

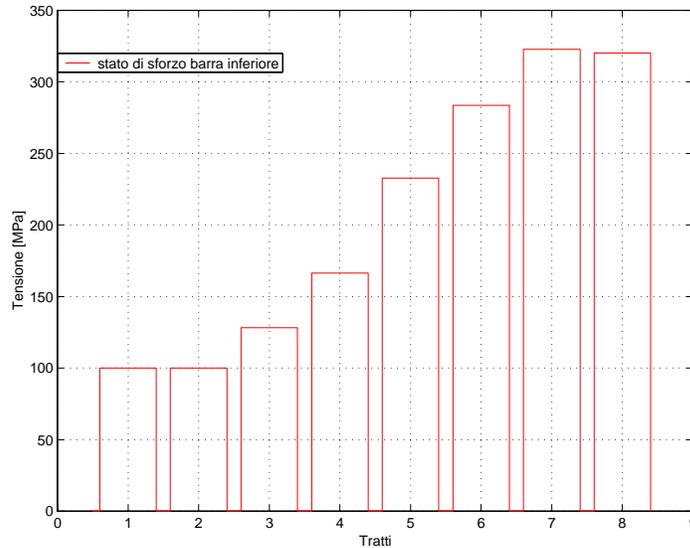


Figura 4.27: Valore dello stato di sforzo negli otto tratti di barra calcolato a partire dai valori di variazione del potenziale elettrico (i dati rappresentati sono relativi alla barra inferiore: tabella 4.8).

Partendo dalla similitudine dei triangoli ABC e ADE di figura 4.20, e ricordando il coefficiente di proporzionalità  $p$  è possibile calcolare il massimo valore di sforzo che si è avuto nella trave in corrispondenza della zona di applicazione del carico.

In base ai valori riportati nella tabella 4.8, il massimo valore della tensione normale calcolato è relativo al tratto VII. Svolgendo i conti si ottiene:

$$\sigma_{b2} = \frac{\sigma_{b1} \cdot h_s}{h_b} = 430.8 \text{MPa} \quad (4.25)$$

Il massimo valore dello sforzo flessionale agente sulla trave è pari a:  $\sigma_c = \sigma_{b2} \cdot p = 469.566 \text{MPa}$ .

L'analisi svolta al calcolatore fornisce un valore massimo dello sforzo di flessione pari a 525MPa;

Il valore di sforzo calcolato in base alle variazioni del segnale elettrico è inferiore del 10.6% rispetto a quello derivante dall'analisi numerica.

# Appendice A

## Fibre di carbonio

Le fibre di carbonio sono fibre, con un contenuto in carbonio superiore al 90%, ottenute dalla pirolisi controllata di appropriate fibre dette precursori.

I precursori sono sottoposti a un trattamento termico che rimuove elementi come l'ossigeno, l'azoto, l'idrogeno; questo trattamento fa sì che le proprietà delle fibre risultino migliorate in funzione dell'aumentato grado di cristallizzazione e di orientamento dei cristalli stessi, nonché per la diminuzione dei difetti del materiale. La via migliore per ottenere questo risultato è quella di partire con un precursore altamente orientato e quindi mantenere l'elevato orientamento durante i processi di stabilizzazione e carbonizzazione mantenendo il precursore in tensione.

Precursori organici altamente utilizzati sono il poliacrilonitrile (PAN) e la pece di petrolio o di catrame di carbon fossile.

I processi che permettono di ottenere fibre di carbonio variano in base al precursore utilizzato. Di seguito sono schematicamente descritti i procedimenti impiegati nella produzione di fibre di carbonio derivanti da poliacrilonitrile e da pece:

Fibre di carbonio da poliacrilonitrile: tre sono i passi successivi nella conversione del precursore PAN in fibre di carbonio ad alte prestazioni:

- Stabilizzazione ossidativa: il precursore è prima sottoposto a trazione e quindi ossidato a una temperatura di 200°C - 300°C. Questo trattamento converte il poliacrilonitrile termoplastico in un composto ciclico non plastico.
- Carbonizzazione: dopo l'ossidazione le fibre sono carbonizzate a circa 1000°C, senza tensione, in un'atmosfera inerte (azoto) per poche ore. Durante questo processo gli elementi diversi dal carbonio sono rimossi come sostanze volatili: si ottengono fibre di carbonio caratterizzate da una massa inferiore del 50% rispetto alla massa originale del precursore.

- Grafitizzazione: in funzione del tipo di fibra richiesto, le fibre sono trattate a temperature comprese tra  $1000^{\circ}\text{C}$  e  $2500^{\circ}\text{C}$ , ottenendo un miglioramento nell'ordinamento e nell'orientamento dei cristalli nella direzione dell'asse della fibra.

La fabbricazione delle fibre di carbonio a partire dalla pece generalmente consiste dei seguenti passi:

- Preparazione della pece: consiste in un adattamento del peso molecolare, della viscosità e dell'orientamento mediante filatura e riscaldamenti successivi.
- Filatura e messa in trazione: in questo stadio la pece è convertita in filamenti, raggiungendo un determinato allineamento dei cristalli al fine di ottenere caratteristiche di direzionalità.
- Stabilizzazione: si utilizzano sostanze termoindurenti per mantenere la forma del filamento durante la pirolisi. La temperatura di stabilizzazione varia tra i  $250^{\circ}\text{C}$  e i  $400^{\circ}\text{C}$ .
- Carbonizzazione: per aumentare il contenuto in carbonio le fibre vengono trattate a una temperatura di  $1000^{\circ}\text{C}$  -  $1500^{\circ}\text{C}$

# Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro di tesi si è studiata una tecnica di controllo di elementi strutturali basata sull'utilizzo di un materiale composto contenente fibre di carbonio capace di accoppiare a capacità portanti la possibilità di determinare il proprio stato di danno sulla base della variazione e della memorizzazione di una grandezza elettrica facilmente misurabile.

Una discussione sull'attuale stato dell'arte ha permesso di individuare nei materiali composti "carbon fiber glass fiber reinforced plastic" le caratteristiche necessarie per una efficace capacità di individuazione dello stato di danno in funzione della variazione di resistenza elettrica che questi composti manifestano come risposta allo stato tensionale al quale sono sottoposti.

Sulla base della letteratura esistente non è stato possibile individuare una relazione che accoppiasse campo meccanico e campo elettrico. Il campo elettrico è stato quindi studiato grazie al parallelismo che intercorre tra il problema della conduzione termica in regime stazionario e il problema del passaggio di corrente elettrica continua in un conduttore. Questa trattazione ha permesso di implementare un algoritmo di soluzione del problema elettrico.

Successivamente, in funzione dei dati sperimentali reperiti in letteratura, è stata proposta un'equazione di legame tra il campo meccanico e il campo elettrico in grado di descrivere la variazione di resistività elettrica in funzione dello stato di sforzo presente nel materiale.

Dopo aver implementato il modello in un elemento finito tridimensionale si sono considerati, a partire dalle prove sperimentali, differenti provini con lo scopo di valutare la possibilità di determinare lo stato di danno del materiale sulla base di una serie di misure elettriche.

I risultati ottenuti mostrano una effettiva capacità del materiale di indicare l'accumulo di danno nella struttura e una sufficiente precisione nella determinazione dello stato di sforzo.

Il modello dimostra una maggior precisione quanto più la configurazione della simulazione numerica si avvicina alla configurazione reale dei materiali composti.

Lo sviluppo di questo campo è strettamente legato allo sviluppo e all'indagine sui materiali composti contenenti fibre di carbonio o altre fibre conduttrici.

La linea principale al momento attuale deve riguardare l'acquisizione di un sufficiente numero di dati sperimentali in grado di dare informazioni sul comportamento intelligente in una, due e tre dimensioni che permettano di individuare le caratteristiche principali del comportamento delle fibre nelle possibili configurazioni di utilizzo.

Avendo a disposizione una adeguata caratterizzazione del comportamento reale, il successivo obiettivo sarà l'implementazione di legami costitutivi sempre più accurati.

Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. Ferdinando Auricchio per la sua disponibilità e per l'infinita pazienza dimostrata nei miei confronti. Grazie alla sua competenza e ai suoi suggerimenti sono riuscito ad affrontare al meglio questa importante esperienza di studio.

Un grazie particolare alla mia famiglia, che mi ha sopportato e sostenuto, soprattutto sopportato, in questi anni: grazie ai miei genitori e alla mia sorellina.

Non posso certo dimenticare tutti i miei colleghi e i compagni di corso nonché amici con i quali ho collaborato: un saluto affettuoso ad Alberto, Arturo, Carlo, Davide, Luca, Marco, Matteo, Pierfrancesco, Roberto, Laura, Emanuela e a tutti quelli che con me hanno condiviso questi anni.

Infine un poco di spazio anche per dei cari amici, Mole, l'Alce, Pilomba, il Coyote, Manuel, il Nero, Matteo, l'Eccelso, Andrea: non cambiate.

# Bibliografia

- [1] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1995.
- [2] Minoru Sugita Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Intelligent foreseeing of fracture in cfgfrp composites by the measurement of electrical resistance.
- [3] Minoru Sugita Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Materials design for self-diagnosis of fracture in cfgfrp composite reinforcement. *Smart materials and structures*, 4:A52–A57, 1995.
- [4] Teruyuki Nakatsuji Minoru Sugita Yasushi Ohtsuka Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Preventing fatal fractures in carbon-fiber–glass fiber-reinforced plastic composites by monitoring change in electrical resistance. *Journal of the American Ceramic Society*, 76:875–879, 1993.
- [5] Teruyuki Nakatsuji Minoru Sugita Yasushi Ohtsuka Masaru Miyayama Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Foreseeing of fracture in cfgfrp composites by the measurement of residual change in electrical resistance. *Journal of the ceramic Society of Japan*, 100:585–588, 1992.
- [6] Teruyuki Nakatsuji Minoru Sugita Yasushi Ohtsuka Yasuhiro Arai Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Design of intelligent materials with self-diagnosing function for preventing fatal fracture. *Smart materials and structures*, 1:324–329, 1992.
- [7] Teruyuki Nakatsuji Minoru Sugita Yasushi Ohtsuka Yasuhiro Arai Chikako Saito Norio Muto, Hiroaki Yanagida. Intelligent cfgfrp composites with self-diagnostic function for preventing fatal fracture. *Sensors and Materials*, 6:045–062, 1994.
- [8] G. Guglielmini C. Pisoni. *Elementi di trasmissione del calore*. Masson editoriale Veschi, 1996.
- [9] D. D. L. Chung Pu-Woei Chen. Carbon fiber reinforced concrete for smart structures capable of non-destructive flaw detection. *Smart Materilas and Structures*, 2:22–30, 1993.

- [10] D. D. L. Chung Pu-Woei Chen. Carbon fiber reinforced concrete as an intrinsically smart concrete for damage assessment during static and dynamic loading. *ACI Materials Journal*, 93:341–350, 1996.
- [11] D. D. L. Chung Pu-Woei Chen. Concrete as a new strain/stress sensor. *Composites: Part B*, 27:11–23, 1996.
- [12] C. Mencuccini V. Silvestrini. *Fisica II*. Liguori editore, 1995.