UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA FACOLTÀ DI INGEGNERIA DIPARTIMENTO DI MECCANICA STRUTTURALE

COMPOSITI ATTIVI CON MATERIALI A MEMORIA DI FORMA

Relatore: Chiar.mo Prof. Ferdinando Auricchio Correlatore: Dott. Ing. Lorenza Petrini

> Tesi di Laurea di Maria Rota

Anno Accademico 2000/2001

Indice

In	ntroduzione i			iii		
1	Leg	he a m	emoria di forma	1		
	1.1	Proprie	età delle leghe a memoria di forma	2		
		1.1.1	Trasformazioni martensitiche: prospettiva microscopica	2		
		1.1.2	Trasformazioni indotte dal calore: l'effetto a memoria di forma	4		
		1.1.3	Trasformazioni indotte dallo sforzo: la superelasticità	5		
		1.1.4	Trasformazioni indotte da un campo magnetico o elettrico	7		
		1.1.5	Funzioni intrinseche e proprietà adattive	8		
	1.2	Leghe	a memoria di forma maggiormente utilizzate	9		
	1.3 Applicazioni					
		1.3.1	Applicazioni dell'effetto a memoria di forma	11		
		1.3.2	Applicazioni della superelasticità	13		
2	Compositi con SMA					
	2.1	Compo	ositi rinforzati con fibre di SMA	19		
		2.1.1	Fibre di SMA/matrice metallica	20		
		2.1.2	Fibre di SMA/matrice polimerica	22		
		2.1.3	Fibre e particelle di SMA/matrice di intonaco	23		
	2.2	Compo	ositi rinforzati con particelle di SMA	24		
	2.3	Compo	ositi con matrici di SMA rinforzate da particelle	25		
	2.4	Legami costitutivi				
		2.4.1	Legami costitutivi per SMA	26		
		2.4.2	Legami costitutivi per i compositi	29		
	2.5	Applic	azioni	30		
		2.5.1	Controllo della stabilita' di una struttura	30		
		2.5.2	Modifica delle caratteristiche dinamiche di una struttura	32		
		2.5.3	Precompressione di strutture in c.a	36		
		2.5.4	Utilizzo come attuatori	37		
		2.5.5	Resistenza all'impatto	39		
		2.5.6	Applicazioni biomediche	40		
3	Equ	azioni	di campo del problema termo-elettro-meccanico	42		
	3.1	Campo	$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}}$	42		
	3.2	Campo	$rac{1}{2}$ termico $rac{1}{2}$	48		

		3.2.1	Cenni di termodinamica	48
		3.2.2	Meccanismi di trasmissione del calore	49
	3.3	Campo	o elettrico	56
		3.3.1	Parallelo tra campo termico e campo elettrico	59
	3.4	Accop	piamenti tra i campi	60
		3.4.1	Accoppiamento termo-meccanico	60
		3.4.2	Accoppiamento termo-elettrico	61
		3.4.3	Accoppiamento termo-elettro-meccanico	61
	3.5	Formu	lazione debole del problema	62
	3.6	Soluzio	one col metodo degli elementi finiti	63
4	Ese	mpi nu	merici	67
	4.1	Accop	piamento termo-meccanico	72
	4.2	Accop	piamento termo-elettrico	76
	4.3	SMA:	effetto a memoria di forma	79
	4.4	SMA:	effetto a memoria di forma sotto carico	81
	4.5	Compo	osito: effetto a memoria di forma	83
Co	onclu	ısioni e	e sviluppi futuri	35

Introduzione

Negli ultimi anni, i materiali attivi hanno attirato un'attenzione sempre crescente a causa della loro rilevanza scientifica e tecnologica. Si tratta di materiali in grado di rilevare uno stimolo esterno e rispondervi in maniera e in tempi predeterminati, per poi tornare al loro stato originario, una volta che tale stimolo sia stato rimosso. Tra questi materiali compaiono quelli a memoria di forma. Questa tesi si concentrerà su una determinata classe di compositi attivi, ovvero sui compositi costituiti da una matrice generica, rinforzata con elementi in materiali a memoria di forma. Essi sono particolarmente interessanti dal punto di vista applicativo, grazie alle particolari proprietà delle leghe a memoria di forma, che possono essere sfruttate in ambiti molto diversi: dal controllo sismico di grandi strutture, al controllo del rumore e delle vibrazioni nei trasporti; dalla medicina, all'aeronautica civile e militare, alle applicazioni in campo aerospaziale, e molti altri ancora.

In questo lavoro si intende sviluppare un modello per la descrizione di tali compositi; si tratta di un problema alquanto complesso, che deve tener conto, oltre che del legame costitutivo nonlineare delle leghe a memoria di forma, dell'interazione di diversi campi: per attivare i compositi, infatti, si induce il passaggio di una corrente elettrica, che a sua volta produce per effetto Joule il calore necessario ad innescare una trasformazione di fase nelle leghe a memoria di forma. Il problema ha quindi incognite meccaniche (spostamenti), termiche (temperatura) ed elettriche (potenziale); inoltre, è necessario effettuare un'analisi non stazionaria, dal momento che le grandezze in gioco sono funzioni del tempo. Per risolvere questo tipo di problema si è scelto di utilizzare il metodo degli elementi finiti (con l'aiuto del codice FEAP); è quindi necessario implementare un elemento finito tridimensionale in grado di risolvere problemi termo-elettro-meccanici accoppiati e di modellare in modo efficace i comportamenti tipici delle leghe a memoria di forma.

La tesi è organizzata in 4 capitoli.

Il primo capitolo è dedicato alla descrizione delle leghe a memoria di forma, partendo dalle loro proprietà caratteristiche, per poi passare ai tipi di lega più utilizzati e alle loro applicazioni. Si farà quindi una panoramica dello stato dell'arte sui compositi con leghe a memoria di forma, analizzando i tipi di composito studiati (che variano sia per le matrici utilizzate, sia per i tipi di rinforzo), i modelli utilizzati per descriverli e le loro applicazioni (Capitolo 2).

Il capitolo 3 sarà quindi dedicato all'esposizione del problema affrontato, da un punto di vista teorico: le equazioni che governano i tre campi considerati e i loro accoppiamenti, oltre ad una revisione degli aspetti fondamentali del metodo degli elementi finiti, usato per risolvere il problema.

Introduzione

Nel capitolo 4 saranno presentati alcuni degli esempi svolti per testare l'elemento sviluppato, con i relativi risultati. Si parte da casi molto semplici, che testano un solo accoppiamento per volta, per arrivare al caso conclusivo, relativo a un composito con elementi di SMA.

Capitolo 1 Leghe a memoria di forma

Le leghe a memoria di forma (SMA, Shape Memory Alloys) sono molto utilizzate nella realizzazione di sistemi intelligenti, grazie alle loro particolari proprietà. Esse, infatti, sono in grado di rilevare stimoli termici, meccanici, magnetici o elettrici e di reagire ad essi tramite risposte predeterminate. In questo modo, parametri del sistema, quali forma, posizione, deformazione, rigidezza, frequenza propria, smorzamento e altre caratteristiche statiche e dinamiche possono essere adattati a cambiamenti ambientali.

Il termine "*memoria di forma*" si riferisce alla capacità di tali leghe di "ricordare" la forma originaria, anche dopo aver subito deformazioni significative; questo può avvenire in due modi:

- se deformate meccanicamente al di sotto di una certa temperatura, le SMA sono in grado di recuperare tutta o parte della deformazione inelastica (a seconda della deformazione massima raggiunta) se opportunamente riscaldate. Questo è il cosiddetto **effetto a memoria di forma** (SME, Shape Memory Effect)
- se deformate meccanicamente al di sopra di una certa temperatura, rimuovendo la causa della deformazione, le SMA ritornano alla configurazione precedente la deformazione. Questa è la cosiddetta **superelasticità** (SE, Super Elasticity).

La base di questo comportamento risiede nel fatto che tali leghe presentano due fasi solide distinte, quella martensitica, stabile a basse temperature, e quella austenitica, stabile a temperature maggiori. Il comportamento a memoria di forma è una conseguenza della facilità con cui le SMA si trasformano da una fase all'altra.

Sia gli aspetti fondamentali, sia quelli ingegneristici delle leghe a memoria di forma sono stati studiati a fondo e oggi alcune di esse sono materiali commerciali. In particolare, alcune leghe a memoria di forma possono essere facilmente fabbricate in pellicole sottilissime, fibre o fili metallici, particelle o anche strati porosi, rendendole adatte a essere incorporate in altri materiali per formare compositi ibridi.

1.1 Proprietà delle leghe a memoria di forma

1.1.1 Trasformazioni martensitiche: prospettiva microscopica

Esistono due tipi di trasformazioni di fase solido-solido:

- le trasformazioni diffusive, le quali comportano un cambiamento della composizione chimica, a causa della rottura del reticolo cristallino, nel passaggio da uno stato all'altro. Dal momento che questo avviene mediante una migrazione atomica, il procedere di questo tipo di trasformazione dipende sia dal tempo, sia dalla temperatura.
- le trasformazioni dislocative, le quali implicano invece piccoli movimenti degli atomi attorno alla posizione originaria, permettendo loro di disporsi secondo un reticolo cristallino più stabile, senza però cambiare la natura chimica del materiale. In questo caso, non essendo necessaria una migrazione atomica, il processo dipende soltanto dalla temperatura e non dal tempo.

Le trasformazioni martensitiche delle SMA sono generalmente del secondo tipo. Sono trasformazioni dette del primo ordine, in quanto durante la trasformazione diretta (da austenite a martensite) viene liberato calore, mentre, durante la trasformazione inversa (da martensite ad austenite), viene assorbito calore.

Dal punto di vista cristallografico, la trasformazione da austenite a martensite si può suddividere in due fasi: "bain strain" e "lattice-invariant shear". Per spiegare queste due fasi un approccio qualitativo e bidimensionale può essere adeguato.

Il "bain strain", o deformazione del reticolo, consiste in tutti i movimenti atomici necessari per ottenere la nuova struttura dalla precedente; nella figura 1.1, la struttura austenitica è schematicamente illustrata nel diagramma a), e la progressione fino a una struttura completamente martensitica è illustrata nei diagrammi da b) a d). La seconda parte della trasformazione, il "lattice-invariant shear", è una fase di accomodamento: la struttura martensitica prodotta nella prima fase ha una forma, e spesso anche un volume, diversi da quelli dell'austenite che la circonda. È evidente quindi come sia necessario modificare la forma della nuova struttura, affinchè non si abbiano discontinuità con l'austenite. Durante la fase di accomodamento, viene quindi prodotta una struttura in cui le celle sono organizzate secondo piani, detti di geminazione, che hanno un'orientazione variabile, in modo da minimizzare le incongruenze con il materiale circostante (1.2 e)).

Perchè l'effetto a memoria di forma si possa manifestare, è necessario che il meccanismo secondo cui avviene la trasformazione sia assolutamente reversibile. Il meccanismo di accomodamento presenta un'altra proprietà interessante: come mostrato nella figura 1.2, nel caso in cui si applichi una sollecitazione tagliante alla struttura cristallina, i piani di geminazione possono scorrere facilmente uno rispetto all'altro; in questo modo si può passare da una variante all'altra, fino a scegliere quella orientata nel modo più favorevole rispetto allo sforzo applicato. La martensite si trasforma così da *multivariante* (figura 1.2 c).



Figura 1.1: Trasformazione da austenite a martensite da un punto di vista microscopico. a) struttura completamente austenitica, d) completamente martensitica. e) struttura ottenuta dopo l'accomodamento



Figura 1.2: Movimento dei piani di geminazione della martensite, in seguito all'applicazione di uno sforzo



Figura 1.3: Isteresi termica della trasformazione martensitica

1.1.2 Trasformazioni indotte dal calore: l'effetto a memoria di forma

Le trasformazioni indotte dal calore, a tensione nulla, sono caratterizzate da quattro temperature significative: M_s, M_f, A_s, A_f , che si riferiscono rispettivamente alle temperature a cui la trasformazione diretta da austenite a martensite inizia e finisce e le temperature a cui la trasformazione inversa da martensite ad austenite inizia e finisce. Tali temperature sono funzione della composizione della lega, dei processi di lavorazione e delle condizioni di trattamento termo-meccanico.

Nella figura 1.3 è mostrato l'andamento della percentuale volumetrica di martensite, al variare della temperatura e sono evidenziate le quattro temperature di riferimento.

È importante osservare come si abbia un'isteresi associata alle trasformazioni martensitiche, cioè le temperature di trasformazione sono diverse nel processo di riscaldamento o raffreddamento, come è evidente dalla figura 1.3. L'entità dell'isteresi dipende dalla lega e può variare da pochi Kelvin, fino a più di 100 K.

L'isteresi è un fattore molto importante da tenere in considerazione per il progetto dei materiali e le loro applicazioni ingegneristiche: per esempio, SMA con isteresi strette, come Ti-Ni-Cu a Mn-Cu, sono ottimali per realizzare attuatori rapidi e precisi, mentre leghe con elevata entalpia di trasformazione e con ampie isteresi, come Ti-Ni-Nb e certe leghe a base di ferro, sono adatte per dispositivi di accoppiamento e fissaggio.

La martensite è generalmente una fase a simmetria inferiore rispetto all'austenite. La conseguenza di questo è che ci sono diversi modi in cui si può formare la martensite dall'austenite, ma c'è solo una possibilità di ritorno alla struttura austenitica.

Tornando all'esempio bidimensionale visto sopra (figura 1.2), si vede come due diverse direzioni di sforzo possano essere applicate alle celle di forma rettangolare per produrre due diverse varietà di celle di forma romboidale, ma non c'è nessun'altra variante possibile di austenite, e quindi entrambi i tipi di cella romboidale devono ritornare alla stessa geometria rettangolare mostrata nella figura 1.1 a). Questo semplice concetto geometrico è la base dell'effetto a memoria di forma.

L'effetto a memoria di forma può essere descritto con riferimento alla figura 1.4.



Figura 1.4: Paragone tra gli effetti a memoria di forma a una e a due vie (Wayman and Duerig 1990)

Se un campione, che si trova a una temperatura inferiore a M_f , viene deformato tramite allungamento, la deformazione residua, una volta rimosso l'effetto deformante, viene recuperata se lo si riscalda fino a una temperatura superiore ad A_f . Se anche, a questo punto, il campione viene nuovamente raffreddato fino a una temperatura inferiore a M_f , esso mantiene comunque inalterata la forma recuperata e l'effetto a memoria di forma può essere riattivato solo rideformando il campione: per questo, tale effetto viene chiamato **a una via**.

Esiste anche la possibilità di realizzare un effetto a due vie, descritto schematicamente nella figura 1.4.

A differenza dell'effetto a memoria di forma a una via, nel caso di **effetto a due vie**, il campione, una volta deformato tramite allungamento, si contrae, recuperando parzialmente la forma originaria, se riscaldato fino a una temperatura superiore ad A_f ; se viene poi raffreddato fino a una temperatura inferiore a M_f , ritorna di nuovo alla forma allungata. Il passaggio tra queste due forme può essere ripetuto indefinitamente.

Per indurre l'effetto a due vie, è necessario un trattamento termomeccanico particolare, che crea specifiche dislocazioni nella struttura cristallina. Ci sono diversi trattamenti di questo tipo, detti trattamenti di addestramento: tutti introducono dei microsforzi nel materiale, alterando in qualche modo la nucleazione e la crescita della martensite, in modo tale che si formino alcune varianti in maniera preferenziale.

1.1.3 Trasformazioni indotte dallo sforzo: la superelasticità

Finora si è visto come l'effetto a memoria di forma si possa attivare tramite variazioni di temperatura. Bisogna ora considerare un altro tipo di effetto a memoria di forma, indipendente dalla temperatura: la superelasticità.

Normalmente, in assenza di sforzi, la martensite si forma, a partire dalla austenite, raffreddando il materiale fino alla temperatura M_s . Tuttavia, nello stesso materiale, la martensite si può formare a una temperatura superiore a M_s purchè sia applicato uno sforzo e la martensite così formatasi viene detta martensite indotta dallo sforzo. In que-



Figura 1.5: Superelasticità

sto caso, la trasformazione è dovuta ad un'azione meccanica e non più termica.

Al di sopra di M_s , lo sforzo necessario per produrre martensite aumenta linearmente con la temperatura. Tale variazione obbedisce alla legge di Clausius-Clapeyron, generalmente scritta come:

$$\frac{d\sigma}{dM_s} = -\frac{\Delta H}{T\epsilon_0} \tag{1.1}$$

dove σ è lo sforzo applicato, M_s è la temperatura a cui si forma la martensite, ΔH è il calore latente di trasformazione, T è la temperatura, e ϵ_0 è la massima deformazione uniassiale associata alla trasformazione.

Lo sforzo necessario per produrre martensite aumenta finchè non si raggiunge M_d , massima temperatura a cui si può avere martensite; infatti, al di sopra di tale temperatura, lo sforzo critico per indurre la martensite è maggiore di quello necessario a creare dislocazioni.

Il comportamento superelastico si manifesta quando un materiale è deformato a temperatura compresa tra A_s e M_d . In questo campo di temperature, la martensite generata applicando uno sforzo è instabile e quindi si trasforma di nuovo in austenite appena tale sforzo venga rimosso.

Il comportamento superelastico è mostrato nella figura 1.5, dove il plateau superiore corrisponde alla formazione di martensite sotto sforzo, mentre il plateau inferiore rappresenta la reversione della stessa alla rimozione dello sforzo.

Va osservato che, se la deformazione non supera un valore limite (che si aggira in generale intorno al 10%), essa viene completamente recuperata in fase di scarico, come mostrato in figura 1.5; questo comportamento può essere visto come un effetto a memoria di forma meccanico.

Qualora invece la deformazione superi tale limite, al momento dello scarico, si hanno delle deformazioni residue, dovute alla nascita di movimenti atomici di dislocazione, che sono irreversibili.

Nel caso di martensitite indotta dallo sforzo, si ha una sola variante di martensite; pertanto si ha un cambiamento di forma (allungamento) che viene completamente recuperato dopo che si sia rimosso lo sforzo. Questo comportamento è diverso dal caso della martensite indotta dal calore dove, a causa del meccanismo di autoassestamento, non si ha



Figura 1.6: Illustrazione schematica dei processi di deformazione nei materiali ferroelastici, ferromagnetici e ferroelettrici. (a) Trasformazione martensitica indotta dallo sforzo (geminazione e riorientamento per degeminazione). (b) Trasformazione indotta da un campo magnetico e riorientazione per degeminazione. (c) Trasformazione indotta da un campo elettrico e polarizzazione

un cambiamento di forma globale che accompagni la formazione delle numerose varianti possibili.

1.1.4 Trasformazioni indotte da un campo magnetico o elettrico

In alcune SMA, l'applicazione di un campo magnetico genera una trasformazione martensitica, mentre la rimozione del campo stesso produce la trasformazione inversa. Tale comportamento è tipico, per esempio, delle leghe a base di ferro.

In generale, è stato osservato che un'ampia differenza di momento magnetico tra la fase martensitica e quella austenitica facilita la trasformazione indotta dal campo. In questo modo si spiega come le leghe Ni-Ti e Cu-Al-Ni, che hanno una differenza piccola di momento magnetico, non siano influenzate dal campo magnetico (Kakeshita et al. 1993).

Questo tipo di trasformazioni può essere sfruttato per realizzare dispositivi magnetosensibili o termosensibili. Se la fase martensitica è ferromagnetica, c'è anche la possibilità di riorientare le varianti martensitiche, tramite l'applicazione di un campo magnetico.

Le SMA antiferroelettriche sono caratterizzate da un'orientamento casuale del campo elettrico nelle singole celle del reticolo, a differenza delle SMA ferroelettriche, in cui tutte le celle si orientano spontaneamente in una direzione comune, coincidente con quella del campo elettrico applicato.

In entrambi questi tipi di SMA, l'applicazione di un campo elettrico genera deformazioni meccaniche. Tali deformazioni sono dipendenti dalla composizione e dall'intensità del campo elettrico, ma mostrano anche una forte dipendenza dalla temperatura, che può essere descritta dall'equazione di Clausius-Clapeyron modificata (Yang and Payne 1992):

$$\frac{dE}{dT} = -\frac{\Delta H}{T\Delta P} \tag{1.2}$$

dove E è l'intensità del campo, T la temperatura, ΔH e ΔP sono l'entalpia e la variazione di polarizzazione nella transizione di fase antiferroelettrica-ferroelettrica rispettivamente. Inoltre, altri fattori come pressione e sforzo esterni applicati e frequenza del campo elettrico influiscono sulla trasformazione e sulle deformazioni indotte.

Nella figura 1.6 è illustrato il procedimento di deformazione indotta da un campo magnetico ed è confrontato con quelli indotti dallo sforzo e da un campo elettrico.

1.1.5 Funzioni intrinseche e proprietà adattive

Le trasformazioni di fase nei materiali a memoria di forma sono accompagnate da notevoli cambiamenti delle loro proprietà fisiche e meccaniche (tensione di snervamento, modulo elastico, durezza, smorzamento, conduttività termica, coefficiente di espansione termica, resistività, suscettibilità magnetica, flessibilità, permeabilità al vapore, costante dielettrica...) rendendo i materiali in grado di esibire nuove funzionalità o rendendoli capaci di adattarsi a cambiamenti esterni di temperatura, sforzo, campo elettrico o magnetico.

Nella tabella 1.1 a pagina a pagina 17, sono riportate alcune proprietà tipiche delle leghe binarie di Nichel e Titanio, nella fasi martensitica e austenitica. Poichè le proprietà sono sensibili in modo significativo alla composizione della lega, ai trattamenti subiti dalla lega stessa, ai metodi e alle condizioni di rilevamento delle proprietà stesse, i dati riportati sono soltanto indicativi e si basano sui risultati sperimentali presentati da Jackson et al. (1972).

In generale, le capacità delle SMA citate qui di seguito possono essere utilizzate per la realizzazione di sistemi intelligenti:

- 1. osservazione le SMA sono sensibili ad alcuni cambiamenti ambientali come stimoli termici, meccanici, elettrici o magnetici
- 2. capacità di scelta o controllo le SMA reagiscono agli stimoli ambientali solo quando vengono superate delle soglie, che possono essere stabilite ad hoc
- 3. attuazione se comparate con altri materiali usati comunemente come attuatori (vedi tabella 1.2 a pagina 18), le SMA sono in grado di fornire forze maggiori e di recuperare deformazioni più elevate, a discapito di una efficienza minore.
- 4. adattività le proprietà meccaniche variano in maniera sensibile tra una fase e l'altra (vedi tabella 1.1 a pagina 17)
- 5. memoria e recupero la forma o altri cambiamenti sono reversibili e possono essere ripetuti
- 6. immagazzinamento e conversione di energia una quantità considerevole di energia può essere immagazzinata; alcune conversioni di energia (termica-meccanica,

chimica-meccanica, magnetica-meccanica, elettrica-meccanica...) possono essere realizzate

7. smorzamento - la maggior parte delle SMA ha una capacità di smorzamento intrinseca dovuta alla caratteristica microstruttura e alla transizione di fase.

Incorporando le SMA in altri materiali, è possibile, sfruttando le capacità adattive sopra citate, modificare le proprietà statiche e dinamiche di compositi e strutture.

1.2 Leghe a memoria di forma maggiormente utilizzate

Leghe di nichel e titanio

Nonostante la scoperta dell'effetto a memoria di forma risalga agli anni '50, l'interesse ingegneristico per le SMA non è stato riconosciuto fino alla scoperta di tale effetto nella lega di nichel e titanio denominata poi Nitinol (Nickel Titanium Naval Ordnance Laboratory), dal nome del laboratorio dove fu scoperta e studiata (Buelher et al. 1963).

Negli ultimi tre decenni, le leghe binarie di Ni-Ti sono state studiate a fondo e oggi sono le leghe a memoria di forma più importanti dal punto di vista commerciale, grazie alle ottime prestazioni in termini di recupero della forma e alle buone proprietà meccaniche. Inoltre, queste leghe hanno un'ottima resistenza alla corrosione e un'eccezionale biocompatibilità, che le rendono ampiamente utilizzabili in varie applicazioni biomediche. Infine, essendo facilmente fabbricabili in elementi di varie forme e dimensioni, sono tecnicamente utilizzabili per la realizzazione di elementi attivi in materiali compositi.

Il costo di produzione del Nitinol è però piuttosto alto per vari fattori: la risposta della lega a trattamenti termici è fortemente dipendente dalla composizione relativa in nichel e titanio e questo richiede una precisione nella composizione molto elevata. Inoltre, a causa della reattività del titanio ad alte temperature, la produzione e la lavorazione a caldo del lingotto richiedono estrema attenzione.

Proprio per l'alto costo e per le difficoltà di produzione del Nitinol, oltre che per soddisfare alcune esigenze specifiche, nei primi anni settanta sono state condotte ricerche su materiali a memoria di forma alternativi, partendo da leghe ternarie basate su quella di Ni-Ti.

Leghe a isteresi stretta

La parziale sostituzione di rame al posto di nichel ha effetti interessanti sulle proprietà della lega, dando luogo a evidenti vantaggi. Le leghe ternarie Ti-Ni-Cu presentano una minore sensibilità della temperatura a cui comincia la fase martensitica alla composizione chimica della lega; una riduzione notevole dell'isteresi legata alla trasformazione, che può essere ridotta dai normali 30 K a meno di 10 K; un aumento della capacità di smorzamento e, infine una differenza significativa di rigidezza tra la fase martensitica e quella austenitica. Queste caratteristiche le rendono particolarmente consigliabili per la realizzazione di attuatori per sistemi intelligenti (Otsuka 1994).

Leghe a isteresi ampia

L'aggiunta di niobio alle leghe binarie Ni-Ti consente di abbassare la temperatura di inizio della fase martensitica e di creare una differenza di anche 150 K tra A_s e M_s .

Le leghe di questo tipo sono particolarmente adatte per la realizzazione di dispositivi di accoppiamento e fissaggio (Zhang et al. 1990). La lega più utilizzata in commercio è $Ti_{43}Ni_{47}Nb_9$, dove i numeri si riferiscono ai valori percentuali.

SMA ad alta temperatura

Quando il nichel della lega Ni-Ti è parzialmente sostituito da palladio, platino od oro fino a una percentuale del 50% e il titanio è sostituito da afnio e zirconio fino al 20%, le temperature di trasformazione martensitica possono essere aumentate fino a 873 K, persistendo l'effetto a memoria di forma (Lindquist and Wayman 1990).

Queste leghe, nonostante il loro costo molto elevato, sono promettenti per applicazioni ad alte temperature. La lega più studiata, anche perchè la più interessante dal punto di vista economico, è Ni-Ti-Hf.

Leghe a base di rame

Le leghe a base di rame presentano alcuni vantaggi, come il basso costo e la relativa facilità di fabbricazione, se comparate con le leghe a Ni-Ti. Tra le varie leghe proposte, Cu-Zn-Al e Cu-Al-Ni sono quelle di maggior interesse pratico, tanto da essere disponibili in commercio. Tuttavia, le applicazioni di tali leghe sono state pesantemente limitate principalmente da due fattori: (1) le scarse duttilità e lavorabilità di queste leghe policristalline a causa della struttura a grana grossa e della notevole anisotropia elastica e (2) i problemi di instabilità legati alla presenza, in condizioni di equilibrio, di entrambe le fasi martensitica e austenitica (Dunne and Kennon 1981).

Leghe a base di ferro

Dal momento che il costo è uno dei fattori chiave nelle applicazioni, il basso costo delle leghe a base di ferro ha da sempre attratto molta attenzione e alcune di queste leghe sono oggi vicine all'introduzione sul mercato (Maki 1990). Di particolare interesse sono Fe-Mn-Si, Fe-Ni-Mn e Fe-Ni-C. Dopo complessi trattamenti termomeccanici, queste leghe presentano l' effetto a memoria di forma, con recupero totale della deformazione, ma soltanto a una via e dell'ordine di pochi punti percentuali. Più recentemente sono state studiate leghe Fe-Pt e Fe-Pd: in esse la trasformazione martensitica può essere innescata da un campo magnetico, rendendole così adatte alla realizzazione di materiali a memoria di forma ferromagnetici.

Alcune delle caratteristiche fondamentali delle diverse leghe considerate sono riportate nella tabella 1.3.

1.3 Applicazioni

Esistono molte applicazioni delle SMA, che spaziano in campi diversissimi: dalle applicazioni biomediche (fili ortodontici, impianti dentali, stent, protesi ortopediche), alle applicazioni aerospaziali (ali intelligenti per aeroplani, dispositivi di accoppiamento e fissaggio); dall'utilizzo delle SMA come attuatori (per esempio in campo automobilistico), allo sfruttamento della loro buona capacità di smorzamento (per esempio nella protezione di strutture civili da terremoti).

In particolare, le applicazioni biomediche sfruttano la combinazione di biocompatibilità (come dimostrato da vari esperimenti condotti in vivo sul corpo umano), resistenza e duttilità.

Le applicazioni aerospaziali sfruttano la capacità di smorzamento delle SMA, al fine di ridurre le vibrazioni, ottenendo così una maggior efficienza e una significativa diminuzione del rumore nell'ambiente circostante.

La possibilità delle SMA di lavorare in assenza di gravità le rende particolarmente consigliabili per applicazioni spaziali.

L'utilizzo delle SMA come attuatori sfrutta la loro capacità di compiere lavoro grazie all'effetto a memoria di forma: se sottoposte a uno sforzo, esse si deformano e mantengono tale deformazione una volta rimosso lo sforzo; se successivamente riscaldate, riacquistano la forma originaria, grazie a una trasformazione di fase.

In particolare, queste leghe risultano adatte ad applicazioni in campo automobilistico, grazie a caratteristiche quali semplicità di meccanismo e leggerezza.

Infine, soprattutto in campo civile, varie applicazioni sfruttano l'elevata capacità di smorzamento intrinseca a varie leghe.

1.3.1 Applicazioni dell'effetto a memoria di forma

Impianti endossei

In campo ortodontico vengono realizzati impianti endossei basati sull'effetto a memoria di forma. Dopo l'inserzione, l'impianto, predeformato per poter essere inserito, viene riscaldato da una bobina di induzione fino a una temperatura superiore a A_f , ma inferiore a 50 gradi e riacquista la forma originaria. Altri dispositivi usati comunemente in ortodonzia che sfruttano la memoria di forma sono degli appoggi dentali regolabili tramite connessioni sensibili alla temperatura.

Attuatori

I vantaggi dell'utilizzo delle SMA per la realizzazione di attuatori consistono in:

- semplicità di meccanismo: basandosi esclusivamente sulla trasformazione di fase del materiale, tali attuatori consentono una grande flessibilità di progetto e possono lavorare in tensione, compressione, flessione, rotazione o anche combinazioni di esse
- condizioni di lavoro pulite, silenziose, senza scintille e in assenza di forze di gravità: non essendoci frizione tra parti diverse, nè parti in vibrazione, consentono di evitare produzione di polvere e rumore; non richiedono alte densità di corrente e pertanto

funzionano senza scintille, cosa che le rende adatte a lavorare in ambienti altamente infiammabili; l'assenza di accelerazioni, e quindi di forze di gravità, le rende adatte ad applicazioni spaziali

• elevato rapporto potenza/peso: rispetto ad altri tipi di attuatori, sono quelli con il rapporto più elevato (Ikuta,1990). Questo li rende molto consigliabili per la realizzazione di microattuatori.

Gli svantaggi consistono invece in:

- bassa efficienza energetica: in realtà tale efficienza dipende dal disegno e dalla forma dell'attuatore, ma resta comunque piuttosto limitata
- lentezza nella risposta a causa dei tempi di raffreddamento
- degrado e fatica

L'applicazione delle SMA come attuatori è diffusa soprattutto in campo automobilistico: ogni veicolo ha infatti al suo interno più di 100 attuatori, usati per controllare il motore, la trasmissione, il funzionamento delle sospensioni, per migliorare la sicurezza e l'affidabilità e per aumentare il comfort del guidatore. La maggior parte di questi attuatori è costituita da motori elettrici, solenoidi, servomotori, attuatori a vuoto o a pressione.

Di recente, le leghe di Ni-Ti vengono preferite ad altri tipi di attuatori per caratteristiche quali elevata resistività elettrica, buona resistenza alla fatica, silenziosità e piccole dimensioni. Hanno però il problema di funzionare soltanto in un limitato intervallo di temperatura.

Gli attuatori in SMA presenti nelle automobili sono divisi generalmente in due gruppi: elettrici e termici. Entrambi i tipi compiono lavoro in seguito al riscaldamento; la differenza consiste nel fatto che gli attuatori elettrici sono riscaldati facendo passare una corrente direttamente nella SMA, mentre quelli termici sono riscaldati da cambiamenti della temperatura ambiente.

Gli attuatori elettrici vengono usati per compiere lavoro, al posto di solenoidi, servomotori, dispositivi pneumatici o idraulici.

Gli attuatori termici hanno generalmente una doppia funzione: individuare un cambiamento di temperatura e compiere lavoro. Sia le leghe di Ni-Ti, sia quelle a base di rame sono utilizzate come attuatori termici, a seconda delle necessità specifiche: le leghe Ni-Ti sono più resistenti alla fatica e offrono un rendimento migliore, mentre quelle a base di rame hanno temperature di trasformazione più elevate e sono meno costose. Nelle automobili, si tende però a preferire le leghe di Ni-Ti, grazie alla loro buona resistenza alla corrosione, elevata resistività elettrica e facilità di lavorazione.

Dispositivi di accoppiamento e fissaggio

Numerosi dispositivi di accoppiamento fanno uso della forza generata da un elemento di SMA deformato, mediante l'impedimento del recupero della forma originaria; il sistema più utilizzato consiste in un anello di SMA, che si accoppia con un elemento, per esempio un tubo, di un altro materiale qualsiasi. L'anello, di diametro inferiore a quello del tubo, viene deformato in modo da allargarlo e consentirne l'innesto nel tubo; il recupero di forma della SMA, indotto da un aumento di temperatura, ma impedito dalla presenza del tubo, genera sul tubo stesso una forza, tale da assicurare la tenuta del dispositivo.

La prima applicazione di questo genere su larga scala fu realizzata nel 1971 e consisteva in un anello di Ni-Ti-Fe, montato su un aeroplano come dispositivo di accoppiamento. Negli anni successivi sono stati realizzati vari altri prototipi, che utilizzano anche altri tipi di leghe a memoria di forma. I principali vantaggi di questi dispositivi sono:

- leggerezza
- facilità di installazione anche in zone di difficile accesso
- affidabilità comprovata
- buona resistenza a prove cicliche

Gli svantaggi invece consistono in:

- costo elevato rispetto alle alternative classiche
- possibilità di operare solo in un campo limitato di temperature

Una classe particolare di dispositivi di accoppiamento e fissaggio basati su SMA è quella degli elementi sensibili al calore che bloccano o sbloccano due parti diverse, in breve tempo e a una temperatura critica prefissata. Questi dispositivi trovano applicazione soprattutto nei meccanismi di protezione dal fuoco.

1.3.2 Applicazioni della superelasticità

Fili ortodontici

Quello dei fili ortodontici è il primo campo di applicazione estensiva in ordine cronologico. Rispetto ai fili di acciaio senza stagno usati in precedenza, che si rilassavano nel tempo, le SMA sono in grado di fornire una forza costante per tempi lunghi, provocando ampi spostamenti dei denti. In questo modo si riduce la necessità di interventi da parte del dentista per sostituire i fili o riportarli alla tensione ottimale, con una conseguente diminuzione dei costi.

Altri dispositivi usati comunemente in ortodonzia e basati sul comportamento superelastico sono:

- impianti dentali per un'attacco stabile nell'ossatura
- piccole molle superelastiche che agiscono in tensione o compressione per creare spazio o chiudere buchi tra i denti
- meccanismi telescopici per il riposizionamento dei molari
- molle superelastiche per ampliare la mandibola
- connettori speciali per tenere due denti uniti
- connettori per ancoraggi di appoggi a impianti dentali

Stent

Sono oggi comunemente usate per la cura dell'aterosclerosi, (cioè l'occlusione di condotti venosi o arteriosi a causa di placche) protesi intravascolari, o stent: esse sono costituite da una maglia di forma tubolare, generalmente in acciaio, e hanno lo scopo di mantenere allargato il vaso occluso, per permettere il normale flusso sanguigno. Vengono crimpate su un palloncino, a sua volta posizionato su un catetere; quindi vengono guidate, tramite il catetere, fino alla zona interessata e qui espanse, tramite gonfiaggio del palloncino.

Negli ultimi anni, sempre maggior interesse ha suscitato lo sfruttamento delle proprietà delle SMA per la realizzazione di stent permanenti e rimovibili.

Gli stent permanenti possono essere posizionati secondo diversi metodi: auto-espansione basata sulle proprietà superelastiche; espansione di un palloncino nella fase martensitica; uso dell'effetto a memoria di forma tramite leggero riscaldamento dello stent, una volta posizionato.

Gli stent rimovibili sono dispositivi che, sistemati nel vaso con l'espansione del palloncino nella fase martensitica, possono essere rimossi grazie a un catetere disegnato appositamente, posizionato coassialmente nello stent, e all'iniezione di una soluzione fisiologica a $55 \,^{\circ}C$, che riscalda lo stent, in modo da attivare l'effetto a memoria di forma. Essi offrono l'indubbio vantaggio di poter essere rimossi dopo la guarigione.

Apparecchi ortopedici

Le SMA vengono oggi utilizzate per realizzare svariati elementi utilizzati nell'ortopedia (Humbeeck et al. 1998). La maggior parte di essi sfrutta il comportamento superelastico delle SMA, ma non mancano casi che accoppiano questo effetto a quello a memoria di forma. Alcuni dei più comuni sono:

- dispositivi superelastici per la correzione graduale della scoliosi, tramite meccanismo decontratturante
- elementi di connessione per impianti ortopedici modulari
- fissatori esterni, dotati di un elevato grado di flessibilità, chiusi da anelli sensibili alla temperatura
- anelli a memoria di forma per il fissaggio di protesi d'anca nella fossa acetabolare
- dispositivi utilizzati per modificare la lunghezza di un osso, nel caso di osteosintesi (metodo di Illizarov)
- ganci, realizzati con elementi metallici a memoria di forma, che si autoespandono per adattarsi al canale midollare, durante interventi di osteosintesi
- strumenti per la rimozione di frammenti liberi di ossa

Smorzatori

Esiste tutta una categoria di applicazioni che cerca di sfruttare l'elevata capacità di smorzamento passivo tipica delle SMA. Lo smorzamento passivo consiste nella conversione di energia meccanica in calore, da parte di un materiale soggetto a un carico vibrazionale o di impatto. La capacità di smorzamento si esprime come rapporto tra l'energia dissipata e quella applicata.

Nelle SMA, l'elevata capacità di smorzamento è associata al movimento isteretico delle interfacce (interfacce tra varianti martensitiche, piani di geminazione, interfacce martensiteaustenite), nonostante un contributo delle dislocazioni non sia escluso.

La lega che mostra la più elevata capacità di smorzamento è Cu-Zn-Al (Humbeeck et al. 1997). Durante la trasformazione di fase, si può osservare un picco della frizione interna: questo rende consigliabile l'utilizzo delle SMA a temperature comprese nel range di trasformazione. Quando infatti la trasformazione non è in atto, lo smorzamento si abbassa a un valore medio tra quello della fase martensitica (elevato) e quello della fase austenitica (basso).

L'applicazione forse più interessante di questa proprietà consiste nella protezione di strutture civili, come edifici e ponti, da possibili danneggiamenti causati da terremoti. Tra le varie soluzioni proposte per la realizzazione di dispositivi anti-sismici, ottimi risultati sono stati ottenuti tramite l'integrazione nella struttura di elementi in grado di assorbire energia e concentrare così il comportamento isteretico e quindi il danno in regioni della struttura appositamente progettate.

Vari tipi di dispositivi sono stati testati per svolgere questa funzione, ma tutti presentano problemi; in particolare:

- i dispositivi basati su polimeri sintetici presentano problemi di invecchiamento e di conseguente fragilità
- i dispositivi basati sulla dissipazione energetica tramite sistemi oleodinamici sono molto efficaci, ma meccanicamente complessi e quindi costosi e richiedono una regolare manutenzione sia del sistema meccanico, sia dei fluidi
- i dispositivi basati sul comportamento isteretico dei metalli sono durevoli e affidabili, ma devono essere sostituiti dopo eventi significativi a causa del limitato numero di cicli che possono sopportare prima di arrivare a fragilità e rottura

Alcuni dei problemi appena citati possono essere risolti, almeno in parte, con l'utilizzo delle SMA, dal momento che:

- le proprietà di smorzamento delle SMA sono dipendenti dall'ampiezza, ma indipendenti dalla frequenza e questo è particolarmente utile nel caso di eventi sismici caratterizzati da diverse frequenze e ampiezza variabile
- non presentano problemi di invecchiamento e restano affidabili nel tempo
- virtualmente non necessitano di manutenzione
- sono meccanicamente molto più semplici dei sistemi oledinamici

• il comportamento isteretico dei metalli è sostituito nelle SMA da una combinazione di effetto superelastico ed elevato smorzamento della fase martensitica.

D'altra parte, l'utilizzo delle SMA è limitato da alcuni fattori, tra cui:

- costo troppo elevato perchè possano essere utilizzate come materiale strutturale
- difficoltà di realizzazione di un prodotto standard
- difficoltà di lavorazione e di saldatura

Proprietà	Valore
Temperatura di fusione	$\sim 1573K$
Densità	$6.4 - 6.5 \text{ g } cm^{-3}$
Temperature di trasformazione	173 - 390 K
Entalpia di trasformazione	1.46 - 1.88 kJ mol ⁻ 1
Isteresi di trasformazione	20 - 50 K
Deformazione recuperabile	
effetto a una via	< 8%
effetto a due vie	< 5%
Sforzo di recupero	< 500 MPa
Capacità di smorzamento	$\sim 10^{-2}$
Resistenza ultima a trazione	800 - 1100 MPa
Tensione di snervamento	
Austenite	200 - 800 MPa
Martensite	70 - 200 MPa
Modulo di Young	
Austenite	50 - 90 GPa
Martensite	10 - 35 GPa
Modulo elastico tangenziale	
Austenite	15 - 20 GPa
Martensite	3.5 - 5 GPa
Coeff. di espansione termica	
Austenite	$10.0 - 11.0 * 10^{-6} K^{-1}$
Martensite	$5.8 - 8.6 * 10^{-6} K^{-1}$
Conduttività termica	
Austenite	$0.18 W cm^{-1} K^{-1}$
Martensite	$0.086 W cm^{-1} K^{-1}$
Resistività elettrica	
Austenite	$70 - 110 \mu\Omega cm$
Martensite	$40 - 70 \mu\Omega cm$
Suscettività magnetica	
Austenite	$2.7 - 3.0 * 10^{-6} e.m.u.g^{-1}$
Martensite	$1.9 - 2.1 * 10^{-6} e.m.u.g^{-1}$

Tabella 1.1: Alcune proprietà significative delle leghe binarie di Ni-Ti.

Proprietà	Lega a memoria	Ceramica	Materiale
	di forma	piezoelettrica	magnetostrittivo
	(Ti-Ni)	(PZT)	(Terfenol-D)
Sforzo di compressione (MPa)	~ 800	60	700
Resistenza a trazione (MPa)	800 - 1000	30 - 55	28 - 35
Modulo di Young (GPa)	50 - 90 (Austenite)	60 - 90 ¹	$25 - 35^{-2}$
	10 - 35 (Martensite)	\sim 110 3	$50 - 55$ 4
Deformazione massima (-)	~ 0.1	~ 0.001	~ 0.01
Frequenza (Hz)	0 - 100	1 - 20000	1 - 10000
Efficienza ⁵ (%)	3 - 5	50	80
Densità di energia (kJm^{-3})	300 - 600	~ 1.0	14 - 25

- ¹ A campo elettrico costante
 ² A campo magnetico costante
- ³ A spostamento elettrico costante
- ⁴ A induzione magnetica costante
- ⁵ Rapporto tra il lavoro netto prodotto dall'attuatore e il calore assorbito

Tabella 1.2: Confronto tra le caratteristiche di SMA, ceramiche piezoelettriche e materiali magnetostrittivi come attuatori. (da Z.G.Wei et al. (1998))

Lega	Composizione	Temp. di trasf.	Isteresi di
		intervallo ^{0}C	${\it trasformazione}$
Ag-Cd	44/49 % atom. Cd	da -190 a -50	$\simeq 15$
Ag-Cd	46.5/50 % atom. Cd	da 30 a 100	$\simeq 15$
Cu-Al-Ni	14/14.5 % peso Al	da -140 a 100	$\simeq 35$
	3/4.5~% peso Ni		
Cu-Sn	15~% atom. Sn	da -120 a 30	
Cu-Zn	38.5/41.5 % peso Zn	da -180 a -10	$\simeq 10$
In-Ti	18/23 % atom. Ti	da 60 a 100	$\simeq 4$
Ni-Al	36/38 % atom. Al	da -180 a 100	$\simeq 10$
Ni-Ti	49/51 % atom. Ni	da -50 a 110	$\simeq 30$
Fe-Pt	$\simeq 25~\%$ atom. Pt	$\simeq -130$	$\simeq 4$
Mn-Cu	5/35 % atom. Cu	da -250 a 180	$\simeq 25$
Fe-Mn-Si	32~% peso Mn.	da -200 a 150	$\simeq 100$
	$6~\%~{ m peso}~{ m Si}$		

Tabella 1.3: Leghe a memoria di forma (da Hodgson and Biermann (1992)).

Capitolo 2 Compositi con SMA

Come accennato nell'introduzione, l'integrazione delle SMA con altri materiali funzionali o strutturali può portare a materiali compositi intelligenti, in grado di sfruttare le funzionalità delle singole materie prime, per ottenere risposte multiple e proprietà ottimali, e per adattare le loro caratteristiche a cambiamenti ambientali (Z.G.Wei et al. 1998).

I compositi ibridi così ottenuti si sono dimostrati materiali unici, con potenzialità applicative enormi, che spaziano in campi molto diversi: dal controllo sismico di grandi strutture, al controllo del rumore e delle vibrazioni nei trasporti; dalla medicina, all'aeronautica civile e militare, alle applicazioni in campo aerospaziale, e molti altri ancora.

Le leghe a memoria di forma disponibili in commercio possono essere facilmente fabbricate in varie forme, come fibre, fili, nastri, particelle e pellicole sottili, rendendo così possibile la realizzazione di una grande varietà di compositi ibridi, con procedimenti di fabbricazione tradizionali (Z.G.Wei et al. 1998). Sono stati progettati e realizzati sia compositi rinforzati in modo continuo, con fibre o pellicole, sia compositi rinforzati in modo discontinuo, con particelle o scaglie, in cui le SMA possono costituire il rinforzo o la matrice, a seconda dei casi.

Nella maggior parte delle soluzioni, le SMA vengono inserite come rinforzo, in matrici, che possono essere costituite da materiali monolitici o compositi a loro volta.

In un primo momento, grazie anche alla semplicità delle tecniche di realizzazione, la maggior parte degli sforzi si è concentrata sulla produzione di compositi, con SMA inserite in matrici polimeriche (Paine and Rogers 1994a).

Più recentemente, l'interesse ingegneristico per la fabbricazione di compositi intelligenti si è indirizzato verso l'utilizzo di matrici metalliche o di silicone (Barrett and Gross 1996). Molto meno diffusi nelle applicazioni commerciali sono i compositi in cui le SMA costituiscono la matrice, rinforzata con particelle di altri materiali, generalmente ceramica o materiali magnetostrittivi.

2.1 Compositi rinforzati con fibre di SMA

Grazie alla duttilità delle leghe a memoria di forma, è possibile realizzare fibre con diametri dell'ordine di alcune centinaia di micron.

È sufficiente una piccola percentuale (3%) di queste fibre, inserite in una matrice, per modificarne in modo significativo le proprietà (Furuya 1996; Aboudi 1997).

Vari tipi di matrice sono stati progettati e testati; i compositi che hanno evidenziato le proprietà più interessanti dal punto di vista commerciale sono quelli con matrici metalliche, generalmente alluminio o titanio, polimeriche, di solito resine termoindurenti o resine termoplastiche, o con matrici di intonaco.

Nei compositi a matrice metallica, si possono ottenere alcune proprietà come aumento della resistenza, possibilità di ritardare la propagazione delle fratture ed elevata capacità di smorzamento (Furuya 1996; Aboudi 1997). Queste proprietà possono essere sfruttate per esempio nella protezione di strutture civili.

I compositi con matrici polimeriche vengono generalmente utilizzati in applicazioni quali controllo della forma o della posizione di elementi strutturali, controllo attivo e passivo delle vibrazioni o della trasmissione acustica di materiali soggetti a carichi dinamici (Paine and Rogers 1994b).

Per quanto riguarda infine i compositi con fibre di SMA inserite in matrici di materiali da costruzione (intonaco o calcestruzzo), questi vengono utilizzati allo scopo di realizzare materiali intelligenti per scopi civili (Furuya 1996).

2.1.1 Fibre di SMA/matrice metallica

Progetto e fabbricazione del materiale

Il progetto di questo tipo di compositi è basato sulla differenza di coefficiente di espansione termica tra la matrice e le fibre (il coefficiente è molto maggiore nelle fibre); questo comporta che, se il composito è fabbricato a temperature elevate e poi raffreddato alla temperatura ambiente, si generi uno sforzo residuo termico che può essere di compressione o di trazione; come è noto, una compressione residua ha effetti benefici sulle proprietà meccaniche, come per esempio tensione di snervamento e resistenza alla frattura.

Nel caso di compositi rinforzati con fibre di SMA, le fibre si accorciano in seguito al cambiamento di temperatura, inducendo una precompressione nel composito e contribuendone quindi alla resistenza a trazione.

Oltre a questo, in tali compositi, possono essere attivate alcune proprietà adattive delle SMA, tali da produrre per esempio l'autoriparazione di eventuali danni (per esempio, la chiusura di microfratture) o da limitare la propagazione di fessure dovute alla fatica, effetti che migliorano la resistenza del composito.

Le fasi di progetto di un composito tipo sono descritte nel lavoro di Furuya (1996), relativo a un composito con matrice di alluminio, rinforzata da fibre di SMA. Il progetto si può scomporre in 6 fasi:

- 1. fibre di alcune centinaia di micron di diametro vengono realizzate con metodi tradizionali, grazie alle eccellenti duttilità e lavorabilità delle leghe Ni-Ti
- 2. le fibre vengono quindi inserite nella matrice utilizzando metodi tradizionali, tramite pressione o compattandole con il metodo delle polveri.

Ad esempio, nel caso citato di compositi con matrice di alluminio, le fibre vengono disposte in uno stampo, in cui viene versato alluminio fuso (970 K), che viene poi compresso. Dal momento che la temperatura di fusione dell'alluminio non è molto elevata, le fibre di Ni-Ti restano inalterate

- 3. il composito è quindi soggetto a trattamento termico affinchè le fibre memorizzino la loro lunghezza iniziale
- 4. il composito è raffreddato rapidamente, immergendolo in acqua, per indurre la trasformazione martensitica
- 5. il composito è quindi sottoposto a un allungamento imposto per consentire la geminazione martensitica o la trasformazione indotta dallo sforzo
- 6. il composito predeformato è riscaldato fino a temperatura maggiore di A_f in modo tale che le fibre recuperino la loro forma originale, accorciandosi e introducendo così sforzi residui nel composito stesso.

Questa procedura viene seguita anche per la realizzazione di compositi con matrici polimeriche e di compositi con matrici metalliche contenenti particelle di SMA.

Caratteristiche del materiale

Studi eseguiti su una matrice di alluminio, rinforzata con una percentuale volumetrica di fibre del 3% (Furuya 1996), hanno evidenziato che:

- la curva sforzi-deformazioni del composito, a temperatura ambiente, risulta molto simile a quella di una matrice di alluminio puro, senza fibre; questo perchè la rigidezza e lo snervamento delle fibre di Ti-Ni a temperatura ambiente hanno valori molto simili a quelli dell'alluminio puro
- la tensione di snervamento del composito aumenta all'aumentare dell'allungamento imposto inizialmente alle fibre e della percentuale volumetrica di fibre
- la velocità di propagazione del meccanismo di frattura per fatica diminuisce se si aumenta la temperatura del campione dalla temperatura ambiente fino a 90 °C. Questo è attribuibile allo sforzo di compressione dovuto all'accorciamento delle fibre di Ni-Ti precedentemente deformate nella matrice, alla trasformazione di fase indotta dallo sforzo e alla dispersione di energia di deformazione meccanica che avviene nel punto di inizio della propagazione della frattura per fatica
- lo smorzamento interno del composito risulta maggiore di quello di una matrice di alluminio puro, a causa della differenza di rigidezza tra le fibre di Ni-Ti e l'alluminio della matrice e a causa dei cambiamenti di smorzamento associati alla trasformazione termica delle fibre stesse.

Un confronto tra due compositi realizzati rispettivamente con una matrice di alluminio e una di titanio, entrambe con percentuale volumetrica di fibre di SMA del 3% (Aboudi 1997), ha evidenziato che le risposte dei compositi nei due casi sono significativamente diverse:

• nel caso della matrice di alluminio, lo sforzo critico a cui avviene la trasformazione delle fibre di SMA è ben al di sopra del limite di snervamento della matrice, mentre nel caso di matrice di titanio, è leggermente al di sotto

- sempre nel caso della matrice di alluminio, le risposte nelle direzioni assiale e trasversale sono molto simili, a causa della piccola differenza di modulo elastico tra le fibre e la matrice
- il comportamento elastico, nel caso del titanio, comprende un range più vasto di deformazioni

2.1.2 Fibre di SMA/matrice polimerica

Progetto e fabbricazione del materiale

A seconda del pretrattamento cui le fibre sono soggette, della loro distribuzione e della matrice ospite, una notevola varietà di compositi con matrice polimerica può essere prodotta, in generale utilizzando metodi di fabbricazione convenzionali.

Si realizzano compositi sia con resine termoindurenti, sia con resine termoplastiche.

- le resine termoindurenti sono caratterizzate da un processo di indurimento irreversibile, per effetto di reazioni chimiche di polimerizzazione, a volte accelerate da riscaldamento, che determinano la formazione di una struttura chimica reticolare tridimensionale
- le resine termoplastiche, invece, rammolliscono per effetto del riscaldamento e induriscono quando si raffreddano, seguendo processi reversibili, ripetibili più volte.

Da un'analisi comparativa (Bidaux et al. 1994), si vede come le resine termoplastiche, rinforzate da fibre, offrano alcuni vantaggi rispetto alle resine termoindurenti, quali:

- eccellente rigidezza specifica
- elevata resistenza alla frattura
- basso assorbimento di umidità
- possibilità di realizzazione rapida e poco costosa

Nella fabbricazione di questi compositi bisogna tuttavia tener presente una serie di problematiche, tra cui:

• le elevate temperature di lavorazione possono creare problemi riguardo all'inserimento delle fibre di SMA, in particolare nel caso di resine termoplastiche, che devono essere lavorate a temperature comprese tra 423 e 673 K. Queste elevate temperature hanno infatti degli effetti sulla struttura microscopica delle SMA, provocando, per esempio, variazioni delle temperature di trasformazione della lega. La maggior parte della ricerca sui compositi con SMA si è basata sullo sfruttamento dell'effetto a memoria di forma a una via. Recentemente è stato però scoperto (White et al. 1993) che l'utilizzo dell'effetto a due vie può semplificare notevolmente la complessità di fabbricazione; in questo modo, infatti, le fibre di SMA vengono trattate, in modo da indurre l'effetto, prima del loro inserimento nella matrice

- molto importante per la fabbricazione di questi compositi è il contenuto di vuoti, che influenza in modo significativo l'integrità e il comportamento del materiale. La presenza di vuoti nei compositi con SMA, infatti, non soltanto porta alla degradazione della matrice, ma intacca anche l'efficienza del meccanismo di attivazione delle fibre
- una questione delicata è quella delle interfacce tra i materiali che costituiscono il composito. È infatti desiderabile la massima adesione interfacciale tra le fibre e la matrice, perchè molte applicazioni richiedono il trasferimento completo del carico e, inoltre, perchè una forte adesione aumenta l'integrità strutturale del composito (Paine and Rogers 1993). Per migliorare l'aderenza, sono stati studiati vari trattamenti di superficie per le SMA. A volte, invece, per evitare questo problema di interfaccia, le fibre vengono incorporate nella matrice utilizzando guaine di accoppiamento.

Caratteristiche del materiale

Le principali caratteristiche dei compositi realizzati con matrici di grafite epossidica o resina epossidica consistono in:

- buone resistenza e rigidezza a pesi e costi contenuti
- notevole differenza di comportamento in direzione assiale e in direzione trasversale, dovuto alla notevole differenza di modulo di Young tra le fibre e la matrice (Aboudi 1997)
- scarsa resistenza all'impatto, perchè manca loro un meccanismo per dissipare l'energia di deformazione dovuta all'impatto, quale è per esempio il meccanismo di snervamento nei metalli duttili. Come risultato, tali materiali compositi dissipano relativamente poca energia e si rompono in maniera catastrofica, una volta che lo sforzo ecceda la resistenza ultima del composito stesso. Generalmente, il danneggiamento comincia dalla fessurazione e delaminazione nella matrice, per arrivare alla rottura della fibra e a un'eventuale perforazione del materiale (Paine and Rogers 1994c).

Sono stati studiati vari approcci per aumentare la resistenza all'impatto e, in particolare, alla perforazione di tali materiali. L'idea è quella di creare un ibrido, che sfrutti le fibre di rinforzo, per aumentare la resistenza all'impatto, affidando comunque alla matrice polimerica la maggior parte del carico.

Rispetto ad altri materiali ingegneristici a disposizione, le SMA hanno il vantaggio di possedere un'elevata resistenza ultima e di poter assorbire e dissipare una grande quantità di energia attraverso la trasformazione martensitica indotta dallo sforzo. Paine and Rogers (1994c) hanno dimostrato che, sotto particolari condizioni di carico, la capacità di assorbire energia di compositi con matrici di resina epossidica o vetro aumenta effettivamente con l'inserimento di fibre di SMA.

2.1.3 Fibre e particelle di SMA/matrice di intonaco

Lo studio di compositi con fibre di SMA inserite in matrici di materiali da costruzione (intonaco o calcestruzzo) mira alla realizzazione di materiali intelligenti per scopi civili.

Uno dei vantaggi dell'utilizzo di matrici in calcestruzzo è la buona aderenza tra la matrice stessa e le fibre, tramite la realizzazione di innesti meccanici tra i fili.

Furuya (1996) ha analizzato una matrice di intonaco, con particelle di Nitinol mischiate, e rinforzata con fibre di Nitinol.

L'interesse dell'autore si è concentrato soprattutto sull'aumento della resistenza a fatica e sullo smorzamento delle vibrazioni.

Bisogna osservare che i due tipi di SMA utilizzati, particelle e fibre, presentano temperature di trasformazione diverse. Le fibre, la cui temperatura di trasformazione A_f è circa la temperatura ambiente considerata, devono essere inserite nella matrice in modo uniassiale e trattenute a entrambe le estremità tramite viti, durante tutto il processo di precompressione della matrice, durante il quale la temperatura è al di sopra di A_f .

Le particelle sono distribuite in modo tale che se ne abbia un'alta densità vicino alla superficie dell'elemento composito: questo dovrebbe garantire l'assorbimento delle vibrazioni ad alta frequenza. Sottoponendo il composito a un trattamento di pretensione, si ottiene un irrigidimento. Un confronto tra le curve carico-spostamento di una semplice matrice di intonaco e del materiale composito studiato mostra un meccanismo di rottura fragile nel primo caso, contrapposto a una rottura molto duttile nel secondo.

La capacità di smorzamento del composito dipende da due fattori: la differenza di rigidezza tra la matrice e la SMA e la percentuale volumetrica della SMA stessa. Infatti, l'alta capacità di smorzamento associata alla fase martensitica della SMA fa aumentare la capacità di smorzamento delle vibrazioni nel composito.

2.2 Compositi rinforzati con particelle di SMA

La realizzazione di compositi rinforzati con particelle di SMA ha attratto l'attenzione dei ricercatori, grazie alla facilità di produzione e alle promettenti caratteristiche meccaniche e di smorzamento.

In applicazioni che non richiedono condizioni termiche o di carico estreme, come nei componenti delle automobili, i compositi rinforzati in modo discontinuo offrono sostanziali miglioramenti delle proprietà meccaniche.

In particolare, sono stati realizzati compositi in cui la matrice è costituita da alluminio; essi consentono, grazie all'elevata capacità di smorzamento e alla bassa densità, di eliminare vibrazioni meccaniche (Lavernia et al. 1995).

Progetto e fabbricazione del materiale

Il meccanismo che consente di aumentare la resistenza del composito è simile a quello che si ha nei materiali rinforzati con fibre: le particelle di SMA, predeformate, tentano di recuperare la loro forma originale, generando così sforzi di compressione nella matrice, che migliorano la resistenza a trazione del composito.

I compositi ibridi rinforzati con particelle vengono fabbricati consolidando le particelle e la matrice tramite la metallurgia delle polveri. Vari tipi di leghe SMA vengono usati come particelle, ma Ti-Ni-Cu si è dimostrata essere una lega particolarmente adatta, per il suo ciclo di isteresi molto stretto, l'elevata capacità di ammortizzamento e l'effetto di base a memoria di forma. È opportuno tuttavia che il contenuto percentuale di rame nella lega ternaria non superi il 15%, valore oltre il quale la lega SMA mostra comportamenti fragili (Otsuka 1994).

Caratteristiche del materiale

Le caratteristiche di sforzo e deformazione dei compositi rinforzati da particelle di SMA dipendono, come è intuibile, dal tipo e dall'entità della deformazione impressa alle particelle stesse; è stato osservato come, qualora le particelle siano predeformate con una forza di trazione lungo la direzione longitudinale, gli sforzi residui siano di compressione lungo la direzione longitudinale e di trazione lungo quella trasversale. Al contrario, se le particelle sono precompresse lungo la direzione longitudinale, gli sforzi hanno segno invertito.

L'entità degli sforzi residui aumenta all'aumentare della predeformazione e della percentuale volumetrica di particelle. Di conseguenza, anche la tensione di snervamento mostra un andamento simile. È stato osservato che la tensione di snervamento può più che raddoppiare con l'inserimento di particelle per un volume di pochi punti percentuali. Il modulo di Young del composito, invece, è influenzato solo dalla frazione volumetrica di particelle e non dall'entità della deformazione imposta.

2.3 Compositi con matrici di SMA rinforzate da particelle

Si trovano in letteratura anche alcuni esempi di compositi in cui le SMA costituiscono la matrice, rinforzata da particelle di altri materiali, in genere ceramica o materiali magne-tostrittivi.

• Particelle ceramiche

La presenza di particelle ceramiche in una matrice di SMA può dar luogo a un composito che presenta densità minore e resistenza, rigidezza, durezza e resistenza all'abrasione maggiori. Rispetto ai comuni compositi di ceramica e metallo, i compositi di cui si parla presentano una maggiore capacità plastica, a causa della trasformazione martensitica indotta dallo sforzo, che può ridurre la concentrazione di sforzi interni e quindi ostacolare la rottura del materiale. Bispetto allo SMA non rinforzato, si ha che:

Rispetto alle SMA non rinforzate, si ha che:

- -il campo di sforzi che provocano la formazione di martensite nella matrice austenitica è più ampio e la frazione massima di martensite è minore
- per entrambe le fasi martensitica e austenitica, si può osservare un aumento di resistenza: lo sforzo di snervamento legato alla geminazione è maggiore
- per quanto riguarda l'effetto a memoria di forma, l'entità della deformazione che può essere recuperata dopo lo scarico è scarsamente influenzata dalla presenza di particelle ceramiche, fino a una percentuale volumetrica del 20% (Mari and Dunand 1995).

• Particelle magnetostrittive

Per quanto riguarda i compositi rinforzati con particelle magnetostrittive, si ottiene un materiale con effetto a memoria di forma ferromagnetico, che combina le caratteristiche delle SMA e dei materiali magnetostrittivi. È noto infatti che le SMA (viene di solito usato in questi compositi Cu-Zn-Al) hanno

- un' elevata capacità di smorzamento in corrispondenza di grandi deformazioni, ma
- rigidezza inadeguata per alcune applicazioni strutturali

Dall'altro lato, i materiali magnetostrittivi (per esempio Terfenol-D) hanno

- un' elevata resistenza e una buona capacità di smorzamento in corrispondenza di piccole deformazioni, ma
- sono molto meno efficaci in presenza di grandi deformazioni.

Le particelle di rinforzo vengono allungate di circa lo 0.1% dall'applicazione di un campo magnetico. La forza così generata è sufficiente a indurre la trasformazione martensitica della matrice a temperature appropriate. Pertanto, l'orientamento e la crescita della martensite possono essere controllate dal campo magnetico e dalla distribuzione delle particelle nella matrice.

2.4 Legami costitutivi

Per poter progettare compositi intelligenti con SMA, è necessario conoscere le equazioni costitutive delle materie prime che lo formano, in modo da poter studiare le interazioni tra di esse. Una volta noto il legame costitutivo di ognuna delle materie prime, è necessario ricavarne uno che sia valido per il composito nel suo insieme.

2.4.1 Legami costitutivi per SMA

In letteratura si possono trovare vari approcci per lo sviluppo di un legame costitutivo per le SMA, sia monodimensionali, sia tridimensionali. Tra quelli monodimensionali, un esempio classico è quello proposto da Liang and Rogers (1991). La relazione sforzideformazioni tangenziali delle SMA, sotto l'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, è espressa come:

$$\tau - \tau_0 = G(\gamma - \gamma_0) + \frac{\Theta}{\sqrt{3}}(T - T_0) + \frac{\Omega}{\sqrt{3}}(\xi - \xi_0)$$
(2.1)

dove:

- il pedice zero si riferisce alle condizioni iniziali
- τ è lo sforzo tangenziale
- G è il modulo di elasticità tangenziale

- γ è la deformazione tangenziale
- Θ è la componente relativa al caso monodimensionale del tensore termoelastico, misurato attraverso esperimenti
- $\bullet~T$ è la temperatura
- Ω è la componente relativa al caso monodimensionale del tensore di trasformazione di fase, che può essere calcolato come $-E\epsilon_L$ con E modulo di Young ed ϵ_L la massima deformazione recuperabile delle SMA
- ξ è la variabile interna che descrive il grado di trasformazione martensitica, definito tramite la frazione martensitica (martensite totale/SMA totale)

La dipendenza della frazione martensitica dallo sforzo e dalla temperatura è stata definita dagli autori tramite un modello cosinusoidale. In particolare, nelle trasformazioni dirette (da martensite ad austenite), si ha che:

$$\xi = \frac{1}{2} \{ \cos[a_M(T - M_f) + b_M \sigma_{eq}] + 1 \}$$
(2.2)

e, in una trasformazione inversa (da martensite ad austenite), si ha che:

$$\xi = \frac{1}{2} \{ \cos[a_A(T - A_s) + b_A \bar{\sigma_{eq}}] + 1 \}$$
(2.3)

dove A_S e M_f sono le temperature rispettivamente di inizio della fase austenitica e di fine di quella martensitica; le quattro costanti a_M , a_A , b_M e b_A possono essere ricavate dalle temperature di transizione tra le fasi; $\overline{\sigma_{eq}}$ è lo sforzo equivalente, definito come $\overline{\sigma_{eq}} = \sqrt{3}\tau$.

Passando ora ai modelli tridimensionali, si ricorda innanzitutto quello proposto da Boyd et al. (1994). Assumendo che la risposta si mantenga elastica, con piccole deformazioni, gli autori hanno scritto l'equazione sforzi-deformazioni come:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \,\epsilon^e_{kl} = C_{ijkl} \left(\epsilon_{kl} - \epsilon^t_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T \right) \tag{2.4}$$

dove ϵ_{ij} , ϵ_{ij}^e e ϵ_{ij}^t sono rispettivamente la deformazione totale, quella elastica e quella di trasformazione; $\Delta T = T - T_0$, dove T_0 è la temperatura di riferimento in assenza di sforzo. C_{ijkl} e α_{ij} sono rispettivamente il tensore di rigidezza elastica e il tensore di espansione termoelastica, che dipendono dalla fase in cui si trova il materiale e dalla frazione martensitica. Le equazioni costitutive in forma incrementale sono ottenute dagli autori derivando rispetto al tempo la 2.4. Il tensore di trasformazione in forma incrementale $\dot{\epsilon}_{ij}^t$ è ottenuto da:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^t = \Lambda_{ij}\dot{\xi} \tag{2.5}$$

con Λ_{ij} definito come:

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\Omega}{D} \bar{\sigma}^{-1} s_{ij} & per \quad \dot{\xi} > 0\\ \frac{\Omega_{ij}}{D} \bar{\epsilon}^{(t-1)} \epsilon^t_{ij} & per \quad \dot{\xi} < 0 \end{cases}$$

dove:

- Ω_{ij} è la componente del tensore di trasformazione di fase
- $D = (1/2)(D^M + D^A)$ è il modulo elastico medio tra le due fasi
- $\bar{\sigma}$ è definito come: $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} ||s||$ con s componente deviatorica degli sforzi

•
$$\bar{\epsilon}^t = \left[\frac{2}{3}\epsilon^t_{ij}\epsilon^t_{ij}\right]^{1/2}$$

• $\dot{\xi}$ si ottiene usando la regola di derivata di funzione di funzione:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}}$$
(2.6)

Un altro modello tridimensionale molto usato per le SMA è quello sviluppato da Graesser and Cozzarelli (1994), nel quale i comportamenti tipici delle SMA (in particolare isteresi martensitica e superelasticità) sono descritti per mezzo dell'aggiunta, alle equazioni della plasticità, di uno sforzo relativo variabile nel tempo. Le equazioni tridimensionali del modello, in termini dei tensori sforzo, deformazione e sforzo relativo sono quindi:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \,\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \,\dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \sqrt{3K_2} \,(\sqrt{3J_2^0})^{n-1} \left(\frac{s_{ij} - b_{ij}}{\sigma_c}\right) \tag{2.7}$$

$$b_{ij} = \frac{2}{3} E \alpha \left[\epsilon_{ij}^{in} + f_t e_{ij} \left(\frac{2}{3} \sqrt{3I_2} \right)^{c-1} erf\left(\frac{2}{3} a \sqrt{3I_2} \right) \right]$$
(2.8)

dove:

- ϵ_{ij} è il tensore delle deformazioni totali
- σ_{ij} è il tensore degli sforzi totali
- E è il modulo di Young
- ν è il modulo di Poisson
- b_{ij} è la parte deviatorica del tensore degli sforzi relativi
- e_{ij} é la parte deviatorica del tensore delle deformazioni
- s_{ij} é la parte deviatorica del tensore degli sforzi
- I_2, K_2, J_2^0 sono gli invarianti secondi delle parti deviatoriche dei tensori delle deformazioni, degli sforzi e degli sforzi relativi, rispettivamente
- α è un parametro che determina la pendenza della regione inelastica: $\alpha = E_y/(E E_y)$ dove E_y è la pendenza della curva sforzi-deformazioni dopo lo snervamento
- f_t è un parametro che determina l'ampiezza dell'isteresi superelastica
- \bullet n è un parametro che determina la transizione tra i comportamenti elastico e inelastico

- a è un parametro che determina l'ampiezza dello scarico elastico
- c è un parametro che determina il modulo elastico in fase di scarico
- σ_c è lo sforzo critico, definito come $\sigma_c = Y kf_t$ dove Y è la tensione di snervamento iniziale del materiale e k è un parametro che lega lo sforzo di snervamento apparente alla variabile isteretica f_t .

La deformazione inelastica ϵ_{ij}^{in} è ottenuta utilizzando la scomposizione additiva, sottraendo la deformazione elastica da quella totale:

$$\epsilon_{ij}^{in} = \epsilon_{ij} - \frac{1+\nu}{E} \,\sigma_{ij} + \frac{\nu}{E} \,\sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{2.9}$$

Un modello termo-meccanico tridimensionale per la descrizione delle trasformazioni di fase indotte dallo sforzo è stato proposto da Souza et al. (1998). Questo modello, in grado di descrivere tutte le principali caratteristiche delle SMA, è molto interessante, grazie alla sua efficacia e alla sua flessibilità; tuttavia presenta alcuni limiti dal punto di vista algoritmico, che sono stati affrontati da Auricchio and Petrini (2001).

2.4.2 Legami costitutivi per i compositi

Utilizzando per le SMA il legame costitutivo di Boyd et al. (1994), Baburaj et al. (1996) hanno proposto un modello per un composito rinforzato con fibre di Ni-Ti; considerando una cella unitaria del composito e assumendo che le deformazioni in direzione assiale siano uguali nelle fibre e nella matrice, gli autori hanno ottenuto le seguenti relazioni:

$$\dot{\epsilon}_{c11} = \dot{\epsilon}_{f11} = \dot{\epsilon}_{m11} = \dot{\epsilon}$$
 (2.10)

$$\left(\frac{\dot{\sigma}_{c11}}{\dot{\epsilon}}\right) = k_f \left(\frac{\dot{\sigma}_{f11}}{\dot{\epsilon}}\right) + (1 - k_f) \left(\frac{\dot{\sigma}_{m11}}{\dot{\epsilon}}\right) \tag{2.11}$$

dove i pedici $f, c \in m$ si riferiscono rispettivamente alle fibre, al composito e alla matrice; k_f è la percentuale volumetrica di fibre e il sistema di coordinate (1-2-3) ha l'asse 1 coincidente con la direzione delle fibre. In modo analogo, gli autori hanno ricavato le relazioni sforzo-deformazione per le altre direzioni.

Sempre utilizzando per le SMA il legame costitutivo di Boyd et al. (1994), Sullivan (1994) ha utilizzato la relazione di media tra le fasi, scritta in forma incrementale, per ricavare le equazioni costitutive di un composito con una matrice elastomerica, rinforzata con fibre in SMA:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \nu_f \dot{\epsilon}_{ij}^f + \nu_m \dot{\epsilon}_{ij}^m \tag{2.12}$$

dove gli apici $c, f \in m$ si riferiscono rispettivamente al composito, alle fibre e alla matrice e gli apici $e \in t$ indicano quantità elastiche e di trasformazione. $\nu_f \in \nu_m$ sono la frazione volumetrica di fibre e di matrice e la loro somma è 1. I risultati ottenuti con questo modello sono stati confrontati dall'autore con quelli ricavati con altri metodi di omogenizzazione; tale confronto ha fornito risultati piuttosto simili. Il modello proposto dall'autore è interessante per la sua semplicità da un punto di vista fisico e per l'attendibilità dei risultati forniti, anche nel caso di percentuali volumetriche di fibre elevate. Tuttavia, tale metodo non consente la determinazione in forma chiusa del modulo trasversale (E_T o G_T), ma individua soltanto un intervallo di valori, in cui tale modulo è compreso.

Hurlbut and Regelbrugge (1996) hanno proposto un modello costitutivo per gusci rinforzati con elementi di SMA, utilizzando per quest'ultime il legame di Graesser and Cozzarelli (1994). Il legame costitutivo delle SMA è stato adattato allo stato piano di sforzo tipico dei gusci, che non prevede deformazioni di taglio fuori dal piano. Gli autori hanno mostrato come la formulazione a elementi finiti del modello sia in grado di rappresentare da un punto di vista qualitativo le principali caratteristiche delle SMA, ma una verifica quantitativa del modello sarà oggetto di studi futuri.

Gaudenzi and Liotino (1998) hanno ricavato le equazioni che caratterizzano un composito, realizzato con una matrice di bassa rigidezza, elastica lineare, rinforzata con fibre in SMA. Le equazioni per il composito sono state ricavate dagli autori, utilizzando una semplice formula di omogenizzazione, secondo cui:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}_f \boldsymbol{\nu}_f + \boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\nu}_m \tag{2.13}$$

dove gli apici c, $f \in m$ si riferiscono, al solito al composito, alle fibre e alla matrice e ν è la percentuale volumetrica. Supponendo che le deformazioni siano uguali, lo sforzo nel composito può essere scritto in funzione dello sforzo nelle fibre, la cui espressione è fornita dal legame costitutivo usato per le SMA. L'equazione risolutiva è nonlineare e richiederà pertanto l'utilizzo di un metodo di soluzione iterativo. In un secondo momento, gli autori hanno considerato anche il caso in cui il legame costitutivo della matrice sia non lineare. Un difetto di questo metodo consiste nel fatto che la legge costitutiva utilizzata per le SMA è solamente monodimensionale. Tuttavia, dal momento che gli autori hanno considerato un composito rinforzato con fibre monodirezionali, caricato nella medesima direzione delle fibre, i risultati sono simili a quelli ottenuti da altri autori, in particolare da Boyd et al. (1994).

2.5 Applicazioni

2.5.1 Controllo della stabilita' di una struttura

Spesso il comportamento ottimale di una struttura può dipendere in modo significativo dal fatto che uno o più suoi componenti abbiano valori particolari di carico critico, in determinate situazioni.

Esempi di casi in cui tale comportamento è necessario possono essere la realizzazione di un veicolo in grado di resistere meglio a un incidente (per esempio riducendo la sua rigidezza al momento dell'impatto), o di un aeroplano in grado di rispondere in modo ottimale a

diverse manovre di volo.

L'utilizzo di materiali strutturali intelligenti offre la possibilità di controllare in modo attivo la stabilità di una struttura. In particolare, se si considera il caso di un materiale composito rinforzato con fibre di SMA, l'attivazione delle fibre, che fa cambiare alcune loro proprietà fra cui, per esempio, il modulo elastico, consente di modificare il carico critico della struttura, che può aumentare o diminuire (a seconda dell'orientamento delle fibre, delle condizioni al contorno e di altri fattori), fino a raggiungere valori prefissati.

Se si considerano, per esempio, piastre composite rinforzate con SMA, si osserva che le caratteristiche statiche sono governate essenzialmente dalla rigidezza (Ro and Baz 1995b). Essa è determinata da varie componenti, quali la rigidezza flessionale della piastra, la rigidezza geometrica (che tiene conto dei carichi assiali e termici) e la rigidezza causata dall'elasticità delle fibre di Nitinol.

Quando le forze di compressione membranali sono sufficientemente grandi da annullare la rigidezza flessionale, la piastra diviene instabile. L'effetto a memoria di forma delle fibre di SMA può essere usato per aumentare l'energia di deformazione, in modo tale da ritardare l'insorgere dell'instabilità. Tali fibre producono delle forze di trazione dovute alla trasformazione di fase, in grado di bilanciare la perdita di rigidezza della matrice dovuta ai carichi di compressione e aumentare così il carico critico della piastra.

Modellazione e sperimentazione

Vari studi, sia teorici sia sperimentali, sono stati condotti su pannelli e piastre rinforzati con fibre di Nitinol (Ro and Baz 1995b; Birman 1997; Thompson and Griffin 1993).

Per quanto riguarda lo studio numerico del comportamento di piastre rinforzate con fibre, la formulazione a elementi finiti proposta da Ro e Baz (1994), che tiene conto anche del modello termico proposto dagli autori stessi e descritto in seguito, ha fornito valori del coefficiente di instabilità molto vicini a quelli calcolati in modo esatto da Roark e Young (1975).

I valori del coefficiente calcolati per il caso di piastre ortotropiche sono risultati molto vicini a quelli calcolati da Nemeth (1986).

Thompson and Griffin (1993) hanno condotto studi numerici su pannelli rinforzati con fibre di SMA, dimostrando che l'attivazione delle fibre di SMA (tramite una trasformazione di fase indotta dalla temperatura) fa aumentare il carico critico, mentre non influenza i modi di instabilizzazione della struttura, che restano sostanzialmente gli stessi.

Come è intuibile, l'utilizzo di un numero maggiore di fibre di SMA fa aumentare ulteriormente il carico critico. Tuttavia, è opportuno secondo gli autori non eccedere col numero di fibre, dal momento che ogni attuatore è un concentratore tridimensionale di sforzi e può causare la rottura del pannello.

Per trovare la configurazione ottimale delle fibre, cioè quella che consenta il massimo aumento del carico critico, Birman (1997) ha studiato, in modo sia teorico che numerico,
una serie di pannelli compositi, in cui le fibre di SMA sono distribuite in modo funzionale, con una concentrazione maggiore nelle regioni più critiche. In tali regioni, una più alta percentuale volumetrica di fibre può influenzare positivamente la risposta, aumentando la stabilità della struttura, quando questa sia soggetta contemporaneamente a un campo termico uniforme e a un carico di compressione.

L'esperienza dell' autore mostra che la soluzione ottimale per il miglioramento della stabilità del pannello consiste nel disporre le fibre di SMA secondo una legge sinusoidale, con spaziatura minima tra le fibre al centro del pannello e massima verso i bordi. È intuitivo che, nella realtà, le fibre saranno disposte con spaziatura costante a tratti, disposizione che approssima bene l'andamento sinusoidale nel caso in cui le sezioni con spaziatura costante siano sufficientemente numerose.

Dagli esperimenti condotti dall' autore è risultato che l'influenza delle fibre di SMA sulla stabilità è relativamente piccola a basse temperature; al crescere della temperatura, essa diviene più evidente, così come diventa più significativo l'effetto della spaziatura ottimale. Come prevedibile, il massimo effetto è stato osservato in corrispondenza della minima spaziatura; tuttavia, l'accuratezza dei risultati per una spaziatura molto piccola può non essere soddisfacente.

2.5.2 Modifica delle caratteristiche dinamiche di una struttura

Uno degli obiettivi del controllo strutturale consiste nell'allontanare i modi di vibrare della struttura dalle frequenze di eccitazione, in modo tale da evitare indesiderati fenomeni di risonanza.

La risposta dinamica di una struttura a uno stimolo esterno è influenzata dalla sua massa, dalla rigidezza e dallo smorzamento, oltre che dalle forze agenti su di essa e dalle condizioni iniziali.

Ci sono vari modi per ridurre il tempo di stabilizzazione di un sistema eccitato da un moto vibratorio:

- aumentare lo smorzamento, per esempio introducendo nella struttura un materiale con un'alta capacità di smorzamento
- controllare la rigidezza della struttura, introducendo per esempio un materiale a memoria di forma che, come si è già detto, può variare il suo modulo elastico in seguito alla trasformazione di fase
- utilizzare la SMA come un trasduttore di forze che produce uno sforzo nel piano, che effettivamente aumenta la rigidezza del sistema

Le leghe a memoria di forma presentano una notevole capacità di smorzamento, dovuta essenzialmente a due meccanismi:

- l' elevata capacità di smorzamento nella fase martensitica, dovuta alla frizione interna, che può essere utilizzata per il controllo passivo delle vibrazioni
- lo smorzamento isteretico delle SMA superelastiche, che può essere sfruttato per il controllo passivo-adattivo delle vibrazioni

Una particolarità delle SMA consiste nel fatto che esse hanno uguali capacità di smorzamento se soggette a trazione, compressione o taglio.

In letteratura si possono trovare vari studi sperimentali sull'utilizzo di compositi con SMA nel controllo delle vibrazioni (Venkatesh et al. 1992; Chen and Levy 1999; Ro and Baz 1995c; Hurlbut and Regelbrugge 1996; Liang and Rogers 1991).

In questi studi, sono stati evidenziati alcuni problemi, legati alle caratteristiche proprie delle SMA:

- le caratteristiche dinamiche di una struttura con SMA sono influenzate in modo significativo dalla distribuzione di temperatura, dal momento che le fibre di SMA sono attivate tramite variazioni della temperatura stessa (Ro and Baz 1995a)
- la velocità dei cambiamenti di frequenza indotti dalle SMA è bassa (meno di 2Hz), proprio perchè la modifica delle proprietà delle SMA richiede variazioni di temperatura. Pertanto, i compositi con SMA non sono adatti per controllare vibrazioni ad alta frequenza, mentre possono essere usati per vibrazioni a bassa frequenza e per il controllo di risposte quasi-statiche (Liang and Rogers 1991)
- l'uso dello smorzamento viscoelastico per tali applicazioni passive crea problemi legati al fatto che lo smorzamento può essere ottimizzato solo in intervalli particolari di temperatura e di frequenza e, inoltre, una volta completato il progetto, il sistema non può più essere modificato (Liang and Rogers 1990)

Modellazione e sperimentazione

Si è detto come il comportamento dei compositi con SMA sia sensibilmente influenzato dalla temperatura. Per questo si ritiene utile, prima di passare ai diversi modelli proposti in letteratura per lo studio delle caratteristiche modali dei compositi, ricordare i modelli maggiormente utilizzati per lo studio della distribuzione della temperatura nei compositi in SMA.

Ro and Baz (1995a) hanno proposto un modello a elementi finiti per descrivere la distribuzione della temperatura all'interno di una piastra rinforzata con fibre di SMA, in seguito all'attivazione e disattivazione delle fibre. Tale distribuzione di temperatura deriva dal riscaldamento delle fibre, tramite passaggio di una corrente elettrica. Essendo lo spessore della piastra piccolo rispetto alle altre dimensioni, la distribuzione della temperatura lungo lo spessore è stata assunta uniforme e pertanto l'unica variazione di temperatura considerata è quella lungo la superficie della piastra. Le predizioni sono state poi confrontate con risultati sperimentali (Ro and Baz 1995a), ottenendo andamenti della temperatura molto simili a quelli previsti. Ovviamente la strategia di attivazione delle fibre, così come il numero delle fibre stesse, è risultata avere una grande influenza sulla distribuzione della temperatura.

Un modello termico per compositi con SMA è stato proposto anche da Chen and Levy (1999). Per semplificare la trattazione del problema, gli autori hanno considerato il flusso di calore soltanto in direzione verticale, assumendo che la conduzione del calore in direzione longitudinale avvenga molto più velocemente che in direzione verticale e possa pertanto essere ritenuta uniforme.

Ro e Baz (1994) hanno proposto un modello a elementi finiti per lo studio delle caratteristiche modali di una piastra rinforzata con fibre di Nitinol, inserite dentro guaine di gomma, posizionate in corrispondenza dell'asse neutro della piastra. Le guaine consentono alle fibre di muoversi liberamente durante la trasformazione di fase, in modo tale da evitare fenomeni di degradazione o distruzione dell'effetto a memoria di forma che possono avvenire quando le fibre siano completamente vincolate nella matrice.

I risultati ottenuti con questo modello sono stati confrontati con quelli disponibili in letteratura, ottenendo così una prova dell'efficacia del metodo.

Esperimenti sono stati eseguiti dagli autori stessi, per confrontare le caratteristiche modali di piastre con e senza fibre di Nitinol.

La piastra è stata sottoposta a una vibrazione random e la sua risposta a tale eccitazione è stata monitorata da un accelerometro, il cui segnale è stato inviato a un analizzatore FFT per determinarne il contenuto in frequenza e l'ampiezza di vibrazione.

I risultati hanno mostrato che, in assenza di forze di pretensione nelle fibre, l'ampiezza delle vibrazioni decresce, per quanto riguarda i primi quattro modi di vibrare, del 12.9%, -4.69%, 43.76% e 21.46% quando metà delle fibre sono attivate e del 30.02%, 13.93%, 50.47% e 18.7% quando tutte sono attivate, rispetto al caso in cui tutte le fibre sono inattivate.

Venkatesh et al. (1992) hanno condotto studi teorici e sperimentali su una matrice di resina epossidica rinforzata con una percentuale di fibre di Ni-Ti pari al 7%. Un confronto dei risultati ottenuti dal modello a elementi finiti con quelli ottenuti dagli esperimenti ha mostrato una sovrastima della frequenza fondamentale pari soltanto al 2%, sia prima che dopo la transizione di fase.

Altri studi hanno mostrato che, con una percentuale volumetrica di fibre del 15%, la prima frequenza naturale di una trave con SMA può essere aumentata da 21 Hz a temperatura ambiente, fino a 62 Hz alla temperatura di circa 149 °C (Rogers et al. 1991).

Chen and Levy (1999) hanno condotto studi su una trave flessibile costituita da vari strati, tra cui uno di SMA e uno di materiale viscoelastico con un'alta capacità di smorzamento, per analizzare l'influenza della temperatura sulla frequenza.

Nel modello utilizzato, gli autori hanno ipotizzato che la deformazione della trave fosse piccola e uniforme in tutte le sezioni, che la trave fosse isotropa, che gli effetti d'inerzia longitudinale e rotazionale fossero trascurabili, che lo strato di SMA fosse molto sottile e che non ci fossero spostamenti relativi tra i vari strati. Sulla base di queste ipotesi e utilizzando il modello termico citato sopra, gli autori hanno eseguito varie analisi, ottenendo che, se la temperatura è compresa tra A_s e A_f , un aumento della temperatura stessa provoca un aumento del fattore di frequenza del sistema; al di fuori di questo intervallo di temperatura, invece, avviene il contrario. Inoltre, un aumento del modulo elastico tangenziale dello strato viscoelastico fa aumentare il fattore di frequenza del sistema. Dopo aver verificato che la temperatura influisce su tutti i parametri significativi del si-

34

stema, gli autori ne hanno valutato l'effetto sul controllo del sistema stesso, ottenendo che bisogna cambiare continuamente la temperatura, per minimizzare il tempo di vibrazione del sistema.

E stato osservato che il controllo di una trave snella richiede più tempo di quello di una trave spessa o corta e che un'applicazione combinata di controllo passivo (tramite lo strato di materiale viscoelastico) e attivo (tramite lo strato di SMA) riduce in modo significativo il tempo di vibrazione, rispetto al caso di solo controllo passivo.

Ostachowicz et al. (1999) hanno considerato una piastra costituita da vari strati di grafite epossidica, semplicemente appoggiata, con fibre di Nitinol disposte in corrispondenza dell' asse neutro, con una percentuale volumetrica di fibre in ogni strato pari a 0.2%. Le fibre di Nitinol occupavano solo il 5% della sezione trasversale della piastra. La piastra è stata modellata utilizzando elementi finiti di tipo piastra, con 8 nodi e 5

gradi di libertà per nodo. Tutte le proprietà del sistema (eccetto densità, angolo delle fibre di grafite e coefficiente di espansione termica) sono state assunte come funzioni della temperatura. Soltanto una distribuzione uniforme di temperatura è stata presa in considerazione. I risultati hanno mostrato come una percentuale anche solo del 5% di fibre sia sufficiente a generare forze interne in grado di influenzare significativamente le frequenze naturali.

Hurlbut and Regelbrugge (1996) propongono l'utilizzo di una molla a lamina, costituita da lamine di SMA, come isolatore passivo di vibrazioni, progettato per sfruttare la geminazione isteretica martensitica indotta dallo sforzo per dissipare energia.

L'isolamento è inteso per eccitazioni di ampiezza relativamente grande e frequenza bassa. A differenza della maggior parte degli studi sulle strutture attive con SMA, questo si concentra su elementi di SMA che non sono attivati termicamente su scale di tempo associate alle frequenze di vibrazione; in questo caso, infatti, le caratteristiche della SMA sono modificate lentamente tramite l'applicazione di calore e pretensione, in modo tale da adattarsi ai cambiamenti di vibrazione che avvengono su scale di tempi molto maggiori.

Alcune difficoltà connesse col progetto di questa molla consistono nell'estrema nonlinearità del sistema e nella notevole sensibilità termica della SMA.

Il modello costitutivo utilizzato in questo studio per la SMA è quello proposto da Graesser and Cozzarelli (1994).

Il carico è considerato quasi-statico; sono considerati entrambi gli effetti nonlineari, quello legato al materiale e quello legato alla geometria.

Dalle analisi, si vede che lo spessore della lamina di SMA influenza il comportamento della molla: una riduzione dello spessore da 0.2 a 0.1 mm fa decrescere la rigidezza iniziale della molla di circa due terzi; l'energia dissipata sotto carichi ciclici è ridotta della stessa quantità.

Epps and Chandra (1997) descrivono il comportamento di due travi composite di grafite epossidica, con guaine costituite da tubi di silice fusa, all'interno delle quali, in un primo momento, vengono inseriti dei fili di ferro. In seguito, al posto di questi fili di ferro, vengono inseriti fili di SMA, precedentemente deformati.

La trave e le SMA sono separatamente incastrate a entrambe le estremità e i fili di SMA

sono attuati tramite riscaldamento per mezzo di una resistenza elettrica. Nei fili si sviluppa una grande forza di trazione, a causa della trasformazione di fase e dei vincoli meccanici assicurati dagli incastri. L'influenza di questa trazione sul comportamento modale della struttura è stata studiata tramite tests vibrazionali.

Da un punto di vista analitico, la trave è stata modellata come trave su suolo elastico, calcolando la costante elastica del terreno in funzione della rigidezza assiale della trave. Lo smorzamento della trave e quello della SMA sono stati trascurati.

È stata ottenuta una buona correlazione (con differenze entro il 5%) tra i risultati sperimentali e quelli analitici.

Lo studio numerico suggerisce che, inserendo 25 fili di SMA del diametro di circa 0.5 mm in una trave lunga 762 mm, larga 25.4 mm e spessa 1.6 mm, la prima frequenza naturale del sistema aumenta del 276%.

2.5.3 Precompressione di strutture in c.a.

Si è accennato in precedenza alla possibilità di sfruttare l'effetto a memoria di forma nelle due direzioni per la realizzazione di compositi intelligenti. In tal caso, il materiale che ne risulta può deformarsi in due direzioni opposte, in seguito a cambiamenti di temperatura. Sfruttando questo principio, è possibile applicare e rimuovere sforzi su una struttura, ottenendo, per esempio, un ponte intelligente, dove l'entità della precompressione possa essere variata a seconda della necessità.

Più in generale, vari studi sono stati condotti per sfruttare le caratteristiche uniche dei compositi con SMA per la precompressione di strutture in cemento armato.

Modellazione e sperimentazione

Maji and Negret (1998) hanno proposto un modello in cui alcuni trefoli, realizzati con fili di Ni-Ti, sono stati allungati oltre il limite in corrispondenza del quale inizia la trasformazione e successivamente inseriti in travi di calcestruzzo. In seguito a riscaldamento elettrico, si ha una trasformazione di fase da martensite a austenite e il materiale è sottoposto a notevoli deformazioni di ritiro. Questa energia di deformazione può essere utilizzata per generare una notevole forza di precompressione nel calcestruzzo. Una tale struttura potrebbe adattarsi in modo attivo a carichi non previsti in fase di progetto o compensare le perdite di precompressione che avvengono nel tempo.

L'esecuzione di tests ha messo in evidenza che, quando la corrente viene applicata, in un primo momento l'espansione termica dei trefoli precede la loro trasformazione di fase; quindi, all'inizio l'inflessione è verso il basso. Una volta iniziata la trasformazione di fase, la trave comincia a incurvarsi, raggiungendo una deformazione stabile dopo 8 minuti; a questa situazione si accompagna una rottura diffusa della trave in prossimità dei supporti. Le rotture che si verificano sono quelle che si hanno tipicamente in prossimità dei vincoli nelle travi in cemento armato e si estendono parallelamente ai trefoli di Nitinol.

I tests hanno dimostrato quindi l'abilità dei fili di SMA nel trasferire sforzi alla trave di

calcestruzzo; l'entità di questi sforzi è ben al di sopra del limite di snervamento della SMA ed è ben superiore a quanto necessario per rompere la trave.

2.5.4 Utilizzo come attuatori

Nel capitolo relativo alle SMA, si sono messi in evidenza i vantaggi e i problemi derivanti dall'uso delle SMA come attuatori, rispetto ad altri materiali. Questi possono essere estesi anche al caso dei compositi rinforzati con SMA.

Le applicazioni potenziali dei compositi con SMA utilizzati come attuatori comprendono, oltre a quelle già citate a proposito delle SMA, il controllo attivo della forma di riflettori di antenne spaziali, la riduzione delle vibrazioni di aerei, tramite controllo attivo dei flaps, la realizzazione di sistemi antighiaccio attivi per aerei e molte altre.

Per fare un esempio più preciso: a causa di effetti sfavorevoli, come per esempio distorsioni termiche, la forma di un'antenna spaziale può allontanarsi dalla configurazione desiderata. Per correggere questo errore, una corrente calcolata viene fatta passare attraverso un filo di SMA selezionato, per assicurare che la forma ritorni quella ideale.

Modellazione e sperimentazione

La possibilità di modificare la forma di una struttura flessibile tramite l'attivazione di attuatori realizzati con SMA e disposti all'interno della struttura è stata presa in considerazione, tra gli altri, da de Blonk and Lagoudas (1998).

Gli autori hanno considerato il caso di una barra di silicone elastomerico, con fili di SMA inseriti in posizioni eccentriche rispetto all'asse.

In questo caso, la contrazione di un filo genera forze distribuite che agiscono sulla barra. Dal momento che gli attuatori sono in posizione eccentrica rispetto all'asse, viene generato anche un momento, che determina la flessione della barra.

L'utilizzo di due attuatori, in posizioni opposte rispetto all'asse, consente di attivare la barra in due direzioni opposte.

La deformazione elastica di un attuatore che sfrutta l'effetto a memoria di forma consente di agire sulla struttura con una forza relativamente grande; la struttura deve però provvedere a deformare di nuovo la SMA dopo il raffreddamento, affinchè l'attuatore possa funzionare per più di un ciclo. Questo può essere ottenuto inducendo nella struttura l'effetto a memoria di forma nelle due direzioni.

Gli esperimenti condotti dagli autori hanno mostrato che la curvatura della barra con i due attuatori aumenta e diminuisce oscillando intorno a un punto di equilibrio, ma una volta attuata, la barra non raggiunge mai la posizione di curvatura nulla. Perchè tale posizione possa essere raggiunta, gli attuatori devono essere addestrati in modo tale da sviluppare l'effetto nelle due direzioni.

Nel modello teorico sviluppato dagli autori per la barra flessibile, l'assunzione di base è la conservazione delle sezioni piane, dopo la deformazione. Se si eccettuano le estremità della barra, la forza di attuazione è considerata uniformemente distribuita lungo la barra, ad una distanza costante dall'asse, in modo tale che il momento possa essere considerato costante in assenza di altre forze.

Il tempo richiesto per raggiungere la massima inflessione dipende dall'entità della corrente applicata al filo e il tempo di rilassamento è funzione della conduttività della barra.

I risultati ottenuti dal modello sono stati confrontati con risultati sperimentali; un confronto tra le massime inflessoni ottenute nei due casi (dell'ordine di 0.04 volte la lunghezza della barra) ha messo in evidenza un errore inferiore al 5%.

Per verificarne la resistenza alla fatica, ogni filo di SMA con effetto nelle due direzioni è stato sottoposto a centinaia di cicli: non è stata osservata alcuna degradazione nella performance.

Song et al. (2000) hanno dimostrato la fattibilità dell'utilizzo di attuatori con SMA per il controllo della posizione di una trave, in cui gli attuatori sono inseriti, sotto forma di fili, soltanto da un lato della trave stessa.

La scelta dei materiali a memoria di forma è dovuta in questo caso alla loro resistenza ad elevate deformazioni (fino al 6%) e all'elevato sforzo che può essere recuperato (> 500 MPa). Tuttavia i fili di SMA presentano un comportamento altamente nonlineare e questo ne rende difficile il progetto. Pertanto è stato progettato e implementato un dispositivo di controllo per consentire un controllo attivo della posizione della trave.

Durante la fase sperimentale, la trave, incastrata a una estremità, è libera di muoversi all'altra, una volta che i fili siano alimentati da una corrente. Lo spostamento dell'estremità libera è monitorato per mezzo di un sensore analogico a laser.

Un attuatore per grandi flessioni, composto da una trave flessibile, un tubo elastico sottile e un filo di Ni-Ti è stato proposto da Wang and Shahinpoor (1997).

Il filo di SMA è inserito in posizione eccentrica rispetto all'asse della trave e connesso alla trave solo alle estremità. Il tubo elastico ha la funzione di tenere il filo di SMA vicino alla trave.

Questa configurazione consente di ottenere grandi flessioni della trave, con piccole deformazioni del filo (una variazione di deformazione del 3% nel filo produce una rotazione angolare di 172° nella trave).

L'autore ha formulato un modello matematico dell'attuatore, che tenga conto della forte nonlinearità del sistema; le equazioni che governano il comportamento della trave sono pertanto equazioni differenziali nonlineari. Nella formulazione matematica sono state fatte alcune assunzioni: le deformazioni a taglio, a torsione e la deformazione assiale della trave sono trascurabili; la direzione del carico distribuito tra il filo di SMA e il tubo di plastica è normale al filo e la direzione del carico distribuito tra la trave e il tubo di plastica è normale alla trave; i carichi appena citati sono uniformemente distribuiti, se si eccettuano i cambi di direzione; infine, la geometria dell'attuatore può essere approssimata con un arco, allo scopo di derivare la relazione tra il carico concentrato e quello distribuito.

Dal momento che non è possibile trovare una soluzione in forma chiusa delle equazioni differenziali nonlineari che governano il problema, l'autore ha seguito un approccio numerico, basato su un metodo a elementi finiti, per predire il comportamento quasi-statico dell'attuatore.

Ha quindi condotto esperimenti su un prototipo della trave in questione, esperimenti che hanno fornito una deformata dell'attuatore molto simile a quella prevista.

Un problema che va considerato per questo tipo di attuatore è quello dell'instabilità per

carico di punta: la trave flessibile è infatti soggetta a carichi di compressione da parte del filo di SMA. Grazie all'uso del tubo di plastica, però, il filo di SMA è vincolato da un lato della trave quando l'attuatore si inflette; pertanto l'attuatore può soltanto deformarsi in una direzione e quindi nessun' altra forma di deformazione è ammessa.

2.5.5 Resistenza all'impatto

Mentre i metalli possono generalmente deformarsi in modo plastico, così da dissipare l'energia in eccesso (dovuta per esempio a un impatto), molti altri materiali, tra cui i laminati costituiti da strati di grafite o carbonio, non hanno un meccanismo che consenta loro di dissipare energia oltre il loro limite di snervamento (Cantwell and Morton 1991); pertanto, in tali materiali, l'eccessiva energia di impatto danneggia la matrice.

Le SMA hanno una capacità intrinseca di dissipare energia di deformazione, dell'ordine di quattro volte quella dell'acciaio e di sedici volte quella di molti compositi in grafite epossidica, attraverso le trasformazioni martensitiche indotte dallo sforzo. Questa caratteristica unica può essere utilizzata per controllare attivamente la propagazione di fratture o, più in generale, i meccanismi di danneggiamento indotti da un impatto.

Impatti a bassa velocità

Recentemente sono stati condotti vari studi per investigare la risposta di compositi con SMA sottoposti a impatti a bassa velocità (Paine and Rogers 1994c; Birman et al. 1997). Alcuni dei possibili meccanismi di danneggiamento indotti da tali impatti su strutture composite sono delaminazione, indentazione e penetrazione. Si tratta di meccanismi molto pericolosi per i compositi e che, pertanto, bisogna cercare di evitare.

Modellazione e sperimentazione Paine and Rogers (1994c) hanno analizzato il caso di una matrice di grafite-bismaleimide, con inserite fibre di Nitinol di 0.3 millimetri di diametro. La percentuale volumetrica di fibre è circa del 2.8%. Questo campione è stato sottoposto a impatti a bassa velocità, con un'energia di impatto di entità compresa tra 2.4 J e 23 J.

Gli elevati sforzi localizzati dovuti all'impatto generano una trasformazione di fase nelle fibre di SMA, che quindi dissipano l'energia di deformazione dovuta all'impatto, riducendo i danni subiti dal materiale ospite.

È stato trovato che, per esempio, il meccanismo di delaminazione può essere ridotto del 25%, rispetto al caso della matrice senza fibre.

Birman et al. (1997) hanno condotto uno studio volto a dimostare che l'utilizzo di fibre di SMA inserite, dentro guaine di resina, in una piastra può essere un mezzo efficace per ridurre le deformazioni dovute a impatti a bassa velocità e controllare quindi i danni. Gli stessi autori in precedenza (1995) avevano studiato materiali compositi in cui le fibre di SMA erano vincolate nella matrice. L'imposizione di tale vincolo tuttavia può causare una degradazione dell'effetto a memoria di forma. Questo motivò l'utilizzo in seguito di un modello in cui le fibre sono inserite in guaine di gomma. In questo caso, le fibre possono essere vincolate alla matrice con incastri posti alle estremità delle fibre stesse. Un importante problema considerato dagli autori riguarda le elevate temperature necessarie per innescare la trasformazione di fase inversa della SMA. Un'elevata temperatura produce sforzi di compressione termici nella struttura e, nel caso di materiali polimerici, anche un incremento modesto della temperatura può causare una notevole degradazione delle proprietà meccaniche. Fortunatamente, la temperatura di trasformazione del Nitinol è influenzata in modo significativo da piccole variazioni del contenuto relativo in nichel e titanio; questo consente di raggiungere una temperatura di trasformazione che non influenzi la struttura in nessun altro modo.

Il modello considerato dagli autori consiste in una matrice di grafite epossidica, con un unico strato di fibre di SMA, in corrispondenza del piano medio del pannello.

Nonostante la posizione dell'impatto nel piano del pannello sia arbitraria, gli autori hanno considerato la posizione più svantaggiosa dal punto di vista delle deformazioni e degli sforzi globali, che è risultata essere il centro del pannello.

Le equazioni utilizzate per le piastre sono quelle caratteristiche delle piastre ortotrope.

È stato osservato che, anche con una spaziatura delle fibre di 2 mm, è possibile ridurre le deformazioni delle piastre di circa un terzo, rispetto al caso senza fibre di SMA. La riduzione delle deformazioni è significativamente maggiore della riduzione degli sforzi principali; quest'ultima risulta più significativa nelle piastre sottili, nonostante queste siano soggette a sforzi maggiori.

Impatti ad alta velocità

Generalmente per impatti ad alta velocità si intendono eventi come la collisione di un uccello con un aeroplano (con velocità dell'ordine di 30-240 m/s) o impatti balistici, come quello di un proiettile (con velocità maggiori di 240 m/s) (Ellis et al. 1997).

Impatti che avvengono a tali velocità sono caratterizzati da risposte molto più localizzate rispetto al caso di impatti a bassa velocità e, pertanto, forniscono risultati diversi.

Modellazione Paine and Rogers (1994c) hanno condotto studi su un composito con uno strato di SMA, sottoposto a un impatto alla velocità di 152.4 m/s. Gli autori hanno osservato che, nel caso di matrice in grafite epossidica, l'inserimento dello strato di SMA aumenta la resistenza alla perforazione del 100%, mentre, nel caso di matrice di vetro epossidico, la resistenza aumenta del 67%.

Altri studi hanno analizzato la risposta di compositi polimerici con SMA a impatti balistici. È stato osservato un aumento piuttosto contenuto della capacità di assorbimento energetico all'aumentare della percentuale volumetrica di fibre; questo probabilmente è dovuto al fatto che le capacità in tal senso delle SMA non sono sfruttate appieno a velocità balistiche, a causa della eccessiva velocità di applicazione del carico e della differenza di deformazione tra le fibre di SMA, rigide, e la resina epossidica, fragile (Ellis et al. 1997).

2.5.6 Applicazioni biomediche

Uno dei campi di applicazione più studiati per quanto riguarda i compositi con SMA è l'ingegneria biomedica. Varie applicazioni mediche tipiche delle SMA (e descritte nel capitolo precedente) sono estendibili al caso dei compositi. Si descriverà qui in dettaglio l'applicazione di tali materiali alla realizzazione di muscoli artificiali, che è sembrata particolarmente interessante.

Negli ultimi anni, grandi progressi sono stati fatti nel campo dei muscoli artificiali e dei tessuti biologici.

Fino a poco tempo fa, la ricerca si era concentrata su muscoli artificiali elettrochimici, realizzati tramite sostanze gelatinose, attivate per mezzo di campi elettrici. Sono stati però osservati alcuni problemi ricorrenti:

- i tempi di risposta di tali muscoli elettrochimici sono piuttosto lenti
- spesso i materiali chimici utilizzati non sono biologicamente compatibili

L'utilizzo di fibre di SMA, inserite in una matrice, consente di ovviare, almeno in parte, a questi problemi. Infatti, poichè le SMA sono facilmente attuabili e forniscono risposte in tempi al di sotto dei 200 ms (Barrett and Gross 1996), i compositi rinforzati con fibre di SMA sono adatti per la realizzazione di muscoli artificiali.

Tuttavia, vari problemi devono ancora essere risolti prima del loro effettivo utilizzo, tra cui:

- le forze necessarie per attuare la SMA sono talmente elevate da rischiare di snervare i tessuti biologici
- le alte temperature in gioco possono cauterizzare localmente i tessuti.

Poichè molti tipi di muscoli sono sottoposti a milioni di cicli in un anno, il materiale dev'essere realizzato in modo tale che non ci sia assolutamente degrado per fatica.

Modellazione

Barrett and Gross (1996) hanno proposto un composito costituito da una matrice di silicone, rinforzata con fibre di SMA.

La matrice è stata realizzata in silicone, perchè questo materiale risulta adatto al range di temperatura richiesto (circa tra 38 e 149 °C) e inoltre è un materiale poco sensibile alla temperatura e di bassa rigidezza.

Per far in modo che il composito non presentasse degrado per fatica, nello studio in questione, le fibre di SMA sono state sottoposte a una deformazione iniziale inferiore all'1%. Purtroppo, questo basso livello di deformazione non sfrutta appieno le capacità delle SMA, ma in compenso la resistenza a fatica è elevata. Inoltre, questo basso livello semplifica notevolmente l'analisi, dal momento che le fibre si mantengono nel campo elastico.

Il modello utilizzato si basa sull'ipotesi che i momenti nella matrice di silicone e nelle fibre coincidano in ogni punto e che la curvatura si mantenga costante da sezione a sezione. La rigidezza del silicone è stata descritta tramite una relazione del second'ordine.

I risultati predetti da tale modello sono stati poi confrontati con risultati sperimentali, ottenendo valori fino al 15% più alti di quelli reali. Tuttavia, nonostante questa evidente inaccuratezza, grazie alla notevole semplicità e facilità d'uso del metodo, esso può ancora essere usato per ottenere una stima di massima ragionevole del comportamento.

Capitolo 3

Equazioni di campo del problema termo-elettro-meccanico

In questo lavoro si è preso in considerazione il problema di un materiale composito, rinforzato con elementi in SMA; in particolare, si è studiata la risposta del composito alla variazione di temperatura indotta dal passaggio di corrente elettrica. Questo problema coinvolge incognite di tipo meccanico (gli spostamenti cui l'elemento è soggetto), termico (la temperatura) ed elettrico (la differenza di potenziale che consente alla corrente di circolare).

Per questo motivo, si ritiene necessario ricordare brevemente le equazioni che governano ciascuno dei campi di interesse e quelle che regolano le interazioni tra i campi stessi, facendo riferimento a testi classici (Lemaitre and Chaboche 1990; Silvestrini 1995; Dell'Acqua 1992; Rodonò and Volpes 1995; Sacco 1997).

3.1 Campo meccanico

In questa prima fase del lavoro ci si è limitati a considerare il caso di piccoli gradienti di spostamento; la rimozione di tale ipotesi sarà oggetto di studi futuri.

Equazioni di equilibrio

Se si considera un corpo continuo isolato \mathcal{D} , di frontiera $\partial \mathcal{D}$, esso risulta *in equilibrio* qualora siano nulle le risultanti delle forze e dei momenti agenti sul corpo. Ovvero, per una qualsiasi parte P appartenente al corpo, dev'essere:

$$\vec{R}(P) = \vec{0} \tag{3.1}$$

$$\vec{M}(P) = \vec{0} \tag{3.2}$$

In forma integrale, queste due equazioni si esprimono come:

$$\int_{P} \vec{f} \, dV + \int_{\partial P} \vec{t}_n \, dS = 0 \tag{3.3}$$

$$\int_{P} \vec{r} \times \vec{f} \, dV + \int_{\partial P} \vec{r} \times \vec{t}_n \, dS = 0 \tag{3.4}$$

dove: $\vec{f} \in \vec{t_n}$ rappresentano rispettivamente la densità volumetrica di forze e la tensione agenti su P, \vec{r} è il vettore posizione dei punti di P, rispetto a un sistema di riferimento fissato e × indica il prodotto vettoriale. Applicando il teorema di Cauchy, secondo cui $\vec{t_n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$ e quindi il teorema della divergenza, la prima di queste equazioni si riduce alla ben nota equazione di equilibrio per il continuo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0 \qquad in \mathcal{D} \tag{3.5}$$

mentre la seconda esprime la simmetria del tensore degli sforzi $\sigma,$ che si può scrivere come:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \qquad in \, \mathcal{D} \tag{3.6}$$

Sulla frontiera, deve valere:

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \qquad su \,\partial \mathcal{D}_f \tag{3.7}$$

Equazioni di congruenza

Oltre alle equazioni di equilibrio, lo studio di un continuo richiede la caratterizzazione dello stato corrente di deformazione, rispetto a una configurazione di riferimento, che può essere, per esempio, la configurazione iniziale. È quindi necessario introdurre il vettore spostamento \vec{u} e il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ (per deformazioni infinitesime), che sono legati dalla:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \vec{\nabla^s} \vec{u} \tag{3.8}$$

ovvero:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left[\, \vec{\nabla} \, \vec{u} + (\vec{\nabla} \, \vec{u})^T \, \right] \tag{3.9}$$

Le condizioni al contorno possono essere espresse come:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \qquad su \qquad \partial \mathcal{D}_s \tag{3.10}$$

Equazioni di legame

Appare a questo punto necessario determinare le relazioni che permettono di tener conto dell'effettivo comportamento del materiale che costituisce il corpo considerato; serve quindi una equazione di legame, o legge costitutiva: un modello matematico che descriva il comportamento meccanico del materiale, in termini di legame tra sforzi e deformazioni. Esistono molti tipi di legame, a seconda del materiale che si considera. Nel presente lavoro, sono stati considerati il legame elastico lineare, quello elasto-perfettamente plastico e il legame costitutivo delle SMA.

Legame elastico lineare Tutti i materiali solidi possiedono una zona nello spazio degli sforzi in cui una variazione di carico produce soltanto deformazioni elastiche.

Tali deformazioni elastiche consistono in movimenti reversibili di atomi, molecole o celle, corrispondenti a deformazioni non superiori a valori dell'ordine di $(0.2-0.5) \ge 10^{-2}$ per metalli, compositi, cemento e legno. Questo giustifica del resto l'ipotesi di piccole deformazioni per il caso elastico. La dissipazione è nulla.

Il limite del campo elastico in ciascun materiale dipende dalla temperatura e dalla storia di carico cui è stato sottoposto. La relazione

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{\epsilon}^e \tag{3.11}$$

è la legge di Hooke per un continuo lineare ed elastico, dove **a** è un tensore simmetrico del quarto ordine, le cui componenti, nel caso di materiale isotropo, dipendono solo dal modulo elastico E e dal modulo di Poisson ν ; nel caso di materiale anisotropo, invece, questo tensore ha 21 componenti indipendenti.

L'equazione 3.11 può essere invertita, introducendo il tensore A delle flessibilità:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.12}$$

I tensori delle deformazioni e degli sforzi vengono abitualmente scomposti nella somma di una parte volumetrica e una parte deviatorica:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\,\boldsymbol{\theta}\mathbf{I} \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \mathbf{p}\mathbf{I} \tag{3.14}$$

con:

$$\theta = tr(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{I} \tag{3.15}$$

$$p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{I}$$
(3.16)

dove \mathbf{I} è il tensore identità del second'ordine.

Legame elasto-perfettamente plastico Un materiale si definisce inelastico quando la deformazione non è più funzione soltanto dello sforzo, ma anche di altre quantità, chiamate, in generale, variabili interne, ξ .

Tra i vari comportamenti inelastici, si è considerata la plasticità, nella quale le deformazioni inelastiche, dette plastiche (ϵ^p), costituiscono la variabile interna del problema.

Limitandosi al caso di piccole deformazioni, la deformazione totale può essere scomposta in due parti, quella elastica, reversibile, e quella plastica, irreversibile:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \tag{3.17}$$

In modo analogo, anche le leggi costitutive relative ai due termini di ϵ possono essere disaccoppiate.

Si hanno deformazioni plastiche soltanto quando viene superato il limite elastico del materiale (σ_y). Nel caso pluriassiale, è necessario identificare una superficie limite, definita come la condizione di sforzo al di sopra della quale nascono deformazioni irreversibili.

Le varie teorie si differenziano per la definizione di tale superficie limite o superficie di snervamento e per la scelta delle variabili interne.

In questo lavoro ci si è limitati a considerare il caso elasto-perfettamente plastico, cioè il caso in cui la funzione di snervamento F sia costante: l'incrudimento del materiale è nullo e lo sforzo non aumenta oltre il valore corrispondente allo snervamento.

Per quanto riguarda la superficie limite, si è utilizzata una teoria della plasticità basata sull'ipotesi che la funzione di snervamento dipenda soltanto dalla norma della parte deviatorica dello sforzo (s), cioè da:

$$\|\boldsymbol{s}\| = \sqrt{2J_2} \tag{3.18}$$

dove J_2 é l'invariante secondo del tensore deviatorico degli sforzi, definito come:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \tag{3.19}$$

La funzione di snervamento F può quindi essere scritta come:

$$F = \|\boldsymbol{s}\| - \sigma_y \tag{3.20}$$

La natura irreversibile delle deformazioni plastiche esige che, almeno per la parte che le coinvolge, il legame costitutivo dipenda dalla storia di carico e sia quindi formulato in termini incrementali. La deformazione plastica dipende soltanto dalla parte deviatorica della deformazione (e), ovvero si ha che:

$$\theta^p = 0$$
 , $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\mathbf{e}}^p$ (3.21)

e quindi:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{el}} = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathrm{p}} \tag{3.22}$$

$$\theta^{el} = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{I} \tag{3.23}$$

Le equazioni di legame, relative alla parte elastica, possono quindi essere scritte come:

$$p = K_M \theta^{el} \tag{3.24}$$

$$s = 2G \left(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{p}} \right) \tag{3.25}$$

dove K_M è il modulo di elasticità volumetrica e G è il modulo di elasticità tangenziale. L'equazione di legame relativa alla parte plastica si può invece scrivere come:

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma} \, \boldsymbol{n} \tag{3.26}$$

dove: $\dot{\gamma}$ è uno scalare che gode della proprietà:

$$\dot{\gamma} \ge 0 \qquad per \qquad F \le 0 \qquad e \qquad \dot{\gamma}F = 0 \tag{3.27}$$

e
n è un tensore del second'ordine, definito come

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \tag{3.28}$$

Legame usato per le SMA Per esprimere il legame costitutivo delle SMA, si è fatto riferimento al modello proposto da Souza et al. (1998) e modificato da Auricchio and Petrini (2001). Gli autori hanno utilizzato come variabile interna il tensore del second'ordine e^{tr} , che è la *deformazione associata alla trasformazione;* questo tensore, caratterizzato da traccia nulla, è una misura della deformazione associata alla trasformazione associata alla trasformazione e, in particolare, al passaggio da austenite o martensite multi-variante, a martensite mono-variante. Le equazioni di legame sono quindi scritte come:

$$p = K_M \theta^{el} \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{s} = 2G\left(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathrm{tr}}\right) \tag{3.30}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \tag{3.31}$$

dove X è lo sforzo di trasformazione o sforzo relativo. Il tensore α è definito come:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\tau_M(T) + h \| \mathbf{e}^{\mathrm{tr}} \| + \gamma] \frac{\mathbf{e}^{\mathrm{tr}}}{\| \mathbf{e}^{\mathrm{tr}} \|}$$
(3.32)

dove: $\tau_M(T)$ è una funzione positiva e monotona crescente della temperatura, h è un parametro relativo all'incrudimento del materiale durante la trasformazione e γ è un parametro, definito come:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \quad se \quad 0 \le \|\mathbf{e}^{\mathrm{tr}}\| < \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{L}} \\ \gamma \ge 0 \quad se \quad \|\mathbf{e}^{\mathrm{tr}}\| = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{L}} \end{cases}$$

con ϵ_L valore massimo della norma di e^{tr} , raggiunto nel caso in cui il materiale sia interamente trasformato in martensite mono-variante.

Le equazioni evolutive per la variabile interna e^{tr} si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathrm{tr}} &= \zeta \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \\ F(\mathbf{X}) &= \|\mathbf{X}\| - \mathbf{R} \le 0 \\ \dot{\zeta} &\ge 0 \\ \dot{\zeta}F(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned}$$

dove:

- ζ è il parametro di consistenza o scorrimento inelastico
- R è il raggio del campo elastico
- la prima equazione è la legge di scorrimento
- la seconda definisce la funzione limite F in termini dello sforzo relativo \mathbf{X}
- la terza e la quarta sono le classiche condizioni di Kuhn-Tucker, che riducono il problema a un problema di ottimizzazione vincolata.

Le curve caratteristiche del modello, relative rispettivamente al comportamento a memoria di forma e a quello superelastico, sono mostrate nelle figure 3.1 e 3.2.



Figura 3.1: Effetto a memoria di forma



Figura 3.2: Effetto superelastico

3.2 Campo termico

3.2.1 Cenni di termodinamica

Il calore viene definito in termodinamica come quella forma di energia che si propaga, attraverso i confini di un sistema, a causa di una differenza di temperatura (Pisoni 1996). Il carattere energetico del calore viene stabilito dal primo principio della termodinamica, mentre il senso della sua spontanea propagazione nella direzione delle temperature decrescenti è determinato dal secondo principio della termodinamica.

Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non è altro che un'espressione della legge di conservazione dell'energia.

Si consideri un corpo continuo \mathcal{D} , di frontiera ∂D . Siano E la sua energia interna, e l'energia interna specifica e ρ la densità di massa:

$$E = \int_{\mathcal{D}} \rho \, e \, dV \tag{3.33}$$

Sia K la sua energia cinetica, definita come:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \, \vec{v} \cdot \vec{v} \, dV \tag{3.34}$$

Sia Q la variazione di calore entrante nel corpo \mathcal{D} ; Q è composto di due termini, il calore generato all'interno del volume da agenti esterni e il calore scambiato dal corpo per conduzione attraverso la frontiera ∂D :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r \, dV - \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \tag{3.35}$$

Sia infine $P_{(x)}$ la potenza delle forze esterne:

$$P_{(x)} = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{v} \, dS \tag{3.36}$$

Il primo principio della termodinamica stabilisce che:

$$(d/dt)(E+K) = P_{(x)} + Q \qquad \forall \mathcal{D}$$
(3.37)

ovvero:

$$(d/dt)\int_{\mathcal{D}}\rho(e+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\,dV = \int_{\mathcal{D}}(\vec{f}\cdot\vec{v}+r)\,dV + \int_{\partial\mathcal{D}}(\vec{T}\cdot\vec{v}-\vec{q}\cdot\vec{n})\,dS \tag{3.38}$$

Tramite alcuni passaggi algebrici, è possibile ottenere un'espressione locale del primo principio, che contiene solo la potenza delle forze interne e il calore ricevuto dal corpo:

$$\rho(de/dt) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r - \nabla \cdot \vec{q}$$
(3.39)

Nell'ipotesi di piccole deformazioni questa equazione si riduce a:

$$\rho \,\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \nabla \cdot \vec{q} \tag{3.40}$$

Secondo principio della termodinamica

Oltre all'energia interna e alla variazione di calore nel corpo, è necessario introdurre altre due variabili: temperatura ed entropia.

Si ipotizza che la temperatura (T) possa essere rappresentata tramite un campo scalare. L'entropia esprime una variazione di energia associata a una variazione di temperatura ed è definita come:

$$S = \int_{\mathcal{D}} \rho \, s \, dV \tag{3.41}$$

dove s è l'entropia specifica per unità di massa.

Il secondo principio della termodinamica postula che la variazione di entropia è sempre maggiore o uguale al rapporto tra la variazione di calore e la temperatura:

$$\frac{dS}{dt} \ge \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \, dV - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, dS \qquad \forall \mathcal{D}$$
(3.42)

Applicando ora il teorema della divergenza a questa equazione, e ricordandone la validità per ogni regione \mathcal{D} , si ottiene:

$$\rho \, \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \ge 0 \tag{3.43}$$

La disuguaglianza fondamentale che accoppia il primo e il secondo principio si ottiene sostituendo r con la sua espressione ricavabile dall'equazione 3.39:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left(\rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + \nabla \cdot \vec{q} \right) \ge 0$$
(3.44)

3.2.2 Meccanismi di trasmissione del calore

Quando all'interno di un corpo esistono differenze di temperatura, si verifica in esso un trasferimento di energia, detto trasmissione del calore, dalle parti più calde a quelle più fredde.

La trasmissione del calore si verifica anche tra corpi distinti, siano essi fluidi o solidi, e avviene anche tra corpi posti a distanza e separati da uno spazio vuoto, purchè in presenza di differenze di temperatura.

Esistono tre meccanismi di trasmissione del calore: la conduzione, la convezione e l'irraggiamento. Questi possono avvenire da soli o, come è più frequente, combinati tra loro; quando questo accade, si semplifica il problema studiando separatamente gli effetti di ciascuno.

la conduzione è il modo di trasmissione del calore tipico dei solidi, anche se si può verificare anche nei fluidi. Esso consiste in uno scambio di energia per interazione diretta tra le molecole di un mezzo, in presenza di gradienti di temperatura. Nei solidi, infatti, le particelle materiali, pur essendo legate alle loro posizioni di equilibrio nel corpo, si trovano in continuo movimento intorno alle posizioni stesse; l'energia media delle particelle dipende dalla temperatura. Questo scambio energetico avviene senza che vi siano contemporaneamente trasferimenti macroscopici di massa. La propagazione termica può essere espressa in funzione del gradiente di temperatura secondo la legge di Fourier.

• la **convezione** avviene nei fluidi, dove le possibilità di spostamento delle molecole sono ben più ampie che nei solidi. Si tratta dello spostamento di porzioni di materia fluida, libera di viaggiare attraverso tutto il volume occupato dal fluido. Questi moti possono essere dovuti a differenze di temperatura, oppure possono essere provocati da un'azione esterna. Nel primo caso la convezione è detta libera o naturale, nel secondo è detta forzata.

Il meccanismo di convezione è generalmente descritto dalla legge di Newton.

• l' **irraggiamento** è un trasferimento di energia termica sotto forma di onde elettromagnetiche, emesse a causa dell'agitazione atomica alla superficie di un corpo. Il verificarsi di questo fenomeno non dipende dalla presenza di un mezzo materiale tra i corpi che si scambiano energia, dal momento che può essere attivo anche in uno spazio vuoto; tuttavia esso si verifica anche attraverso i corpi, purchè questi siano almeno parzialmente trasparenti alle radiazioni elettromagnetiche.

Il meccanismo di irraggiamento è convenzionalmente descritto dalla relazione di Stefan–Boltzmann.

In questo lavoro, ci si è limitati a considerare i primi due fenomeni, trascurando l'irraggiamento.

Conduzione termica

La conduzione del calore è un fenomeno di propagazione dell'energia per contatto diretto tra le particelle di un corpo. Il meccanismo di base che controlla la propagazione per conduzione è diverso a seconda della struttura fisica del corpo.

La conduzione termica nei gas è dovuta alla diffusione atomica e molecolare, mentre nei liquidi e nei solidi dielettrici avviene per mezzo di onde elastiche. Nei metalli il fenomeno è principalmente dovuto alla diffusione degli elettroni liberi, risultando di minore importanza l'effetto dell'oscillazione elastica della struttura cristallina.

Indipendentemente dal meccanismo di base che si presenta, la teoria analitica della conduzione fa riferimento a un mezzo continuo non tenendo conto della sua struttura molecolare. La propagazione del calore per conduzione, come avviene per tutti i meccanismi di scambio termico, si manifesta solo in presenza di differenze di temperatura tra diversi punti del corpo. Lo studio del fenomeno richiede quindi la conoscenza del campo di temperature all'interno del corpo e cioè la precisazione della funzione:

$$T = T(x, y, z, t) \tag{3.45}$$

che rappresenta la temperatura in ogni punto e ad ogni istante prefissato.

In un mezzo continuo, il luogo dei punti ad uguale temperatura individua, ad un dato istante, una *superficie isoterma*; le superfici isoterme non si intersecano, in quanto nessun punto può essere simultaneamente a temperature diverse.

Legge di Fourier Secondo l'ipotesi di Fourier, la quantità di calore dQ che attraversa un elemento di superficie isoterma dS, in direzione normale, nell'intervallo di tempo dt, è proporzionale alla differenza di temperatura per unità di lunghezza nella stessa direzione, secondo la relazione:

$$dQ_n = -kdS\frac{\partial T}{\partial n}dt \tag{3.46}$$

Il coefficiente k, denominato *conduttività termica*, è una proprietà fisica caratteristica del materiale e ne definisce l'attitudine a condurre calore; il segno meno è introdotto per tener conto del fatto che il calore si propaga nel senso delle temperature decrescenti.

Alcuni valori caratteristici del coefficiente k, tratti da Rodonò and Volpes (1995), sono riportati nella tabella 3.1, a pagina 51.

Si può quindi definire il flusso termico specifico q come la quantità di calore che si propaga

Aeriformi:	
H_2O vapore saturo $100^{\circ}C$	$24.8 \text{ x } 10^{-3}$
Aria	$24.1 \text{ x } 10^{-3}$
Idrogeno	$168.4 \ge 10^{-3}$
Ossigeno	$24.4 \text{ x } 10^{-3}$
Liquidi:	
Acqua	0.591
Alcool etilico	0.177
Mercurio	7.96
Materiali isolanti:	
Amianto, fibre	0.064
Polistirolo espanso $(25kg/m^3)$	0.035
Pomice	0.23
Sughero, lastre	0.05
Materiali da costruzione:	
Calcestruzzo	$0.93 \div 1.5$
Intonaco di cemento e sabbia	1.4
Laterizi	$0.7 \div 1.3$
Terreno asciutto	0.82
Metalli:	
Acciaio	$60 \div 150$
Argento	419
Piombo	35
Rame	380

Tabella 3.1: Valori della conducibilità termica k [W/mK]

attraverso l'unità di superficie isoterma, in direzione normale, nell'unità di tempo, ovvero:

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial n} \tag{3.47}$$

Scrivendo questa espressione in notazione vettoriale, si trova la forma più nota dell'equazione di Fourier:

$$\vec{q} = -k\nabla T \tag{3.48}$$

Tale legge è valida per la conduzione in solidi isotropi.

Nel caso di mezzi anisotropi, la conduttività termica non è più un parametro, ma assume valori diversi nelle varie direzioni. Essa deve pertanto essere espressa tramite un tensore, detto *tensore di conduttività termica* e la legge di Fourier diventa:

$$\vec{q} = -\mathbf{k}\nabla T \tag{3.49}$$

Se si scrive il vettore gradiente di temperatura come

$$\vec{\epsilon_T} = -\vec{\nabla T} \tag{3.50}$$

il flusso termico può essere espresso per mezzo della relazione:

$$\vec{q} = \mathbf{k} \, \epsilon_T^2 \tag{3.51}$$

Equazione generale della conduzione Lo studio della propagazione del calore per conduzione all'interno di un mezzo comporta la conoscenza del campo termico al suo interno, ossia la precisazione della funzione introdotta nell'equazione 3.45.

Tale funzione può essere ottenuta dalla risoluzione dell'equazione generale della conduzione, che esprime il bilancio di energia di un sistema in cui si propaghi del calore per conduzione.

Si parta dal primo principio della termodinamica, scritto nella forma dell'equazione 3.40. Introducendo il calore specifico definito come

$$C = T \frac{\partial s}{\partial T} \tag{3.52}$$

e raccogliendo in un termine noto b tutti i termini dell'equazione che non dipendano direttamente dalla temperatura, l'equazione generale della conduzione può essere scritta come:

$$\nabla \cdot \vec{q} + C \, \dot{T} = b \tag{3.53}$$

Il termine noto b rappresenta il calore generato all'interno del sistema.

Convezione termica

Per poter analizzare il problema convettivo, è necessario innanzitutto fare una distinzione tra convezione forzata e convezione naturale.

• nella **convezione forzata** il fluido è dotato di un suo moto che lo porta a lambire la superficie del solido. Tale moto è dovuto a cause indipendenti dalla trasmissione del calore e anzi il fenomeno convettivo ha un effetto trascurabile su tale moto. Esempi di convezione forzata possono essere lo scambio termico tra l'aria e la parete di un edificio quando soffia il vento, o tra l'aria e il radiatore dell'impianto di raffreddamento del motore di un'autovettura, quando questa sia in moto. • nella **convezione naturale**, invece, il fluido non è agitato da cause esterne. Le parti di fluido a contatto con il solido (che si trova a temperatura diversa) assumono una temperatura, e quindi una densità, diversa dalle altre; se è presente un campo gravitazionale, questo si traduce in un movimento delle particelle più fredde verso il basso, con conseguente moto inverso delle particelle più calde.

Esempi di convezione naturale possono essere lo scambio termico tra l'aria e gli elementi scaldanti di un impianto di riscaldamento domestico, in assenza di ventilatore, o il raffreddamento naturale di un corpo posto in aria a temperatura minore, sempre in assenza di ventilazione.

Va osservato che la causa che determina i moti convettivi naturali è la disuniformità di peso specifico; questa può essere causata, oltre che da differenze di temperatura, da differenze di composizione del fluido.

Per quanto riguarda lo scambio termico tra un corpo solido e un fluido che lo lambisce, vale la **legge di Newton**, per la quale il flusso termico scambiato è proporzionale alla superficie del corpo e alla differenza di temperatura tra i due mezzi, ovvero:

$$q = h \left(T_s - T_f \right) dA \tag{3.54}$$

dove T_s e T_f sono rispettivamente la temperatura del solido e quella del fluido. Il coefficiente di proporzionalità h è detto *coefficiente convettivo*. Esso dipende da molti fattori, quali la forma e la temperatura del solido, la natura e lo stato fisico del fluido, le caratteristiche cinematiche del moto del fluido, la presenza di un eventuale campo gravitazionale. È facilmente intuibile come la stima di questo coefficiente sia un problema molto complesso, che può essere risolto solo con espressioni approssimate, ricavate da dati empirici. Prima di passare alla stima del coefficiente convettivo, è necessario però

Moto laminare e moto turbolento Una caratteristica delle correnti fluide è la duplice modalità secondo cui può presentarsi il moto: laminare o turbolento.

richiamare alcune nozioni elementari sul moto dei fluidi.

- Nelle correnti che si sviluppano in uno spazio ristretto o a velocità molto bassa, ovvero quando nel fluido, per la sua elevata viscosità, possano manifestarsi grandi sforzi tangenziali, la configurazione del moto risulta dallo scorrimento dei vari strati del fluido uno sull'altro. Una corrente di tale genere si dice **laminare**, perchè si può pensare equivalente a un insieme di lamine (strati) infinitamente sottili di fluido, scorrenti una adiacente all'altra.
- Se si aumenta la velocità di scorrimento, si vede che, a un certo punto, la configurazione stabile precedentemente descritta cessa, dando luogo a una distribuzione di velocità che, anche quando macroscopicamente stazionaria, è caratterizzata da notevoli fluttuazioni nel tempo a scala microscopica. Tale configurazione è quella del moto **turbolento**

Strato limite Una caratteristica saliente del moto dei fluidi reali (cioè con viscosità non nulla) è che, al contatto con una parete, la velocità del fluido è necessariamente nulla.

Al contatto tra il fluido e la parete si generano, infatti, degli sforzi tangenziali; questi sforzi frenano lo strato di fluido a contatto, il quale, a sua volta, frena lo strato ad esso adiacente e così via. Nella zona vicina alla parete si ha quindi un gradiente trasversale di velocità, che si annulla a distanza maggiore. Lo strato di fluido più vicino alla parete, dove si hanno, come detto, gradienti di velocità, è detto **strato limite meccanico**.

Così come si parla di strato limite meccanico, con riferimento alla velocità, si definisce uno strato limite termico, in relazione all'andamento della temperatura lungo la normale alla parete.

La zona in cui T varia è limitata a un ristretto strato adiacente alla parete, detto **strato limite termico**. Questo è definito come lo strato di corrente fluida entro il quale il valore assoluto della differenza tra la temperatura locale e la temperatura della parete $(|T_f - T_p|)$ è minore del 99% del valore assoluto della differenza tra la temperatura a distanza infinita e quella della parete. Lo spessore dello strato limite termico si indica di solito con δ_T .

Lo strato limite termico è sede della trasmissione del calore per convezione tra il solido e il fluido; all'esterno di tale strato, il fluido può essere considerato isotermo.

Nella parte di fluido che si trova a contatto con la parete, dove la velocità è nulla, la trasmissione del calore avviene per conduzione. Ricordando il pustulato di Fourier (equazione 3.48), si può scrivere una relazione approssimata tra il coefficiente conduttivo, la conduttività termica e lo strato limite termico:

$$h \approx \frac{k}{\delta_T} \tag{3.55}$$

Questa relazione dà un significato fisico dello spessore dello strato limite termico e della sua influenza sulla convezione.

Stima del coefficiente convettivo Prima di poter effettuare una stima del coefficiente convettivo, è necessario introdurre alcuni numeri adimensionali, che compaiono nelle espressioni empiriche del coefficiente stesso.

• Numero di Nusselt:

$$Nu = \frac{hL}{k} \tag{3.56}$$

dove: L è una lunghezza caratteristica del corpo, k la conduttività termica del fluido, h il coefficiente di convezione.

• Numero di Prandt:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \tag{3.57}$$

dove μ è la viscosità e c_p è il coefficiente di portanza; si osserva che Pr è funzione soltanto della natura del fluido e del suo stato termodinamico.

Mentre nei liquidi Pr varia molto da un caso all'altro, nei gas assume quasi un valore costante (0.7-0.8), poco variabile con lo stato termodinamico.

• Numero di Grashov:

$$Gr = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu^2} \tag{3.58}$$

dove: g è l'accelerazione di gravità, β è il coefficiente di dilatazione volumica a pressione costante, θ è una differenza di temperatura caratteristica, L è una lunghezza caratteristica e ν è la viscosità cinematica.

Sono state proposte varie formule per il calcolo della trasmissione del calore per convezione, distinguendo i vari casi. Nel presente studio, ci si limiterà ad analizzare il caso di convezione naturale, per il quale si usa comunemente la seguente formula:

$$Nu = 0.54 (GrPr)^{\frac{1}{4}} \tag{3.59}$$

Questa formula vale, con $10^3 < GrPr < 10^8$, per una parete piana verticale, di altezza L, confinante con un fluido in convezione naturale con moto laminare.

Nel caso invece di convezione naturale, ma moto turbolento, l'espressione diventa:

$$Nu_x = 0.13 (Gr_x Pr)^{\frac{1}{3}} \tag{3.60}$$

 $\operatorname{con} GrPr > 10^9.$

Per la generalizzazione di tali relazioni, si rimanda alla letteratura specifica.

Nella tabella 3.2 a pagina 55 sono riportati alcuni valori indicativi di h nei diversi modi di convezione (valori tratti da Rodonò and Volpes (1995)).

aeriformi in convezione naturale	$2 \div 20$
aeriformi in convezione forzata	$20 \div 200$
liquidi in convezione naturale	$10^2 \div 10^3$
liquidi in convezione forzata	$10^2 \div 10^4$
liquidi bollenti	$10^3 \div 10^5$
vapori condensanti	$10^3 \div 10^5$

Tabella 3.2: Ordine di grandezza del coefficiente convettivo h $[W/m^2K]$ nei diversi modi di convezione

3.3 Campo elettrico

Si consideri un materiale conduttore, cioè un corpo al cui interno siano presenti elettroni liberi di muoversi. Si ipotizzi che, fra due punti del conduttore, sia applicata una differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B) = V_A - V_B$; fra questi due punti è quindi presente un campo elettrico **E**, tale che:

$$\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot \vec{dl} = V(A) - V(B)$$
(3.61)

ovvero

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{3.62}$$

Se si calcola l'integrale di linea del campo elettrico lungo una linea chiusa si ottiene:

$$\int_{A}^{A} \vec{E} \cdot \vec{dl} = V(A) - V(A) = 0 = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl}$$
(3.63)

dove il simbolo ∮ indica appunto l'integrale lungo una linea chiusa e prende il nome di circuitazione. È dunque possibile affermare che la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla, condizione necessaria e sufficiente per la conservatività del campo elettrico.

Introducendo il teorema di Stokes si può scrivere:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{dS} \tag{3.64}$$

Dalla conservatività del campo elettrico discende:

$$\int_{S} \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \tag{3.65}$$

Poichè tale relazione è valida per qualsiasi superficie S, dev' essere nullo l'integrando e quindi si ha:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{3.66}$$

Tale equazione, che esprime in forma locale la conservatività del campo elettrico, consente di affermare che il campo elettrico è irrotazionale.

Tornando ora al conduttore cui si era applicata una differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B) = V_A - V_B$, se si misura nel tempo la differenza di potenziale, si osserva che essa tende a zero con legge esponenziale. Si può quindi affermare che nel conduttore si ha un movimento ordinato di cariche, ovvero si ha un *passaggio di corrente elettrica*. Per poter studiare il fenomeno in modo stazionario, è necessario mantenere costante la differenza di potenziale, e quindi il campo elettrico. Sotto questa ipotesi, si definisce corrente elettrica (e si misura in Ampère) il rapporto tra la carica elettrica dQ che fluisce nel tempo dt attraverso la sezione del conduttore e il tempo dt stesso:

$$I = \frac{dQ_E}{dt} \tag{3.67}$$

Se al conduttore è applicata una differenza di potenziale costante nel tempo, si può osservare che la corrente che lo attraversa è pure costante nel tempo; si parla quindi di *corrente* stazionaria.

Si deve ora definire un'altra grandezza significativa, *la densità di corrente*, che è quel vettore il cui flusso attraverso una sezione S del conductore è pari alla corrente che attraversa tale sezione:

$$I = \int_{S} \vec{J} \cdot \vec{dS} \tag{3.68}$$

In molti casi di interesse pratico è possibile scrivere una relazione funzionale tra il campo elettrico e la densità di corrente, del tipo $\vec{J} = f(\vec{E})$. Per conduttori lineari e isotropi la precedente relazione si riduce alla:

$$\vec{I} = \sigma_E \, \vec{E} \tag{3.69}$$

dove σ_E è una costante e prende il nome di *conducibilità elettrica*. Alcuni valori significativi, tratti da Silvestrini (1995), della conducibilità elettrica sono riportati nella tabella seguente:

Nel caso di un conduttore anisotropo la precedente relazione diventa:

Alluminio	$4.0 \ \mathrm{x} \ 10^4$
Argento	$6.67 \ \mathrm{x} \ 10^4$
Ferro	$1.0 \ { m x} \ 10^4$
Zinco	$1.72 \text{ x } 10^4$
Rame	5.88×10^4
Legno	$1.0 \ge 10^{-11}$
Vetro	$1.0 \ge 10^{-13}$
Plastica	$1.0 \ge 10^{-16} \div 1.0 \ge 10^{-19}$
Ceramica	$1.0 \ge 10^{-19}$

Tabella 3.3: Valori della conducibilità elettrica $\sigma_E [1/mm\Omega]$

$$\vec{J} = \boldsymbol{\sigma}_E \, \vec{E} \tag{3.70}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}_E$ è il tensore di conducibilità elettrica.

L'applicazione del principio di conservazione della carica elettrica per un sistema isolato, limitato da una superficie S, al cui interno sia presente una carica totale $Q_E(t)$, comporta che se, in un tempo dt, $Q_E(t)$ diminuisce della quantità dQ_E , essa debba essere uscita dalla superficie S, ovvero:

$$-dQ_E = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \, dt \tag{3.71}$$

da cui si ottiene:

$$-\frac{dQ_E}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} \tag{3.72}$$

Inoltre, introducendo la densità volumica di carica ρ_E e considerando un volume infinitesimo τ , si può scrivere:

$$\frac{dQ_E}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial \rho_E}{\partial t} d\tau \tag{3.73}$$

e, applicando il teorema della divergenza al flusso del vettore densità di corrente, si può ottenere l'equazione:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_E}{\partial t} = 0 \tag{3.74}$$

Questa equazione viene detta **equazione di continuità della corrente** ed esprime in forma locale il principio di conservazione della carica.

In condizioni stazionarie, dal momento che le grandezze sono costanti nel tempo, l'equazione appena vista può essere scritta come:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{3.75}$$

Integrando tale relazione su un generico volume τ avente come contorno la superficie S si ottiene:

$$0 = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} \, d\tau = \int_{S} \vec{J} \cdot \vec{dS}$$
(3.76)

cioè il flusso del vettore densità di corrente attraverso una superficie chiusa è nullo. Si può pertanto affermare che il vettore densità di corrente è solenoidale in tutto lo spazio.

3.3.1 Parallelo tra campo termico e campo elettrico

Le equazioni viste nel paragrafo relativo al campo termico governano il problema della conduzione termica, nel caso in cui il calore generato all'interno del sistema sia diverso da zero e in cui il fenomeno della trasmissione del calore non possa essere considerato stazionario.

Se invece si ipotizza che il calore generato all'interno del sistema sia nullo e che il fenomeno della trasmissione del calore avvenga in condizioni stazionarie, le equazioni del campo termico si trasformano nelle seguenti:

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0 \tag{3.77}$$

$$\vec{\epsilon_T} = -\nabla T \tag{3.78}$$

$$\vec{q} = \mathbf{k}\,\vec{\epsilon} \tag{3.79}$$

Riprendendo le equazioni scritte analizzando il campo elettrico, è possibile notare un parallelismo tra le equazioni appena scritte e quelle che governano il passaggio di corrente elettrica stazionaria in un conduttore:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{3.80}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{3.81}$$

$$\vec{J} = \boldsymbol{\sigma}_E \vec{E} \tag{3.82}$$

Utilizzando quindi la terminologia del campo meccanico è possibile individuare, tra quelle appena citate, una equazione di equilibrio, una di congruenza e una di legame. Nella tabella 3.4 sono mostrate le equazioni che governano i tre campi considerati.

Equazioni	Campo meccanico	Campo termico	Campo elettrico
Equilibrio	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0$	$\nabla \cdot \vec{q} + C \dot{T} = \mathbf{b}$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0$
	$ec{t} = oldsymbol{\sigma} \cdot ec{n}$	$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$	$0 = \vec{J} \cdot \vec{n}$
	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	$T = \bar{T}$	$V = \bar{V}$
Legame	$\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{\epsilon}$	$\vec{q} = \mathbf{k} \epsilon_T$	$ec{J} = oldsymbol{\sigma}_E ec{E}$
Congruenza	$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right]$	$\vec{\epsilon_T} = -\nabla T$	$\vec{E} = -\nabla V$

Tabella 3.4: Confronto tra le equazioni che regolano i tre campi considerati

3.4 Accoppiamenti tra i campi

3.4.1 Accoppiamento termo-meccanico

L'accoppiamento tra i campi meccanico e termico avviene in due modi:

- 1. attraverso alcuni termini dissipativi
- 2. attraverso la deformazione termica

Termini dissipativi Attraverso semplici passaggi matematici e nell'ipotesi di piccoli gradienti di deformazione, la disequazione che accoppia i due principi della termodinamica (eq. 3.44) può essere letta come espressione della positività della dissipazione:

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \, \boldsymbol{\dot{\epsilon}}^{i} - A_{k} \dot{V}_{k} - \nabla T \cdot \frac{\vec{q}}{T} \ge 0 \tag{3.83}$$

La somma dei primi due termini:

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - A_k \dot{V}_k \tag{3.84}$$

è la cosiddetta **dissipazione meccanica** , dovuta a deformazioni inelastiche. In particolare, per i legami costitutivi considerati, la 3.84 si specializza nei seguenti modi:

• legame elasto-perfettamente plastico:

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \tag{3.85}$$

• legame delle SMA:

$$\Phi_1 = \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{tr} \tag{3.86}$$

L'ultimo termine:

$$\Phi_2 = -\frac{\vec{q}}{T} \cdot \nabla T \tag{3.87}$$

è la cosiddetta dissipazione termica, dovuta alla conduzione del calore.

Il termine di dissipazione meccanica è una quantità di calore che viene generata all'interno del sistema e, come tale, farà parte del termine noto b dell'equazione generale della conduzione (eq. 3.53).

Deformazione termica Nel caso in cui sia presente anche un campo termico, la deformazione può essere scritta come:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{tot} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p + \alpha \Delta T \cdot \mathbf{1}$$
(3.88)

dove:

- $\boldsymbol{\epsilon}^{tot}$ è la deformazione totale
- α è il coefficiente di dilatazione termica
- ΔT è la differenza tra la temperatura esterna e quella interna: $T_e T_i$
- 1 è il tensore unitario

3.4.2 Accoppiamento termo-elettrico

L'accoppiamento tra i campi elettrico e termico avviene tramite quello che viene chiamato **effetto Joule.** Esso consiste nel fatto che, quando una corrente attraversa un corpo conduttore, viene generato calore.

Il campo elettrico genera infatti una potenza, che deve essere dissipata in qualche modo; poichè il fenomeno è stazionario, l'energia spesa dal campo elettrico non può trasformarsi nè in energia potenziale, nè in energia cinetica: negli urti tra portatori di carica e reticolo cristallino, essa si trasforma in moto di agitazione disordinato, cioè in energia termica. Il corpo si riscalda e disperde nell'ambiente circostante la potenza elettrica dissipata dal campo elettrico nel conduttore.

Se il conduttore è caratterizzato da un campo elettrico \vec{E} , percorso da una densità di corrente \vec{J} , la potenza per unità di volume dissipata per effetto Joule è pari a:

$$w = \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{3.89}$$

Il calore generato per effetto Joule non è altro che calore prodotto all'interno del corpo e, come tale, farà parte del termine noto b dell'equazione generale della conduzione (eq. 3.53).

3.4.3 Accoppiamento termo-elettro-meccanico

È quindi possibile, a questo punto, scrivere in modo completo l'equazione termica, in modo tale che includa i contributi di tutti e tre i campi.

Come si è visto nei paragrafi precedenti, gli accoppiamenti si riducono infatti all'aggiunta di nuovi addendi al termine noto, che quindi diventa, nei due casi considerati:

• legame elasto-perfettamente plastico:

$$b = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}^p} + w \tag{3.90}$$

• legame delle SMA:

$$b = \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{tr} + \boldsymbol{w} \tag{3.91}$$

3.5 Formulazione debole del problema

Il problema enunciato nei paragrafi precedenti è stato risolto con il metodo degli elementi finiti, avvalendosi del codice FEAP.

Le equazioni differenziali viste, unite alle condizioni al contorno, costituiscono la *forma forte* del problema. Per poter risolvere il problema con il metodo degli elementi finiti, è necessario scriverlo in *forma debole*. La forma debole di un sistema di equazioni differenziali si costruisce seguendo 4 passi (Taylor 2000):

- 1. Si moltiplicano le equazioni differenziali per una funzione arbitraria W, detta funzione peso, che trasforma il sistema di equazioni differenziali in una funzione scalare $g(x_i)$
- 2. Si integra la funzione ottenuta su tutto il dominio considerato, Ω
- 3. Si integra per parti, per ridurre le derivate al loro minimo ordine
- 4. Si sostituiscono le condizioni al contorno in modo appropriato.

Campo meccanico Partendo dall'equazione di equilibrio per il campo meccanico (eq. 3.5) e moltiplicandola per la funzione peso, si ottiene:

$$g_M = W(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f}) = 0 \tag{3.92}$$

Integrando sul dominio Ω :

$$G_M = \int_{\Omega} W(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f}) \, d\Omega = 0 \tag{3.93}$$

Integrando per parti:

$$G_M = \int_{\Omega} W \vec{f} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \vec{W})^T \, \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma} W \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \tag{3.94}$$

Introducendo $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$, l'integrale sulla frontiera si può scomporre in due termini, uno relativo alla parte di frontiera in cui le condizioni al contorno riguardano forze superficiali (Γ_q) e uno relativo alla parte di frontiera in cui le condizioni al contorno riguardano gli spostamenti (Γ_T) :

$$\int_{\Gamma} W\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_T} W \vec{t} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} W \vec{t} d\Gamma$$
(3.95)

Essendo W una funzione arbitraria, si può ipotizzare che sia nulla sulla parte di frontiera Γ_T e pertanto, applicando la condizione al contorno $\vec{t} = \vec{t}$ alla frontiera Γ_q , si ottiene:

$$G_M = \int_{\Omega} W \vec{f} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \vec{W})^T \, \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} W \vec{t} \, d\Gamma = 0 \tag{3.96}$$

Si può osservare come l'equazione appena scritta contenga soltanto derivate del primo ordine, anzichè le derivate del second'ordine (contenute nell'operatore divergenza) presenti nelle equazioni di equilibrio scritte in forma forte. Questo porta a condizioni più deboli per la soluzione del problema, da cui il nome di forma debole. **Campo termico** Analogamente a quanto visto per il campo meccanico, partendo dall' equazione 3.53, introducendo $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$ e ricordando la condizione al contorno $q_n = \bar{q_n}$, la forma debole dell'equazione di equilibrio del campo termico si può scrivere come:

$$G_T = \int_{\Omega} W(C\dot{T} - b) \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \vec{W})^T \, \vec{q} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} W \bar{q}_n \, d\Gamma = 0 \tag{3.97}$$

Campo elettrico In modo assolutamente analogo, partendo dall'equazione 3.75 e ricordando che $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$, la forma debole dell'equazione di equilibrio del campo elettrico si può scrivere come:

$$G_E = -\int_{\Omega} (\nabla \vec{W})^T \, \vec{J} d\Omega = 0 \tag{3.98}$$

3.6 Soluzione col metodo degli elementi finiti

L'approccio degli elementi finiti è un metodo approssimato: significa che il problema viene risolto approssimando le funzioni incognite. Ci sono due modi in cui questo può avvenire (Ottosen and Peterson 1992):

- le funzioni vengono approssimate direttamente sull'intero dominio
- il dominio è diviso in piccole regioni, dove le funzioni vengono approssimate. Solo successivamente si costruisce un'approssimazione per l'intero dominio

Il metodo degli elementi finiti utilizza il secondo approccio, che ha il vantaggio di essere applicabile a qualsiasi tipo di geometria; il dominio Ω è diviso in regioni dette *elementi* finiti:

$$\Omega \approx \Omega_h = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Omega_e \tag{3.99}$$

dove Ω_h è l'approssimazione del dominio creata dall'insieme di elementi, Ω_e è il generico elemento e N_{el} è il numero di elementi.

Di conseguenza, ognuno degli integrali che compaiono nelle equazioni scritte in forma debole viene approssimato come somma di integrali su ogni elemento.

Si sceglie d'ora in avanti di proseguire la trattazione sul campo termico, dal momento che esso presenta un termine aggiuntivo (quello in \dot{T}), rispetto agli altri due campi.

Riprendendo l'equazione 3.97 e ricordando che $\vec{q} = -\mathbf{k}\nabla T$, si può scrivere:

$$G_T = \int_{\Omega} W(C\dot{T} - b) \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \vec{W})^T \, \mathbf{k} \nabla T \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_q} W \bar{q_n} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (3.100)$$

Si avrà quindi:

$$G_T \approx G_h = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} W(C\dot{T} - b) \, d\Omega_e + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} (\nabla \vec{W})^T \, \mathbf{k} \nabla T \, \mathrm{d}\Omega_e + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Gamma_q e} W \bar{q}_n \, \mathrm{d}\Gamma_e = 0$$
(3.101)

E quindi necessario scegliere un'approssimazione per la funzione temperatura, che è l'incognita del problema termico; essa viene calcolata interpolando i valori nodali, attraverso le cosiddette funzioni di forma N, ovvero:

$$T = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\vec{\xi}) \hat{T}^i(t) = \vec{N}^T \, \vec{\hat{T}}$$
(3.102)

dove *i* si riferisce al numero dell'elemento, \vec{N} è il vettore delle funzioni di forma dei vari nodi, scritte in termini delle coordinate naturali $\vec{\xi}$, N_n è il numero di nodi connessi con ogni elemento (in questo caso 8) e \vec{T} è il vettore delle temperature nodali.

Nel caso in esame sono state utilizzate funzioni di forma trilineari, espresse come:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_1 \xi_{i1}) (1 + \xi_2 \xi_{i2}) (1 + \xi_3 \xi_{i3}) \qquad i = 1, 8$$
(3.103)

dove le ξ_{ij} (j = 1,3) sono costanti che dipendono dal nodo considerato.

È possibile a questo punto definire la matrice \mathbf{B} , contenente le derivate delle funzioni di forma, le cui componenti sono definite come:

$$B_{ik} = N_{i,k} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j} J_{jk}$$
(3.104)

dove la trasformazione Jacobiana tra le coordinate è definita da:

$$J_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \tag{3.105}$$

Anche la funzione peso può essere scritta in termini delle funzioni di forma:

$$W = \sum_{i=1}^{N_n} N_i^T(\vec{\xi}) \hat{W}^i = \vec{N}^T \vec{\hat{W}}$$
(3.106)

dove \hat{W} è un vettore contenente parametri arbitrari.

Tornando quindi all'equazione 3.97, questa può essere riscritta in termini delle N e la sua forma approssimata (eq. 3.101) diventa:

$$G_{h} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \vec{\hat{W}}^{T} \left(\mathbf{M} \, \hat{\vec{T}} + \mathbf{K} \, \hat{\vec{T}} - \vec{F} \, \right) = 0 \tag{3.107}$$

dove:

• M è la matrice di capacità termica, definita come:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \vec{\mathrm{N}} \,\mathrm{C}\,\vec{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}}$$
(3.108)

• K è la *matrice di conduttività*, definita come:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \, \mathbf{k} \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}} \tag{3.109}$$

• \vec{F} è il vettore dei carichi definito come:

$$\vec{F} = \int_{\Omega_e} \vec{N}^T \, b \, d\Omega_e - \int_{\Gamma_e q} \vec{N}^T \, \bar{q}_n \, d\Gamma_e \tag{3.110}$$

Dal momento che W è una funzione arbitraria, il sistema di equazioni da risolvere diventa:

$$\mathbf{M}\,\vec{\hat{\mathbf{T}}} + \mathbf{K}\,\vec{\hat{\mathbf{T}}} = \vec{\mathbf{F}} \tag{3.111}$$

Questi integrali vengono risolti utilizzando metodi di quadratura numerica, dove, per esempio:

$$K_{ij} = \sum_{l=1}^{L} B_{ik}^{T}(\vec{\xi_{l}}) \,\mathbf{k} \,\mathrm{B}_{jk}(\vec{\xi_{l}}) \,j(\vec{\xi_{l}}) \mathrm{w}_{l}$$
(3.112)

con: $j(\vec{\xi_l})$ è il determinante di **J** calcolato nel punto di quadratura $(\vec{\xi_l})$ e w_l sono i pesi della formula di quadratura. Come punti di quadratura e relativi pesi sono stati usati quelli indicati dal *metodo di Gauss*, utilizzando 8 punti per elemento.

Dopo aver approssimato la derivata prima usando il metodo di Eulero implicito, come:

$$\dot{T}_{(n+1)} = \frac{1}{\Delta t} \left[T_{(n+1)} - T_{(n)} \right]$$
 (3.113)

dove Δt è l'incremento di tempo considerato.

Il sistema così ottenuto, è stato risolto con il *metodo di Newton*, il cui punto di partenza è la definizione di un residuo \vec{R} , pari a:

$$\vec{R} = \vec{F} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{T}}$$
(3.114)

Il metodo di Newton si basa sulla linearizzazione dell'equazione residuale, la cui componente i-ma può essere scritta come:

$$R_i^{(k+1)} = R_i^{(k)} + \frac{\partial R_i}{\partial T} |^{(k)} dT^{(k)} = 0$$
(3.115)

dove: T è la temperatura, ovvero l'incognita del problema termico, al tempo t_{n+1} e k è il numero dell'iterazione dell'algoritmo di Newton. Si definisce quindi la matrice tangente come:

$$K_i^{T(k)} = -\frac{\partial R_i}{\partial T} |^{(k)} \tag{3.116}$$

e si risolve:

$$dT^{(k)} = [K_i^{T(k)}]^{-1} R_i^{(k)}$$
(3.117)

La soluzione viene aggiornata tramite:

$$T^{(k+1)} = T^{(k)} + dT^{(k)} aga{3.118}$$

In corrispondenza di ogni incremento di tempo, si possono scegliere, per la soluzione del sistema 3.111, le seguenti condizioni iniziali:

$$T^{0}(t_{n+1}) = T(t_{n}) (3.119)$$

dove una quantità senza indice (k) rappresenta un valore che abbia raggiunto la convergenza, ovvero, in corrispondenza del quale si abbia $\vec{R} = 0$, a meno di una tolleranza numerica.

Per un problema lineare, il metodo di Newton converge in una iterazione, mentre, per un problema non-lineare, mostra una velocità di convergenza quadratica.

Di seguito sono riportate le espressioni dei residui e delle matrici tangenti per i tre campi considerati.

Campo meccanico

$$\vec{R}_{M} = -\int_{\Omega_{e}} \vec{N}^{T} \vec{f} \, d\Omega_{e} + \int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}} - \int_{\Gamma_{\mathrm{e}} \mathrm{q}} \vec{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \vec{\mathrm{t}} \, \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{e}}$$
(3.120)

$$\mathbf{K}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{M}}}{\partial \hat{\vec{\mathrm{u}}}} = -\int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \hat{\vec{\mathrm{u}}}} \,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}} = -\int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \,\mathbf{a} \,\mathbf{B} \,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}}$$
(3.121)

ricordando che: $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \stackrel{\circ}{\mathbf{u}} \mathbf{e} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} \boldsymbol{\epsilon}$

Campo termico

$$\vec{R}_{T} = \int_{\Omega_{e}} \vec{N}^{T} b \, d\Omega_{e} - \int_{\Gamma_{e}q} \vec{N}^{T} \, \bar{q}_{n} \, d\Gamma_{e} - \left(\int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \, \mathbf{k} \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}\Omega_{e} \right) \hat{\vec{T}} - \left(\int_{\Omega_{e}} \vec{N} \, C \, \vec{N}^{T} \, d\Omega_{e} \right) \hat{\vec{T}} \quad (3.122)$$
$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}}}{\partial \hat{\vec{T}}} = + \int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \, \mathbf{k} \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}\Omega_{e} \qquad (3.123)$$

Campo elettrico

$$\vec{R}_E = -\left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{E}} \,\mathbf{B} \,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}}\right) \hat{\vec{V}}$$
(3.124)

$$\mathbf{K}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{E}}}{\partial \vec{\tilde{\nabla}}} = + \int_{\Omega_{\mathrm{e}}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{E}} \mathbf{B} \,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{e}}$$
(3.125)

ricordando che $\vec{E} = -\mathbf{B} \hat{\vec{V}} e \vec{J} = \boldsymbol{\sigma}_E \vec{E}.$

Capitolo 4 Esempi numerici

Per verificare l'elemento sviluppato sono stati svolti diversi test, utilizzando il codice a elementi finiti FEAP. Esso consente di suddividere il problema da risolvere in sottoproblemi, ciascuno contenente soltanto alcune delle incognite del problema globale, attraverso l'uso di partizioni; in particolare, l'elemento finito utilizzato in questo lavoro è in grado di lavorare con tre partizioni (una meccanica, una termica e una elettrica) che possono essere risolte separatamente, a ogni istante di tempo. In questo modo è stato possibile partire da casi molto semplici, che risolvono una sola partizione per volta, via via accoppiando i campi fino al caso più completo, che risolve un problema termo-elettro-meccanico, utilizzando il legame costitutivo delle SMA.

Nei primi 4 problemi studiati, si è utilizzata la stessa geometria, al fine di poter confrontare i risultati; il campione è costituito da una trave a sezione quadrata, con sezione variabile nella lunghezza (come rappresentato nella figura 4.1). Le dimensioni geometriche della trave sono riportate nella tabella 4.1. Il sistema di vincoli meccanici cui la trave è soggetta, così come la mesh utilizzata sono mostrati nella figura 4.2.

Per modellare in modo realistico lo scambio termico convettivo del provino con l'ambiente circostante, si è rivestita la trave con elementi finiti bidimensionali (di spessore trascurabile) a 4 nodi; questi elementi, che hanno come unico grado di libertà la temperatura, calcolano il flusso di calore che si instaura tra la trave e l'ambiente esterno. L'entità e la direzione di tale flusso dipendono esclusivamente dalla differenza di temperatura tra la trave e l'aria cha la circonda, oltre che dal coefficiente convettivo. I parametri caratteristici di tali elementi (riportati nella tabella 4.4) hanno valori tali da modellare lo scambio convettivo nel caso di un corpo solido immerso in aria.

Come primo caso, si è voluto testare l'accoppiamento dei campi termico e meccanico, attraverso un problema molto semplice, in cui la trave, soggetta a uno spostamento longitudinale, si plasticizza, generando così calore, per effetto della dissipazione meccanica. Si è poi verificato il funzionamento dell'accoppiamento termo-elettrico, imponendo tra le estremità della trave una differenza di potenziale variabile nel tempo e controllando l'aumento di temperatura indotto per effetto Joule. In questi primi due casi, la trave è stata modellata utilizzando parametri caratteristici di un metallo, in particolare dell'acciaio (vedi tabella 4.2); si è utilizzato il legame costitutivo elasto-perfettamente plastico.

In seguito si sono svolti diversi test per verificare che l'elemento implementato fosse in
grado di descrivere i comportamenti tipici delle SMA; in questi problemi, i parametri sono quelli tipici della lega Ni-Ti (tabella 4.3) e si è utilizzato il legame descritto nel capitolo precedente.

L'ultimo test è stato svolto su un composito (vedi figura 4.3), costituito da una matrice a bassa rigidezza, con caratteristiche simili ai materiali polimerici (vedi tabella 4.5), con rinforzi in SMA. Si è risolto un problema termo-elettro-meccanico, verificando così l'accoppiamento di tutti e tre i campi, oltre al funzionamento del legame delle SMA.

DIMENSIONI GEOMETRICHE	[mm]
L	10
h_1	1
h_2	0.998

Tabella 4.1: Dimensioni geometriche della trave utilizzata nei primi 4 esempi (con riferimento alla figura 4.1)

PARAMETRO	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ DI MISURA
modulo Young	Е	$2.06E^{5}$	N/mm^2
modulo Poisson	ν	0.3	adimens.
tens.snerv.	σ_y	440	N/mm^2
$\operatorname{densit}\check{\mathrm{a}}$	ρ	7.8 E-6	Kg/mm^3
dilataz.term.	α	1 E-5	adimens.
temp.di riferim.	t_b	0	$^{\circ}C$
conducib.term.	$k_1 = k_2 = k_3$	0.046	$W/(mm^{\circ}C)$
calore specif.	C	460	$J/(Kg^{\circ}C)$
conducib.elettr.	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	10000	$1/(\Omega mm)$

Tabella 4.2: Parametri dell'elemento tridimensionale usato nei primi 4 esempi

PARAMETRO	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ DI MISURA
modulo Young	Ε	70000	N/mm^2
modulo Poisson	ν	0.33	adimens.
$\operatorname{densit}\check{\mathrm{a}}$	ρ	6.45 E-6	Kg/mm^3
dilataz.term.	α	1 E-5	adimens.
conducib.term.	$k_1 = k_2 = k_3$	0.018	$W/(mm^{\circ}C)$
calore specif.	С	322.168	$J/(Kg^{\circ}C)$
$\operatorname{conducib.elettr.}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	1	$1/(\Omega mm)$
raggio sup. snerv.	R	164	N/mm^2
temp.iniz.corpo	t_b	-21	$^{\circ}C$
deformaz. limite	$oldsymbol{\epsilon}_L$	0.07	a dimens.
$\operatorname{incrudimento}$	Н	3000^{1}	N/mm^2
$\operatorname{incrudimento}$	H	500^{2}	N/mm^2
param. materiale	β	7.5	$N/(mm^2 \ ^{\circ}C)$
temp.fine mart.	M_f	-21	$^{\circ}C$

¹ Esempi 3 e 4 ² Esempio 5

Tabella 4.3: Para	metri della	SMA
-------------------	-------------	-----

PARAMETRO	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ DI MISURA
conducib.term.	$k_1 = k_2 = k_3$		$W/(mm^{\circ}C)$
temp.di riferim.	t_b		$^{\circ}C$

Tabella 4.4: Parametri dell'elemento bidimensionale

PARAMETRO	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ DI MISURA
modulo Young	Е	3600	N/mm^2
modulo Poisson	ν	0.305	adimens.
$\operatorname{densita}$	ρ	1.3 E-6	Kg/mm^3
temp.di riferim.	t_b	-21	$^{\circ}C$
conducib.term.	$k_1 = k_2 = k_3$	~ 0	$W/(mm^{\circ}C)$
calore specif.	С	1500	$J/(Kg^{\circ}C)$
conducib.elettr.	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	~ 0	$1/(\Omega mm)$

Tabella 4.5: Parametri della matrice usata per il composito



Figura 4.1: geometria utilizzata per i primi 4 esempi e indicazione degli elementi cui fanno riferimento i grafici



Figura 4.2: mesh utilizzata per i primi 4 esempi: particolare dei vincoli meccanici



Figura 4.3: mesh utilizzata per il composito: gli elementi più chiari sono in SMA

4.1 Accoppiamento termo-meccanico

Alla trave, si è imposto nella sezione non vincolata, uno spostamento in direzione longitudinale di 0.1 mm. Lo spostamento imposto provoca plasticizzazione nella trave stessa. Essendo la sezione della trave rastremata, ovviamente si plasticizzerà prima la sezione minore (elemento C) e, solo successivamente, le altre parti. Al momento della plasticizzazione, nasce quindi un termine di dissipazione meccanica e, di conseguenza, si genera un flusso di calore che si diffonde, a partire dalla sezione che si plasticizza per prima, in tutta la trave. Una parte di questo calore viene però diffusa verso l'esterno attraverso moti convettivi, dal momento che la trave è immersa in aria, che si trova alla temperatura di $0^{\circ}C$.

Osservando il grafico dello spostamento nel tempo di un punto di Gauss, rispettivamente dell'elemento A, B, C, si riconoscono: la legge di spostamento lineare fino all'isante 1 e poi costante imposta all'estremità in cui si trova l'elemento C; l'effetto dei vincoli in A (figura 4.2), tali per cui lo spostamento è nullo. Per quanto riguarda l'elemento B, si vede, dopo un tratto lineare (corrispondente alla risposta elastica della trave) un tratto con pendenza quasi nulla, che inizia quando la sezione minore (elemento C) si plasticizza. La pendenza iniziale viene recuperata quando anche l'ultimo elemento (A) si è plasticizzato. Inizialmente, lo spostamento aumenta in modo costante; nel momento in cui la prima sezione della trave si plasticizza (punto C), lo spostamento si concentra nella cerniera plastica che vi si forma e quindi nella altre sezioni della trave, il suo incremento è quasi nullo. Questo comportamento continua fino a quando tutta la trave si è plasticizzata, momento in cui l'incremento di spostamento torna ad essere costante in ogni sezione e pari a quello iniziale.

La diffusione del calore in seguito alla plasticizzazione è mostrata nelle figure 4.5, 4.6, 4.7. Si osserva un flusso termico che si diffonde dal punto C, che si plasticizza per primo, lungo tutta la trave, come evidente dalle figure 4.5 e 4.6. Nel momento in cui lo spostamento imposto viene mantenuto costante, cioè a partire dal tempo t=1 s, non si ha più incremento di defomazione plastica (ϵ^P diviene costante, come mostrato nella figura 4.8) e pertanto il termine di dissipazione meccanica, che genera calore, diventa nullo. A questo punto la trave ha raggiunto una temperatura uniforme in tutte le sue parti, come indicato nella figura 4.7. Comincia quindi la diffusione di calore verso l'esterno tramite il meccanismo di convezione, che provoca una diminuzione della temperatura nella trave, come mostrato nella figura 4.9. Tale diminuzione è piuttosto lenta, dal momento che un solido immerso in aria ha un coefficiente convettivo molto piccolo (dell'ordine di 10W/(m²K)).

Dal grafico relativo alla deformazione plastica si vede chiaramente lo sfasamento nel tempo della plasticizzazione nei tre punti considerati. Finchè infatti il materiale è elastico, la deformazione plastica è ovviamente nulla. Come prevedibile, si plasticizza prima il punto C, caratterizzato da una sezione minore di tutti gli altri. Poco dopo si plasticizza il punto B e, per ultimo, il punto A, cioè quello con la sezione massima. Una volta che una sezione si è plasticizzata, la sua deformazione plastica aumenta linearmente, come lo spostamento imposto. Nel momento in cui lo spostamento viene mantenuto costante, non



Figura 4.4: Esempio 1 - Andamento nel tempo dello spostamento

c'è più incremento di deformazione e la retta indicante ϵ^P diviene orizzontale.

Per quanto riguarda l'andamento della temperatura, si osserva come nel grafico si abbia un intervallo in cui la temperatura nei tre punti considerati aumenta in modo diverso; questa differenza è dovuta allo sfasamento nel tempo della plasticizzazione: nel momento in cui il primo punto si plasticizza, il contributo termico dovuto alla dissipazione meccanica fa aumentare la sua temperatura in misura maggiore di quanto avvenga nel resto della trave, e così via. Quando tutta la trave si è plasticizzata, la dissipazione meccanica diviene circa costante, dal momento che l'incremento di deformazione plastica è lo stesso in tutte le sezioni; la temperatura tende quindi a crescere in modo uniforme in tutta la trave, fino a raggiungere il suo valore massimo all'istante t=1 s. A questo punto, lo spostamento imposto viene mantenuto costante, quindi la deformazione plastica è costante e il suo incremento, ovviamente, nullo. Questo significa che la dissipazione meccanica si annulla e che la temperatura non aumenta più; anzi, per la presenza di meccanismi convettivi di scambio termico, essa diminuisce, tendendo lentamente a uniformarsi alla temperatura esterna, che è nulla.



Figura 4.5: Distribuzione di temperatura lungo la trave all'istante t = 0.24 s



Figura 4.6: Distribuzione di temperatura lungo la trave all'istante t = 0.86 s



Figura 4.7: Distribuzione di temperatura lungo la trave all'istante t= 2 s



Figura 4.8: Esempio 1 - Andamento nel tempo della deformazione plastica



Figura 4.9: Esempio 1 - Andamento nel tempo della temperatura

4.2 Accoppiamento termo-elettrico

In questo esempio, la trave è stata sottoposta a un carico di tipo elettrico: è stata cioè imposta una differenza di potenziale tra le estremità della trave, il cui andamento nel tempo è mostrato nella figura 4.10; tale differenza di potenziale induce un passaggio di corrente nella trave stessa, la quale si surriscalda, come conseguenza dell'effetto Joule. L'estremità vincolata della trave è anche vincolata ad avere potenziale nullo. All'altra estremità, viene applicato un potenziale, il cui andamento (figura 4.10) è suddiviso in tre tratti: un primo tratto ad andamento lineare e crescente fino al tempo t=1 s, seguito da un tratto costante fino a t=2 s e da un altro tratto lineare, questa volta decrescente, fino a t=3 s. Dato che il potenziale passa da un valore nullo a un estremo, al valore imposto all'altro, è evidente come, nel punto B, che è intermedio, esso avrà un valore intermedio tra quelli degli estremi.

Per quanto riguarda la temperatura, si osserva che essa ha un andamento quadratico nei tratti in cui il potenziale varia linearmente, mentre ha andamento lineare dove il potenziale è costante.

Ciò può essere spiegato prendendo per esempio in considerazione il primo tratto ad andamento lineare del potenziale, cioè quello che va da t=0 s a t=1 s, intervallo di tempo che chiameremo Δt . Il calore prodotto per effetto Joule è dato dalla nota espressione $w = \vec{E} \cdot \vec{J}$, che, ricordando che $\vec{J} = \boldsymbol{\sigma}_E \vec{E}$ e che $\vec{E} = -\nabla \vec{V}$, si trasforma in $w = \boldsymbol{\sigma}_E (\nabla \vec{V})^2$. Il gradiente del potenziale si può scrivere come:

$$\nabla V = (V_c - V_a)/L = V_c/L \tag{4.1}$$

dal momento che il potenziale nel punto A è identicamente nullo, con L lunghezza della trave. V_c varia linearmente nel tempo, per cui, detto \bar{V}_c il valore massimo raggiunto (in questo caso pari a 1), al generico istante di tempo t si ha che:

$$V_c = \bar{V}_c \frac{t}{\Delta t} \tag{4.2}$$

dove Δt in questo caso è uguale a 1. Si vede quindi come, essendo la temperatura direttamente proporzionale al quadrato del gradiente di potenziale ed avendo quest'ultimo un andamento lineare nel tempo, la temperatura abbia un andamento quadratico nel tempo.

A differenza di quanto visibile dal grafico, la temperatura non è costante nei vari punti della trave. Questa variazione è dovuta a due fattori: da un lato, lo scambio di calore con l'esterno per convezione; si ha infatti che la temperatura è maggiore nel punto B che, trovandosi al centro della trave, può dissipare calore per convezione solo attraverso la superficie laterale della trave, a differenza dei punti A e C, che si trovandosi alle estremità, dissipano anche attraverso le basi quadrate.

Dall'altro lato, l'irregolarità è dovuta alla variabilità della sezione della trave: ricordando infatti l'espressione del calore dissipato per effetto Joule:

$$w = \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{4.3}$$

al generico istante di tempo, si può scrivere:

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \cdot \hat{n} \tag{4.4}$$



Figura 4.10: Esempio 2 - Andamento nel tempo del potenziale

dove I è l'intensità di corrente che passa attraverso la sezione S e \hat{n} è il versore diretto lungo la normale alla superficie. Poichè I è costante e \hat{n} è sempre diretto lungo l'asse della trave, si vede chiaramente la dipendenza di J dalla sezione, che determina quindi una variazione del calore prodotto e quindi della temperatura nelle varie sezioni della trave.



Figura 4.11: Esempio2 - Andamento nel tempo della temperatura

4.3 SMA: effetto a memoria di forma

All'estremità non vincolata della trave, in SMA, è stato imposto uno spostamento in direzione longitudinale, crescente linearmente, dall'istante t=0 s a t=1 s e poi mantenuto costante e pari al valore massimo raggiunto.

A questo punto, si è aumentata la temperatura esterna al corpo in modo lineare, fino a t=3 s; essendo così la temperatura esterna maggiore di quella della trave, si è generato un flusso di calore, dovuto ai moti convettivi, dall'esterno verso la trave, che si è scaldata, fino a raggiungere una temperatura massima, che è stata poi mantenuta costante fino all'istante t=4 s.

All'inizio della prova, la SMA ha una struttura martensitica multivariante; durante la fase di allungamento, la martensite si trasforma in monovariante. Successivamente, il calore assorbito dalla trave per convezione scalda la trave stessa fino a una temperatura tale per cui si ha la trasformazione da martensite ad austenite. La SMA cerca quindi di recuperare la forma iniziale, ma questo viene impedito perchè lo spostamento è bloccato; nella trave nasce quindi una coazione, dovuta a questo spostamento impedito, come si vede nella figura 4.12.

Osservando il grafico che rappresenta l'andamento nel tempo della forza, si nota, in corrispondenza dell'intervallo di tempo in cui lo spostamento aumenta linearmente, un andamento lineare a tratti, in cui il cambio di pendenza si verifica al momento in cui la martensite si trasforma da multivariante a monovariante. Poi la forza si mantiene circa costante, durante la fase in cui lo spostamento e la temperatura sono costanti. Quando la temperatura raggiunge il valore di trasformazione, come detto, la trave cerca di recuperare la forma originaria: nasce quindi una forza di coazione, alla quale si deve il brusco aumento di forza osservabile nel grafico.

Dal grafico della temperatura nel tempo, si può vedere che il corpo ha una temperatura di partenza pari a -20 °C, tale per cui la SMA è stabile nella fase martensitica. Durante la fase di allungamento della trave, la temperatura resta circa costante, perchè il calore generato durante la trasformazione da martensite multivariante a monovariante è circa uguale al calore disperso nell'ambiente circostante per convezione; terminata tale trasformazione, la temperatura diminuisce, a causa della convezione. Dopo l'istante t=2 s, momento in cui si inizia a riscaldare l'ambiente esterno, si ha un flusso entrante di calore, che innalza la temperatura della trave e che continua anche quando la temperatura esterna resta costantemente uguale al valore massimo raggiunto.



Figura 4.12: Esempio 3 - Andamento nel tempo della forza nella trave



Figura 4.13: Esempio 3 - Andamento nel tempo della temperatura nella trave

4.4 SMA: effetto a memoria di forma sotto carico

All'estremità non vincolata della trave, in SMA, è stata applicata una forza crescente linearmente nel tempo, fino a un valore tale da generare la trasformazione martensitica da multivariante a monovariante. A partire dall'istante t=1 s, si è mantenuta la forza costante (vedi figura 4.14) e contemporaneamente si è fatta variare la temperatura (vedi figura 4.15), modificando la temperatura esterna e inducendo quindi nella trave un flusso convettivo, entrante o uscente a seconda del rapporto tra le temperature interna ed esterna.

Inizialmente la SMA si trova in fase martensitica: la configurazione deformata, con spostamento massimo dell'estremità di 0.5 mm, è quella di equilibrio, sotto l'azione della forza applicata. Aumentando la temperatura tra $M_f e A_f$, la SMA si trasforma e, a parità di forza, si trovano via via diverse configurazioni di equilibrio, corrispondenti a deformazioni sempre minori, fino a quando si raggiunge A_f . La configurazione di equilibrio per $T \ge A_f$ è quella che corrisponde a uno spostamento dell'estremità di soltanto 0.052 mm. Tale comportamento è un esempio di effetto a memoria di forma. Esso è chiaramente riconoscibile osservando il diagramma temperatura spostamento (figura 4.15), plottato a partire dall'istante in cui si fa variare la temperatura, istante in cui la trave ha raggiunto il suo massimo allungamento. Si può osservare nel diagramma l'isteresi tipica delle trasformazioni martensitiche, di cui si è parlato nel capitolo relativo alle SMA.



Figura 4.14: Esempio 4 - Andamento nel tempo della forza nella trave



Figura 4.15: Esempio 4 - Andamento della temperatura in funzione dello spostamento

4.5 Composito: effetto a memoria di forma

Il composito, costituito da una matrice con inseriti elementi in SMA, è stato sottoposto inizialmente a una forza meccanica di trazione, con andamento crescente fino a t=1 s e poi decrescente fino ad arrivare a un valore nullo a t=2 s. Da quel momento in poi la forza resta nulla e si applica una differenza di potenziale tra le estremità del composito, provocando un flusso di corrente che fa aumentare la temperatura per effetto Joule. Inizialmente gli elementi in SMA si trovano a una temperatura in corrispondenza della quale hanno una struttura martensitica multivariante. Durante l'allungamento dovuto alla forza di trazione, la martensite si trasforma in monovariante. Al diminuire della trazione, la matrice, che è elastica, tenta di accorciarsi per recuperare la configurazione iniziale corrispondente a deformazione nulla. Le SMA impediscono però il recupero completo della deformazione: in esse si ha infatti una deformazione residua dell'ordine del 2.5 %, dovuta alla trasformazione martensitica da multivariante a monovariante. Quando la temperatura, che nel frattempo continua ad aumentare, raggiunge un valore per cui si ha la trasformazione in austenite, le SMA recuperano la forma originaria e tutto il corpo torna a deformazione nulla.

Osservando il grafico rappresentante la deformazione nel tempo (figura 4.16), si nota immediatamente che le deformazioni coincidono nelle SMA e nella matrice, come imposto dalla congruenza. Durante l'intervallo da t=0 s a t=1 s, periodo in cui la trazione aumenta, si riconosce facilmente il momento in cui avviene la trasformazione in martensite monovariante, caratterizzato da un cambio di pendenza della retta che rappresenta la deformazione nel tempo. Al tempo t=2 s, quando la trazione di cui ho appena detto. La deformazione residua delle SMA, dovuta alla trasformazione di cui ho appena detto. La deformazione resta quindi costantemente uguale alla deformazione residua, finchè, subito dopo t=2.5 s, inizia a diminuire: raggiunta infatti la temperatura necessaria a innescare la trasformazione in austenite, le SMA recuperano la forma originaria, corrispondente a una deformazione nulla.

Osservando il grafico dello sforzo nel tempo, si nota innanzitutto la differenza di modulo elastico tra le SMA e la matrice, molto meno rigida. Durante la fase in cui la trazione diminuisce, è evidente una differenza di comportamento tra i due materiali: la matrice, elastica, cerca di recuperare interamente la deformazione cui è stata sottoposta, ma è trattenuta dalle SMA, che hanno invece una deformazione residua; la matrice esercita quindi sulle SMA una compressione, mentre le SMA, a loro volta, esercitano una trazione sulla matrice, per evitare che quest'ultima ritorni a deformazione nulla. Questo comportamento opposto dei due materiali continua finchè le SMA non si trasformano, recuperando la forma originaria, situazione cui compete uno sforzo nullo sia nella matrice, sia nelle SMA.



Figura 4.16: Esempio 5 - Andamento nel tempo della deformazione



Figura 4.17: Esempio 5 - Andamento nel tempo dello sforzo

Conclusioni e sviluppi futuri

Tra i diversi tipi di compositi attivi esistenti, questo lavoro si è concentrato su quelli costituiti da una matrice generica, rinforzata con elementi in lega a memoria di forma. Dopo una descrizione delle caratteristiche e dei comportamenti tipici delle leghe a memoria di forma, si è presentata una revisione della letteratura riguardante i compositi, analizzandone i diversi tipi, i modelli utilizzati e le applicazioni.

Si è quindi sviluppato un elemento finito, in grado di modellare il comportamento di tali compositi, tenendo conto delle interazioni tra i diversi campi che intervengono nel problema. Dal momento che la trasformazione nelle SMA viene attivata dal calore prodotto per effetto Joule dal passaggio di una corrente, è stato infatti necessario considerare un problema termo-elettro-meccanico accoppiato. Per quanto riguarda il problema meccanico, è stata fatta l'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, che consente di scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata e di trascurare, nelle equazioni di congruenza, i termini di ordine superiore; oltre al legame costitutivo delle leghe a memoria di forma, sono stati implementati un legame elastico e uno elasto-perfettamente plastico, utilizzati per la matrice. Le equazioni risolutive del campo termico tengono conto di due meccanismi di trasmissione del calore: la conduzione, che avviene all'interno del materiale solido e la convezione, che avviene tra il solido e l'aria in cui è immerso. Infine, le equazioni del campo elettrico sono state ottenute tramite un parallelismo con quelle del campo termico, come descritto nel capitolo 3. Le interazioni tra i campi sono costituite dall'effetto Joule (interazione termo-elettrica), dalla dissipazione meccanica dovuta alla plasticizzazione o alla trasformazione di fase delle leghe a memoria di forma e dalla deformazione termica (interazione termo-meccanica).

L'elemento sviluppato è stato testato, per mezzo del codice a elementi finiti FEAP, su problemi inizialmente molto semplici e via via più complessi, per verificare il funzionamento dei vari accoppiamenti tra i campi e del modello usato per le SMA. Essendo tali test risultati soddisfacenti, si sono risolti semplici problemi su un composito. Tale composito è costituito da una trave di materiale polimerico, caratterizzato da una bassa rigidezza, rinforzata con elementi di SMA in Ni-Ti, distribuiti in modo monodirezionale, nel verso longitudinale della trave. Per la matrice polimerica è stato utilizzato un legame costitutivo elastico, mentre per le SMA ci si è serviti del modello proposto da Souza et al. (1998) e successivamente modificato da Auricchio and Petrini (2001). Si tratta di un modello tridimensionale, in grado di descrivere i comportamenti tipici delle SMA, nell'ipotesi di piccole deformazioni. I test sul composito hanno dimostrato che il modello è in grado di descrivere in modo efficace l'interazione delle SMA con la matrice.

Conclusioni e sviluppi futuri

Uno dei possibili sviluppi futuri del lavoro consiste senz'altro nella rimozione dell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento. Il modello costitutivo utilizzato per descrivere le SMA potrebbe essere migliorato attraverso l'introduzione di parametri diversi per le due fasi delle leghe: si è visto nel primo capitolo, infatti, come martensite e austenite abbiano proprietà fisiche e meccaniche significativamente diverse; allo stato attuale, però, il modello non è in grado di adattare i suoi parametri in funzione della fase in cui si trovano le SMA. Inoltre, sarebbe senz'altro interessante studiare un composito rinforzato con fibre disposte non più soltanto in una direzione ma in diverse direzioni.

Infine, un ulteriore importante sviluppo dello studio potrebbe consistere nella conduzione di esperimenti in laboratorio, per ottenere risultati sperimentali da confrontare con quelli ottenuti con il modello.

Riferimenti bibliografici

- Aboudi, J. (1997). The response of shape memory alloy composites. Smart Materials and Structures 6, 1–9.
- Auricchio, F. and L. Petrini (2001). Algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 00, 1–33.
- Baburaj, V., M. Kawai, K. Kinoshita, and T. Koga (1996). An accurate prediction of specific damping capacity of tini sma composite through a three-dimensional constitutive model. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 7, 145– 149.
- Barrett, R. and R. S. Gross (1996). Super-active shape-memory alloy composites. Smart Materials and Structures 5, 255–260.
- Bidaux, J. E., J. A. E. Manson, and R. Gotthardt (1994). In Proceedings of the forst international conference on shape memory and superelastic technologies, SMST, Fremon.
- Birman, V. (1997). Stability of functionally graded shape memory alloy sandwich panels. *Smart Materials and Structures* 6, 278–286.
- Birman, V., K. Chandrashekhara, and S. Sain (1997). Global strength of hybrid shape memory composite plates subjected to low velocity impact. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 16, 791–809.
- Boyd, J. G., D. C. Lagoudas, and Z. Bo (1994). Micromechanics of active composites with sma fibers. *Journal of Engineering Materials and Technology* 116, 337–347.
- Buelher, W. J., J. V. Gilfrich, and K. C. Weiley (1963). Journal of Applied Physics 34, 1467.
- Cantwell, W. J. and J. Morton (1991). The impact resistance of composite materials. Composites 22(5), 347–362.
- Chen, Q. and C. Levy (1999). Vibration analysis and control of flexible beam by using smart damping structures. *Composites 30*, 395–406.
- de Blonk, B. J. and D. C. Lagoudas (1998). Actuation of elastomeric rods with embedded two-way shape memory alloy actuators. Smart Materials and Structures 7, 771–783.
- Dell'Acqua, L. C. (1992). Meccanica delle strutture. McGraw-Hill.

- Dunne, D. P. and N. F. Kennon (1981). Metals Forum 4, 176.
- Ellis, R. L., F. Lalande, H. Jia, and C. A. Rogers (1997). Proceedings 38th aiaa/asme/ asce/ahs/asc structures, structural dynamics and materials conference. Kissimmee, Fl.
- Epps, J. and R. Chandra (1997). Shape memory alloy actuation for active tuning of composite beams. *Smart Materials and Structures* 6, 251–264.
- Furuya, Y. (1996). Design and material evaluation of shape memory composites. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 7, 321–330.
- Gaudenzi, P. and R. Liotino (1998). Micromechanics of shape memory composites.
- Graesser, E. J. and F. A. Cozzarelli (1994). A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloys. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 5, 78–89.
- Hodgson, D. E. and R. J. Biermann (1992). Shape memory alloys. Metals Handbook 2.
- Humbeeck, J. V., Y. Liu, R. Stalmans, and L. Delaey (1997). Journal of Alloys and Compounds 247, 115–121.
- Humbeeck, J. V., R. Stalmans, and P. Besselink (1998). *Metals as biomaterials*. J. A. Helsen and H. J. Breme.
- Hurlbut, B. J. and M. E. Regelbrugge (1996). Evaluation of a constitutive model for shape memory alloys embedded in shell structures. *Journal of Reinforced Plastics* and Composites 15, 1249–1261.
- Jackson, C. M., H. J. Wagner, and R. J. Wasilewski (1972). 55-nitinol-the alloy with a memory: its physical metallurgy, properties and applications: a report. *NASA Washington*.
- Kakeshita, T., K. Kuroiwa, K. Shimizu, T. Ikeda, A. Yamagishi, and M. Date (1993). Material Transactions, 415.
- Lavernia, E. J., R. J. Perez, and J. Zhang (1995). Metallurgical and Materials Transactions 26A, 2803.
- Lemaitre, J. and J. Chaboche (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press Cambridge, MA.
- Liang, C. and C. A. Rogers (1990). One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 1, 207–234.
- Liang, C. and C. A. Rogers (1991). Design of shape memory alloy coils and their applications in vibration control. In *Proceedings of the conference on recent advances in active control of sound and vibration*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- Lindquist, P. G. and C. M. Wayman (1990). Engineering aspects of shape memory alloys. Butterworth-Heinemann.
- Maji, A. K. and I. Negret (1998). Smart prestressing with shape memory alloy. *Journal* of Engineering Mechanics, 1121–1128.

- Maki, T. (1990). Material Science Forum 56 58, 156.
- Mari, D. and D. C. Dunand (1995). *Metallurgical and Materials Transactions 26A*, 2833.
- Ostachowicz, W., M. Krawczuk, and A. Zak (1999). Natural frequencies of a multilayer composite plate with shape memory alloy wires. *Finite Elements in Analysis and Design 32*, 71–83.
- Otsuka, K. (1994). Shape memory Materials '94. Y. Chu and H. Tu.
- Ottosen, N. and H. Peterson (1992). Introduction to the Finite Element Method. Prentice Hall.
- Paine, J. S. N. and C. A. Rogers (1993). Adaptive structures and material systems. G.P. Carman and E. Garcia.
- Paine, J. S. N. and C. A. Rogers (1994a). Adaptive structures and composite materials.E. Garcia et al.
- Paine, J. S. N. and C. A. Rogers (1994b). Adaptive structures and composite materials: analysis and application. E. Garcia.
- Paine, J. S. N. and C. A. Rogers (1994c). The response of sma hybrid composite materials to low velocity impact. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 5, 530-535.
- Pisoni, G. G. C. (1996). Elementi di trasmissione del calore. Masson editoriale Veschi.
- Ro, J. and A. Baz (1995a). Nitinol-reinforced plates: part 1. thermal characteristics. Composites Engineering 5, 61–75.
- Ro, J. and A. Baz (1995b). Nitinol-reinforced plates: part 2. static and buckling characteristics. *Composites Engineering* 5, 77–90.
- Ro, J. and A. Baz (1995c). Nitinol-reinforced plates: part 3. dynamic characteristics. Composites Engineering 5, 91–106.
- Rodonò, G. and R. Volpes (1995). Fisica tecnica 1. Dario Flaccovio.
- Rogers, C. A., C. Liang, and C. R. Fuller (1991). Modelling of shape memory alloy hybrid composites for structural acoustic control. *Journal of the Acoustical Society* of America 89, 210–220.
- Sacco, E. (1997). Argomenti di Scienza delle Costruzioni. Dipartimento di ingegneria industriale Università di Cassino.
- Silvestrini, C. M. V. (1995). Fisica II. Liguori editore.
- Song, G., B. Kelly, and B. N. Agrawal (2000). Active position control of a shape memory alloy wire actuated composite beam. *Smart Materials and Structures* 9, 711–716.
- Souza, A. C., E. N. Mamiya, and N. Zouain (1998). Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations. *European Journal of Mechanics*, A: Solids 17, 789–806.

- Sullivan, B. J. (1994). Analysis of properties of fiber composites with shape memory alloy constituents. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 5, 825– 832.
- Taylor, R. L. (2000). Feap Theory Manual.
- Thompson, D. M. and O. H. Griffin (1993). Finite elemnt predictions of active buckling control of stiffened panels. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 4, 243-247.
- Venkatesh, A., J. Hilborn, J. E. Bidaux, and R. Gotthardt (1992). Active vibration control of flexible linkage mechanisms using shape memory alloy fiber-reinforced composites. In 1st european conference on smart structures and materials, Glasgow.
- Wang, G. and M. Shahinpoor (1997). Design, prototyping and computer simulations of a novel large bending actuator made with a shape memory alloy contractile wire. *Smart Materials and Structures* 6, 214–221.
- Wayman, C. M. and T. W. Duerig (1990). Engineering Aspects of Shape Memory Alloys. Butterworth-Heinemann.
- White, S. R., M. E. Whitlock, J. B. Ditman, and D. A. Hebda (1993). Adaptive structures and material systems. G. P. Carman and E. Garcia.
- Yang, P. and D. A. Payne (1992). Journal of Applied Physics 71, 1361.
- Z.G.Wei, R. Sandstrom, and S. Miyazaki (1998). Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. *Journal of Material Science* 33, 3763–3783.
- Zhang, C. S., L. C. Zhao, T. W. Duerig, and C. M. Waymann (1990). Scripta Metallurgica et Materialia 24, 1807.