

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTÁ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E ARCHITETTURA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile – Architettura

IL RAPPORTO TRA STRUTTURA
E FORMA ARCHITETTONICA

Relatore:

Prof. Marco Morandotti

Correlatori:

Prof. Ferdinando Auricchio

Ing. Giuseppe Balduzzi

Tesi di laurea di:

Alessandro Muggetti

Matricola: 384509

Anno Accademico 2013/14

alla mia famiglia

Indice

<u>Indice delle Figure</u>	V
<u>Indice delle Tabelle</u>	IX
<u>Prefazione</u>	X
<u>Sommario</u>	XI
1. <u>Introduzione</u>	1
1.1. Il valore della tettonica	3
2. <u>Struttura e forma nel tempo</u>	6
2.1. Dal Gotico alle Esposizioni Universali	6
2.2. Il caso di Antoni Gaudì	8
2.3. I progettisti ed il rapporto tra struttura e forma	11
2.3.1. Eduardo Torroja Miret	11
2.3.2. Pier Luigi Nervi	12
2.3.3. Riccardo Morandi	14
2.3.4. Robert Maillart	15

2.3.5. Félix Candela	16
2.3.6. Sergio Musmeci	19
2.3.7. Eladio Dieste	22
2.3.8. Santiago Calatrava	23
3. <u>Il tema dell'ottimizzazione strutturale</u>	25
3.1. L'ottimizzazione con il metodo delle linee isostatiche	26
3.2. L'ottimizzazione con il metodo dei modelli fisici	27
3.3. L'ottimizzazione tramite calcoli manuali	30
3.4. L'ottimizzazione topologica con l'utilizzo di programmi di calcolo	30
3.5. I principi dell'ottimizzazione in diversi ambiti	32
4. <u>L'ottimizzazione strutturale con calcoli manuali:</u>	
<u>modelli e procedure disponibili</u>	35
4.1. Definizione geometrica di trave	36
4.2. Il metodo classico, la trave Eulero – Bernoulli	37
4.3. La teoria del taglio efficace	39
4.4. Il metodo avanzato basato sulla formulazione del problema 2D	43
4.5. La trave Gerber	46
4.6. Conclusioni	47

5. <u>L'ottimizzazione strutturale per schemi statici noti</u>	49
5.1. Valutazione dell'errore nell'utilizzo del metodo proposto da Timoshenko	50
5.1.1. Caso 1a - Trave simmetrica sottoposta al carico P	50
5.1.2. Caso 1b - Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P .	54
5.1.3. Caso 2a - Trave simmetrica sottoposta al carico q	57
5.1.4. Caso 2b - Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q .	59
5.1.4.a. Caso 2b - Il rapporto H_0/L	61
5.1.5. Direzione degli sforzi principali	63
5.2. Determinazione dell'altezza della trave con i criteri di Von Mises e Tresca . . .	65
5.2.1. Criterio di Von Mises ($\sigma_y \neq 0$).	66
5.2.2. Criterio di Von Mises ($\sigma_y = 0$).	67
5.2.3. Criterio di Tresca ($\sigma_y \neq 0$).	67
5.2.4. Criterio di Tresca ($\sigma_y = 0$)	68
5.3. Trave ad uniforme resistenza nel caso studio dell'articolo sul taglio efficace . .	68
5.3.1. Prima combinazione di carico	69
5.3.2. Seconda combinazione di carico	71
5.3.3. Terza combinazione di carico	76
5.3.4. Quarta combinazione di carico	78
5.3.5. Quinta combinazione di carico	80
5.3.6. Sesta combinazione di carico	82
5.4. Conclusioni	87

6. <u>Applicazione dei risultati ottenuti ad un caso reale</u>	89
6.1. Il binomio mercato-città e il Mercato delle Vettovaglie di Livorno	89
6.2. Calcoli di progetto	91
6.2.1. Soletta in calcestruzzo armato	91
6.2.2. Trave a sbalzo	95
6.2.3. Trave Gerber	99
6.2.4. Pilastro appoggio B (h = 5 m)	105
6.2.5. Pilastro appoggio B (h = 4 m)	108
6.2.6. Plinto di fondazione appoggio B (h = 5 m)	111
6.2.7. Plinto di fondazione appoggio B (h = 4 m)	115
6.2.8. Impianto fotovoltaico	118
6.3. Conclusioni	121
7. <u>Conclusioni</u>	122
<u>Bibliografia</u>	124

Indice delle Figure

2.1 Cattedrale di Santo Stefano, Bourges, 1195 – 1270	7
2.2 Gaudì A., Cancellò della Finca Guèll, Parco Guèll, Barcellona, 1900 - 1914.	9
2.3 Gaudì A., Colonne del porticato di Parco Guèll, Barcellona, 1900 - 1914.	10
2.4 Torroja E., Tribuna dell'Ippodromo, Madrid, 1935 – 1941	12
2.5 Torroja E., Prova di carico	12
2.6 Nervi P.L., Aula delle udienze pontificie, Città del Vaticano, 1966 - 1971	13
2.7 Nervi P.L., Hangar, Orvieto, 1935	14
2.8 Morandi R., Ponte Bisantis, Catanzaro, 1959 - 1962	15
2.9 Morandi R., Ponte General Urdaneta, Maracaibo, 1957 - 1962	15
2.10 Maillart R., Ponte sul Salginatobel, Schiers, 1929 - 1930	16
2.11 Maillart R., Ponte sullo Schwandbach, Berna, 1932 - 1933	16
2.12 Candela F., Ristorante Los Manantiales, Xochimilco, 1957 - 1958.	17
2.13 Candela F., Laboratori Lederle, Città del Messico, 1956	18
2.14 Candela F., Stabilimento Bacardi, Cuantitlàn, 1960.	18
2.15 Musmeci S., Ponte sul Basento, Potenza, 1971 - 1976	20
2.16 Musmeci S., Progetto per il Ponte sullo Stretto, Messina, 1969	21
2.17 Dieste E., Chiesa del Cristo Operaio, Atlàntida, 1958 - 1960.	23
2.18 Calatrava S., Città delle Arti e della Scienza, Valencia, 1996 – 2009	24

3.1 Nervi P. L., Lanificio Gatti, Roma, 1951	26
3.2 Modelli di soluzione d'acqua saponata	28
3.3 Modello in metacrilato, ponte sul Basento	28
3.4 Modello in neoprene, ponte sul Basento	28
3.5 Modello di fili appesi, chiesa	29
3.6 Modello di fili appesi, ponte	29
3.7 Cripta della Chiesa di Santa Coloma, Barcellona	29
3.8 Isozaki A., Progetto per la nuova stazione TAV, Firenze	30
3.9 Balestra in un mezzo di trasporto ferroviario	32
3.10 Gru di Culmann e schema di una testa di femore	33
4.1 Trave e relativo sistema di coordinate adottato.	36
4.2 Ricostruzione degli stress nella sezione	39
4.3 Ponte in c.a. di altezza variabile con sbalzi alle estremità	40
4.4 Schematizzazione che giustifica la formula secondo la teoria del taglio efficace	41
4.5 Geometria della trave, sistema di coordinate, dimensioni e notazione adottata	43
4.6 Vettore unitario esterno valutato al limite superiore della sezione	44
4.7 Ricostruzione degli stress nella sezione	45
4.8 Tipologie possibili di distribuzione delle cerniere	46
4.9 Trave Gerber sottoposta al cedimento δ di un appoggio	47
5.1 Trave simmetrica sottoposta al carico P	51
5.2 Trave simmetrica sottoposta al carico P , esempio	52
5.3 Distribuzione delle σ al bordo superiore ed inferiore	54

5.4 Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P	54
5.5 Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P , esempio	55
5.6 Distribuzione delle σ al bordo superiore ed inferiore	57
5.7 Trave simmetrica sottoposta al carico q	57
5.8 Trave simmetrica sottoposta al carico q , esempio	58
5.9 Distribuzione costante delle σ al bordo superiore ed inferiore	59
5.10 Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q ,	59
5.11 Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q , esempio	60
5.12 Distribuzione costante delle σ al bordo superiore ed inferiore	61
5.13 Variazione di α lungo la sezione longitudinale della trave	65
5.14 Trave a sbalzo sottoposta al carico concentrato P all'estremo libero	65
5.15 Prima combinazione di carico e diagramma del momento flettente	69
5.16 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	71
5.17 Seconda combinazione di carico e diagramma del momento flettente	71
5.18 Configurazione geometrica ottimale della Campata 1	72
5.19 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	74
5.20 Configurazione geometrica ottimale della Campata 3.	75
5.21 Terza combinazione di carico e diagramma del momento flettente	76
5.22 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	77
5.23 Quarta combinazione di carico e diagramma del momento flettente	78
5.24 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	79
5.25 Quinta combinazione di carico e diagramma del momento flettente	80
5.26 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	81
5.27 Sesta combinazione di carico e diagramma del momento flettente	82

5.28 Configurazione geometrica ottimale della Campata 2	83
5.29 Configurazione ottimale della trave simmetrica rispetto all'asse longitudinale . . .	85
5.30 Configurazione ottimale della trave con profilo piano superiormente	87
6.1 Schema statico e diagrammi della soletta in calcestruzzo armato	92
6.2 Sezione trasversale della soletta in calcestruzzo armato	93
6.3 Schema statico e diagrammi della trave a sbalzo	96
6.4 Sezione trasversale della trave a sbalzo all'incastro	97
6.5 Schema statico, diagrammi e sezione longitudinale ideale della trave Gerber	100
6.6 Sezione trasversale della trave Gerber agli appoggi e in mezzzeria	102
6.7 Schema statico e diagramma del pilastro appoggio B (h = 5 m)	106
6.8 Sezione trasversale del pilastro appoggio B (h = 5 m)	106
6.9 Schema statico e diagramma del pilastro appoggio B (h = 4 m)	109
6.10 Sezione trasversale del pilastro appoggio B (h = 4 m)	109
6.11 Pianta del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 5 m)	112
6.12 Sezioni del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 5 m)	114
6.13 Pianta del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 4 m)	116
6.14 Sezione del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 4 m)	118

Indice delle Tabelle

5.1 Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica	53
5.2 Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica	56
5.3 Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica	59
5.4 Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica	60
5.5 Differenze nella distribuzione delle σ al variare del rapporto H_0/L	62
5.6 Errore commesso con l'utilizzo del metodo proposto da Timoshenko	63
5.7 Differenze nello sviluppo delle fessure tra Timoshenko ed i criteri di verifica	64
5.8 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	70
5.9 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 1 al variare di x	72
5.10 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	73
5.11 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 3 al variare di x	75
5.12 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	77
5.13 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	79
5.14 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	81
5.15 Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x	83
5.16 Valori discreti dell'altezza della trave simmetrica rispetto all'asse longitudinale	84
5.17 Valori discreti dell'altezza della trave con profilo piano superiormente	86
6.1 Rendimento dell'impianto fotovoltaico in copertura, esposizione sud – est	119
6.2 Rendimento dell'impianto fotovoltaico in copertura, esposizione nord – ovest	120

Prefazione

La tesi studia il rapporto tra il comportamento strutturale e la forma architettonica. Inizialmente si indaga sull'incidenza di questo tema in riferimento alle opere esistenti che ne riflettono il valore intrinseco e le convinzioni teoriche che hanno portato a determinate realizzazioni architettoniche. In particolare si pone poi l'attenzione verso quei criteri di ottimizzazione strutturale che hanno le potenzialità di fungere da elemento di contatto tra una struttura correttamente realizzata e l'equivalente formale che ne deriva. Si procede poi, tramite l'applicazione di un metodo di ottimizzazione strutturale svolto tramite calcoli manuali alla determinazione della sezione ottimale per travi a sezione trasversale variabile per differenti combinazioni di carico. Una volta applicato tale criterio, si prosegue con la realizzazione di un progetto nel quale la trave a sezione trasversale variabile riveste un ruolo di primo piano e che vuole essere indicativo dei risultati che si possono ottenere tramite il riconoscimento alla struttura di compiti che non debbano essere unicamente funzionali, ma che al contrario possono contribuire a definire la forma in architettura.

Sommario

Nel presente documento il Capitolo 1 ci consentirà di introdurre le prime considerazioni sull'argomento al fine di comprendere l'importanza e le implicazione che il rapporto sopra descritto riveste in ambito architettonico e costruttivo. Nel Capitolo 2 si riporteranno i contributi forniti da architetti ed ingegneri, insieme agli spunti forniti dalla loro ricerca sia formale che strutturale. Passeremo poi al Capitolo 3, in cui verranno presentati i principali metodi di ottimizzazione strutturale. Nel Capitolo 4 verrà introdotto l'elemento strutturale trave, che in seguito sarà oggetto di ottimizzazione, riportando le principali teorie che la caratterizzano. La valutazione della precisione dei metodi proposti sarà infatti oggetto del Capitolo 5 nel quale, oltre a constatare l'errore effettivo commesso nell'utilizzo dei metodi riportati dalla letteratura classica sull'argomento, in particolare concentrando l'attenzione sugli sforzi, verrà effettuato un primo studio di ottimizzazione strutturale di trave nell'ambito di un caso introdotto proprio nel capitolo precedente. Nel Capitolo 6 si applicherà l'ottimizzazione strutturale ad un caso reale, ossia utilizzando i metodi approvati nei capitoli precedenti, al fine di progettare una copertura per il Mercato di Via Buontalenti di Livorno. Nel presente capitolo infatti si progetterà la forma, verrà effettuato un predimensionamento delle armature, mentre alcune verifiche sono state omesse perché esulano degli obiettivi della tesi.

Infine nel Capitolo 7 si trarranno le dovute conclusioni in merito al lavoro svolto, sottolineando come i processi di ottimizzazione strutturale siano ancora oggi oggetto di studio ed abbiano la capacità di offrire importanti spunti per la definizione architettonica di un'opera.

1. Introduzione

Una prima considerazione necessaria deve fare riferimento alla profonda convinzione che forma (architettonica) e struttura (ingegneristica) non debbano vivere di vita propria. Successivamente vengono quindi sviluppate alcune analisi che, muovendo da considerazioni di ottimizzazione strutturale, si propongono di fornire una visione comune di questi aspetti solo apparentemente duali. La progettazione ottimale di una struttura non può prescindere dallo studio del trasferimento delle forze all'interno di essa. L'approccio che molto spesso viene erroneamente utilizzato è quello di dare forma all'oggetto architettonico, partendo da considerazioni che sono le più varie, per poi passare ad una progettazione strutturale che possa portare all'effettiva realizzazione dello stesso, senza che la struttura possa contribuire a plasmare la forma dell'elaborato. Troppo frequentemente alla struttura viene attribuito quale unico compito quello di assorbire il flusso di forze, senza dare fastidio e senza occupare troppo spazio. La concezione della struttura in molti casi risulta essere un compito di nessuno, l'architetto suppone che lo sviluppo strutturale formale spetti all'ingegnere, quest'ultimo troppo spesso si limita a calcolare una struttura la cui forma deriva da considerazioni che si suppone non siano di sua competenza. La struttura viene quasi trattata quale incidente inevitabile, con la speranza di riuscire a collocarla nel minor spazio possibile.

Essa invece deve essere considerata come elemento razionale in grado di dare un significato alle forme architettoniche. Resta da vedere quale delle due professioni deciderà di esplorare questo campo equidistante dalle stesse. Come segno distintivo dello svilimento della parola forma, possiamo pensare al recente tentativo di sostituirla con il termine “plastica”, inadeguato ed inferiore in quanto ad espressività. È giunto quindi il momento di rivendicare il significato della parola forma, definendola correttamente come “l’insieme delle qualità che fanno di ogni cosa ciò che è”. Se pensiamo a questo significato, studiare la forma è indagare sul principio formativo fondamentale che dà origine all’esistenza delle cose. Essa non può essere arbitraria, ma deve soddisfare molti requisiti, tra questi il fattore estetico e quello strutturale. Risulta quasi impossibile quantificare il primo, nonostante i molti tentativi di razionalizzarlo secondo teorie matematiche delle proporzioni e dei colori, per liberarci dal compito della composizione. Lo stesso vale per il fattore strutturale, i tentativi di razionalizzarlo dimenticano anche i limiti e la missione della tecnica analitica. In entrambi i casi, come ogni processo artistico, dovremmo invece parlare di intuizione. Sono sconsolanti gli sforzi di importanti architetti che provano a disegnare strutture originali ed espressive, senza possedere le conoscenze minime necessarie per tale compito. Tale comportamento ha portato, tra le diverse strade intraprese, anche a ciò che potremmo definire come uno “strutturalismo al negativo”, basato su una simulata inversione dei principi strutturali eterni. È necessario invece ricordare che i migliori strutturalisti hanno acquisito conoscenza e mestiere dopo lunghi anni di apprendistato e di esperienza su di un tema particolare che li interessa. È un’evoluzione naturale, basata sul copiare e sulla trasformazione, modificando gradualmente quanto si è fatto.

Nessun architetto strutturalista invece, accetta per principio di utilizzare una struttura nota. Essa deve essere originale, ciò dimostra non una ricerca strutturale, ma un affanno esibizionista. Se non vogliamo che l'arte della costruzione si paralizzi, è necessario dedicare i propri sforzi alla ricerca di nuove forme resistenti. In questi termini, sebbene il lavoro non abbia, in origine, pretese architettoniche, i suoi risultati possono contribuire ad arricchire l'architettura.

1.1. Il valore della tettonica

Ad oggi l'idea di rappresentazione è stata sostituita dall'idea di simulazione e di immagine, ciò ha portato alla svalutazione culturale della tettonica, intesa come il complesso degli elementi costruttivi, strutturali e statici. Essa deve riuscire a radicare l'architettura al suo fondamento, deve farsi largo tra l'espansione della dimensione produttivistica della tecnica e quella estetizzante dei processi di decostruzione e di spettacolo. Dobbiamo riuscire a riequilibrare il problema della costruzione delle strutture, che sono la matrice della definizione spaziale, con la spinta all'interpretazione spaziale dell'architettura odierna. L'importanza della struttura risiede in un ambito della concezione architettonica che deve oltrepassare i confini del calcolo e della verifica. Pensiamo ad esempio alle fondazioni di un edificio, quasi sempre nascoste all'occhio di chi ammira ed usa lo stesso. Esse rappresentano un processo di volontà, di forma, di una ricerca di compatibilità e di dialogo, sono quindi il piano da cui prende forma l'architettura. Le fondazioni sono elementi essenziali di studio nel momento in cui si analizzi il legame esistente tra una data architettura ed il suo contesto, sono inoltre il luogo certo dell'archeologia futura.

Dobbiamo arricchire la priorità data allo spazio, senza voler negare il carattere volumetrico della forma architettonica, ma riconsiderando la costruzione e i metodi strutturali attraverso i quali essa deve necessariamente essere portata a compimento. La tettonica serve a consentirci di controbilanciare la tendenza attuale dell'architettura, che si rivede nella derivazione della propria legittimità a partire da discorsi che non le appartengono. Basti pensare alle avanguardie del Movimento Moderno, esse seguono la scia delle arti figurative. Sono state adattate all'architettura forme di ricerca sviluppate in un ambito non appartenente alla stessa. Sekler definiva la tettonica come una data espressività derivante dalla resistenza statica della forma costruttiva, in modo tale che l'espressione risultante non si possa giustificare soltanto in termini di struttura e di costruzione. Egli sosteneva che fosse possibile giungere ad una sottile variazione espressiva partendo da combinazioni analoghe di struttura e costruzione. Nel momento in cui la struttura e la costruzione si dimostrano reciprocamente interdipendenti, il potenziale tettonico dell'insieme deriva dall'articolazione delle sue connessioni e dalla disposizione armonica e proporzionale delle varie parti dell'opera stessa (Frampton 2005). Sekler considera tre concetti legati tra loro ma distinti: struttura, costruzione e tettonica. Nel linguaggio comune la distinzione tra struttura e costruzione è spesso sfocata e l'utilizzo della parola tettonica è molto raro. Mentre siamo inclini a pensare al termine costruzione come il risultato di una attività ossia il costruire, non sembra invece così ovvio pensare alla parola struttura come il risultato di una attività ossia lo strutturare. La struttura fa quindi riferimento ad un concetto generale ed astratto che si riferisce ad un sistema destinato a fare fronte alle forze in gioco nell'edificio, la costruzione è invece la concreta realizzazione di un principio o di un sistema che può essere effettuata in diversi modi e con l'utilizzo di diversi materiali.

Quando un concetto strutturale trova la sua implementazione attraverso la costruzione, il risultato rifletterà una certa qualità espressiva che sicuramente avrà a che fare con il gioco delle forze e la corrispettiva disposizione delle parti dell'edificio. La relazione tra la forma e le forze porta così al concetto di tettonica. Tra il 1600 ed il 1700 era diffusa l'idea secondo cui un edificio non dovesse essere solamente solido ma dovesse anche essere percepito come tale. In questi termini la forma dell'architettura si ritrova ad essere condizionata dall'empatia. La tettonica può quindi essere definita come la particolare manifestazione di empatia nel campo dell'architettura. Lo stesso Semper riteneva che, al fine di rendere espressive le forme tettoniche, abbiamo trascritto noi stessi in termini di architettura. Attraverso la tettonica l'architetto può rendere visibile quel tipo di esperienza della realtà che fa parte del dominio dell'artista, nel nostro caso l'esperienza delle forze in relazione alla forma negli edifici. Queste strutture sono realizzate attraverso la costruzione e ricevono espressione visiva attraverso la tettonica (Seckler 1965). Colonne, muri e travi possono essere pensati in termini di frequenza, schema, semplicità, regolarità, casualità e complessità. Come tali le strutture possono essere utilizzate per definire lo spazio, creare unità, suggerire movimento, o sviluppare composizione e modulazione. Quando viene data voce alla struttura, essa contribuisce ad arricchire il significato dell'architettura, a volte può addirittura diventare l'elemento di maggior significato in un edificio. Ad ogni modo dobbiamo comunque precisare che l'esposizione della struttura non è un requisito obbligatorio per una architettura esemplare. Essa lo diventa solo nel momento in cui necessaria per raggiungere un obiettivo specifico dell'oggetto architettonico. La struttura dovrà quindi essere esposta solo negli edifici in cui essa rappresenti l'espressione dell'idea architettonica (Charleson 2005).

2. Struttura e forma nel tempo

2.1. Dal Gotico alle Esposizioni Universali

Nella storia dell'architettura si ritrovano spesso edifici che riassumono in modo molto chiaro la coincidenza tra forma e struttura. Nel periodo gotico le motivazioni che portano a tale coincidenza sono allo stesso tempo spirituali e scientifiche. In detto periodo si perfeziona il sistema ad ossatura, la tecnica degli archi ogivali riduce le spinte laterali, archi rampanti e contrafforti divengono mezzi per far fronte alle spinte. Le linee di forza e le linee isostatiche vanno a coincidere con quello che è il linguaggio figurativo. Il perfetto connubio tra struttura e forma nel periodo gotico è da ricercare nei metodi propri della progettazione del tempo. La progettazione strutturale degli edifici nel XII e XIII secolo non era basata sulla statica come la intendiamo oggi. Piuttosto essa può essere accostata alla geometria nel significato che tale termine aveva nei secoli sopra citati. Tramite questa disciplina possiamo così assistere ad una straordinaria corrispondenza tra forma e struttura perché subordinate ad un ordine geometrico generale ed ordinatore dell'insieme. Nell'arco di due secoli si assistette a modifiche nella progettazione delle cattedrali che avvennero rapidamente e non furono dettate da uno sviluppo tecnologico, il cambiamento importante avvenne nella mente dei progettisti e dei costruttori (Addis 2003).



Fig. 2.1 – Cattedrale di Santo Stefano, Bourges, 1195 – 1270

Tra coloro che producono opere di architettura a partire da riflessioni che non siano puramente formali è necessario citare Filippo Brunelleschi. Nella cupola di Santa Maria del Fiore abbiamo un esempio della sua capacità di coniugare in un unico oggetto: pensiero, arte, scienza nuova, poetica e genio. Mentre un evidente tratto del momento di separazione tra le figure dell'ingegnere e dell'architetto nel mondo delle costruzioni lo ritroviamo in Francia. Nell'Ottocento l'esistenza dell'École des Beaux-Arts e dell'École Polytechnique certificarono la frattura esistente tra le differenti modalità di pensiero. Quest'ultima infatti costituisce il primo tentativo di stabilire un vincolo tra scienza e vita, esplica la volontà di immettere nell'industria le applicazioni pratiche delle scoperte in campo matematico e fisico (Giedion 1984). Nel periodo ottocentesco poi, l'ingegneria applica alle costruzioni una metodologia di realizzazione che sia libera da mode formali e continuamente alla ricerca di integrazione tra funzione, costruzione e immagine.

In questo periodo lavorano personalità di grande importanza e di grande nome quale è ad esempio Gustav Eiffel, soprattutto dopo l'Esposizione Universale del 1889 a Parigi. Nelle sue opere, si può vedere come non ci sia un'idea formale alla base, il risultato si ottiene con la coerenza progettuale derivata dallo studio tecnico e costruttivo. Diverse sono quindi le opere che, esplicitamente progettate per risolvere problemi essenzialmente costruttivi, spiccano per la capacità di ricomprendere una volontà architettonica ordinatrice dell'insieme e dei dettagli.

2.2. Il caso di Antoni Gaudì (1852 – 1926)

Figura essenziale nella trattazione dei principali sostenitori del rapporto diretto che deve gioco forza interessare la struttura e la forma quali elementi della progettazione profondamente legati è quella di Antoni Gaudì. Ritiene fondamentale realizzare una perfetta corrispondenza tra l'involucro esterno dell'edificio ed il suo spazio interno, mira al raggiungimento dell'armonia tra il sistema costruttivo e la rappresentazione di idee. Egli attraverso un metodo che consisteva essenzialmente nella sperimentazione prima della costruzione, e durante la progettazione, affrontava la stessa in un modo tanto particolare che si dubitava, al suo tempo, che tali metodi potessero effettivamente garantire sicurezza statica ai suoi edifici. Si prenda ad esempio il cancello della Finca Guëll (Fig. 2.2). La figura rappresenta un drago dalle fauci spalancate, ma la parte superiore, cioè la linea che individua l'ala del drago, è conformata secondo quello che è il diagramma del momento di una trave incastrata su un lato.



Fig. 2.2 – Gaudí A., Cancellone della Finca Güell, Parco Güell, Barcellona, 1900 - 1914

Nelle sue opere a funzione religiosa si pone quale obiettivo il superamento dell'impianto statico della chiesa gotica. Egli punta infatti sull'utilizzo di elementi adatti ad assorbire tutte le sollecitazioni strutturali volontariamente ricercate di sola compressione. Nell'impianto del tempio della Sagrada Família il sistema strutturale raccoglie direttamente le sollecitazioni provenienti dai centri di gravità delle masse delle coperture, vengono poi scomposte tramite ramificazioni in una serie di elementi successivi localizzati e inclinati secondo le risultanti delle pressioni. In questo modo la sezione degli stessi può essere ridotta in relazione alla resistenza del materiale, inoltre ogni colonna sostiene singolarmente una propria parte di copertura. In questo modo l'architetto riesce a svincolare le pareti esterne dalla funzione portante delle coperture (Fantone 1996). Anche all'interno del Parco Güell, possiamo notare come alcuni elementi siano stati modellati in base al flusso delle forze che li attraversano.

Ad esempio possiamo osservare che le colonne dei porticati sono inclinate al fine di poter scaricare a terra le spinte provenienti dai camminamenti sovrastanti (Fig. 2.3).

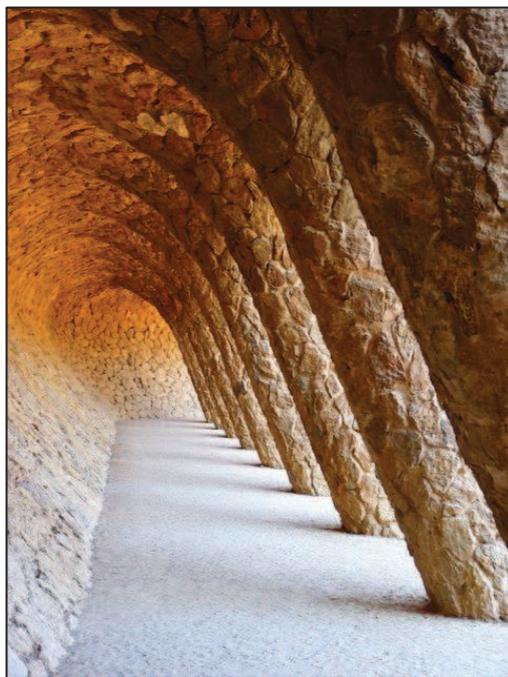


Fig. 2.3 – Gaudì A., Colonne del porticato di Parco Guëll, Barcellona, 1900 - 1914

Gaudì era solito utilizzare dei modelli appesi che, una volta rovesciati, consentivano di definire le forme da dare agli elementi dei suoi progetti. L'utilizzo di tali modelli ha consentito a Gaudì di realizzare i pilastri della cripta nella chiesa di Santa Coloma de Cervellò, essi si inclinano per adeguarsi alle tensioni alle quali sono sottoposti. Dobbiamo però precisare che per Gaudì l'aspetto meccanico non deve imporsi su quello plastico. Le differenze riscontrabili, tra il modello funicolare e la parte costruita della cripta, lasciano pensare che tale modello rappresenti solo una fase di studio preliminare necessaria a sviluppare un'intuizione iniziale. La cripta rappresenta inoltre l'attacco a terra della chiesa, egli probabilmente forza in alcuni punti le necessità strutturali a vantaggio di una maggiore espressività degli elementi e di una migliore integrazione dell'opera con il territorio circostante.

2.3. I progettisti ed il rapporto tra struttura e forma

Possiamo ritrovare figure di architetti e di ingegneri che hanno impostato la propria poetica sul concetto di unione tra forma e struttura, tra estetica e tecnica, tra architettura e ingegneria, anche in epoca più recente. L'avvento del calcestruzzo e delle nuove tecniche di precompressione ha influenzato considerevolmente i progettisti che hanno operato negli anni cinquanta e sessanta. Ad oggi invece, l'acciaio è il materiale oggetto di grande ricerca tecnologica e di studi applicativi. Possiamo ritrovare la capacità di sfruttare tale tecnologia contemporanea in diversi progettisti quali Eero Saarinen, Norman Foster, Richard Rogers, Renzo Piano, Ove Arup & Partners e Arata Isozaki, detti da molti "architetti-costruttori" proprio per questo motivo. Tutti questi professionisti, però, non fanno del rapporto tra la forma e la struttura il fondamento dei loro progetti, la ragione ultima della loro professione. Gli autori che ci apprestiamo ad introdurre invece fanno di questa tematica la radice della loro ispirazione progettuale.

2.3.1. Eduardo Torroja Miret (1899 – 1961)

Primo tra questi citiamo Eduardo Torroja Miret. Egli sosteneva che fosse l'ispirazione a determinare la nascita di un complesso strutturale, l'atto creativo quale matrice dell'intero processo produttivo. Inoltre riteneva che le proprietà intrinseche del materiale dovessero influenzare lo schema strutturale. Torroja poneva la propria attenzione verso l'intuito, sulla previsione qualitativa dell'assetto resistente, sulla configurazione delle tensioni e delle deformazioni quali elementi che debbano fare parte dal progettista. Egli riteneva ci fossero tre elementi fondamentali da tenere in considerazione: l'equilibrio, la resistenza, la stabilità. Il "plesso-tensionale" è un elemento fondamentale della sua filosofia progettuale, egli infatti si serviva della rete

delle isostatiche per raggiungere una conoscenza approfondita della distribuzione tensionale all'interno del solido. Il tema della sincerità strutturale viene affrontato quale elemento in grado di garantire un'effettiva rispondenza della struttura alle tensioni che si sviluppano nell'oggetto architettonico, ricoprendo però allo stesso tempo un ambito formale ed estetico che possa portare addirittura alla definizione, in un certo senso, di un'arte strutturale.

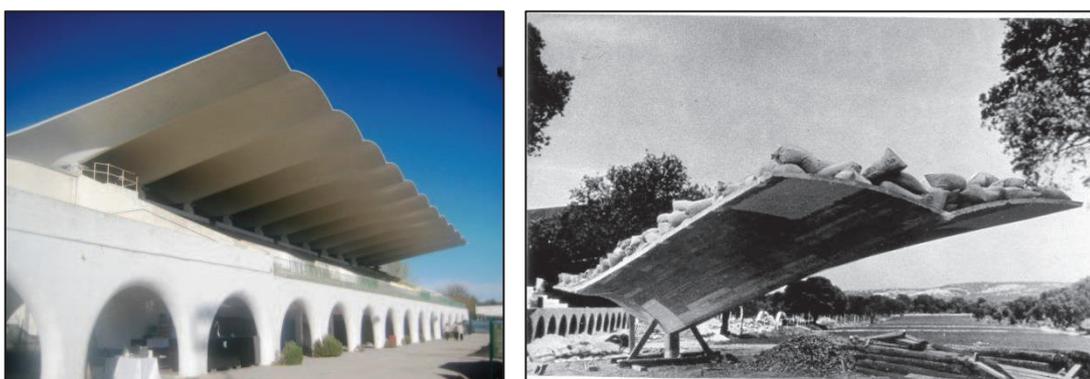


Fig. 2.4 – Torroja E., Ippodromo, Madrid, 1935 – 1941; Fig. 2.5 – Torroja E., Prova di carico

2.3.2. Pier Luigi Nervi (1891 – 1979)

Anche secondo Nervi l'atto creativo si basa solo in parte su dati scientifici. Dati per acquisiti lo studio dell'equilibrio e la resistenza dei materiali, la sensibilità statica rimane, al pari della sensibilità estetica, una proprietà personale. Nervi riteneva infatti che la fatica della progettazione potrebbe definirsi compiuta nel momento in cui si riuscisse a raggiungere un sottile equilibrio tra i tre elementi fondamentali che definiscono una buona architettura. La funzionalità, la statica e l'economia devono infatti armonizzarsi e attraverso il gioco di forme e volumi esprimere l'idea architettonica. Egli si batté sia contro la negazione del fatto tecnico quale possibilità architettonicamente espressiva, sia contro la sopravvalutazione di esso.



Fig. 2.6 – Nervi P. L., Aula delle udienze pontificie, Città del Vaticano, 1966 - 1971

Il contributo originale di Nervi si spinse anche oltre, egli affermava che l'umanità si dirigerà presto verso forme e stili che rimarranno immutabili nel tempo (Nervi 1945). La realizzazione di strutture di grande luce porta infatti gli oggetti architettonici al tendere verso la loro forma naturale, ossia verso quella forma che consente il deflusso degli sforzi all'interno della struttura in modo ottimale, fino a raggiungere un vero e proprio carattere stilistico. Tale carattere consisterebbe nella determinazione di forme rispondenti a determinati requisiti di natura fisica anche dove tali considerazioni non fossero indispensabili. Far corrispondere forme aerodinamiche a veicoli lenti, per proporre un riferimento banale, alle carrozzine per bambini, può essere considerato un esempio tipico di tale applicazione ormai diffusa. Secondo Nervi in tutti noi inoltre esiste una istintiva sensibilità che non può essere soddisfatta se l'opera di notevole importanza statica non risponde alle leggi dell'equilibrio e delle masse. Molto spesso l'opera staticamente infelice lo è anche esteticamente.

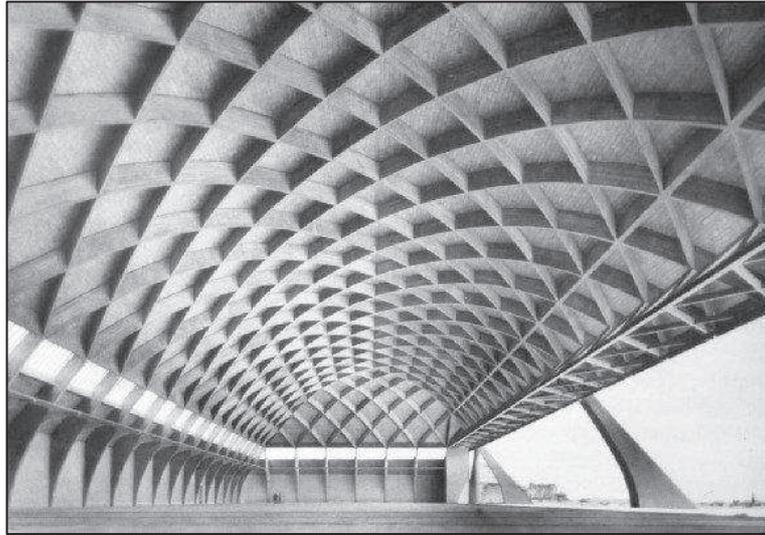


Fig. 2.7 – Nervi P. L., Hangar, Orvieto, 1935

2.3.3. Riccardo Morandi (1902 – 1989)

La qualità dell'immagine finale deve essere accompagnata da una rigorosa soluzione strutturale anche per Riccardo Morandi. Non esiste infatti, secondo lo stesso Morandi, un'unica soluzione, ma più soluzioni equivalenti. Tale affermazione può essere ricondotta non solo ai risultati ottenibili staticamente, ma anche facendo riferimento a criteri di determinazione dell'elaborato architettonico sotto il profilo funzionale ed economico. Ancora una volta, la scelta dell'unica soluzione, delle tante tra le quali optare, risulta essere elemento della creazione artistica, che risulta scissa dal fatto puramente tecnico. Rischio, insicurezza, squilibrio sono elementi fondamentali della sua progettazione, lo portano infatti al raggiungimento dei massimi risultati tecnici ed estetici.



Fig. 2.8 – Morandi R., Ponte Bisantis, Catanzaro, 1959 – 1962; Fig. 2.9 – Morandi R., Ponte General Urdaneta, Maracaibo, 1957 - 1962

2.3.4. Robert Maillart (1872 – 1940)

Se pensiamo ai ponti di Maillart , ritroviamo la volontà di ricercare soluzioni a problemi che fino ad allora non erano stati affrontati. Alla base del suo sorprendente lavoro risiede l'applicazione di un nuovo sistema costruttivo. Egli rivoluziona l'utilizzo del calcestruzzo armato, vincolato troppo spesso ai metodi costruttivi propri del legno e del ferro. Elimina dalle sue strutture tutto ciò che non era funzionale, rinforzando la piastra in calcestruzzo armato fino a quando non l'ebbe trasformata in un nuovo elemento strutturale (Giedion 1984). Maillart si limita a poche forme e idee fondamentali, egli sosteneva fermamente che ogni opera dovesse essere realizzata in accordo con le condizioni ambientali e funzionali.



Fig. 2.10 – Maillart R., Ponte sul Salginatobel, Schiers, 1929 – 1930; Fig. 2.11 – Maillart R., Ponte sullo Schwandbach, Berna, 1932 – 1933

2.3.5. Félix Candela (1910 – 1997)

Anche l'opera di Candela è strettamente unita alla ricerca strutturale, egli arricchisce il panorama architettonico attraverso l'utilizzo di strutture a guscio. Le sue forme geometriche sono di straordinaria efficacia, e diventano, nelle loro configurazioni a bordo libero, elemento distintivo formale della sua poetica (Savorra 2013). Le opere di questo professionista si distinguono dalle altre, riflettono la padronanza che egli aveva di tutti i differenti aspetti e di tutte le fasi della creazione di un'opera. Combinava alle grandi capacità di costruttore, l'intuizione tecnica e la riflessione filosofica. Cercava di separare la forma dal rigido funzionalismo matematico che porta ad esiti impersonali. Attacca ripetutamente la concezione della modernità accostata al principio del telaio in calcestruzzo armato, definita un'operazione scorretta, incoerente e ingiustificata. Pone la propria riflessione sulla differenza tra le potenzialità di un materiale e le sue reali proprietà. Candela sfrutta le strutture resistenti per forma per esprimere tali concetti. Accompagna riflessioni teoriche alla sperimentazione ed alla fattibilità costruttiva. Sostiene infatti di sfruttare i propri edifici quali modelli a scala reale, migliorando ed affinando ogni volta le proprie realizzazioni. Alla base della sua attività stava

l'intuizione statica, che doveva consentire di giungere alle opportune ipotesi al fine di garantire l'esattezza finale dei procedimenti scientifico-matematici. Si è sempre opposto ai rigidi regolamenti vigenti perché secondo lui i problemi non potevano avere una soluzione esatta ed unica. Negli anni cinquanta si concentrò sullo studio dei gusci, quasi a coprire l'intera gamma delle forme geometriche materializzabili. Si basava solo fino ad un certo punto sulla teoria strutturale dato che egli riteneva che le ipotesi sulle quali si basava costituissero solo delle mezze verità. Riteneva anche lui che la natura fosse un riferimento fondamentale, capace come è di realizzare forme ordinate, armoniose e stabili. La sua ricerca consentì di rinnovare il repertorio creativo abituale.



Fig. 2.12 – Candela F., Ristorante Los Manantiales, Xochimilco, 1957 - 1958

La forma dunque non poteva essere arbitraria, ma doveva soddisfare prerogative estetiche e strutturali, alcune delle quali impossibili da definire con meccanismi logici e analitici. Giudicava negativamente lo sfrenato strutturalismo dove il mezzo tecnico si trasforma in gioco esibizionistico, una arbitrarietà delle forme in contrasto con le leggi della statica costruttiva. La correttezza tecnica è l'indispensabile premessa per

raggiungere la bellezza architettonica. Candela faceva propri i principi dell'equilibrio statico, criticava fortemente quei progetti basati su una simulata inversione dei principi strutturali. Poneva la propria attenzione sul contrasto tra ciò che era possibile e ciò che era desiderabile, se Calatrava è un grande sostenitore della prima corrente di pensiero, Candela era assolutamente un sostenitore della seconda. Le strutture di qualità sono strutture affidabili, esse devono essere raggiunte tramite un'ingegneria della ripetizione, prerogativa che molti architetti "strutturisti" non tengono nemmeno in considerazione data la ricerca esasperata di originalità. Le professioni di ingegnere e di architetto hanno adottato traiettorie differenti, ad oggi si è creato tra loro uno spazio vuoto in cui pochi hanno il coraggio di sostare. Candela sottolinea come sembrerebbe logico adottare, per i nuovi materiali, forme strutturali inedite adeguate alle caratteristiche del nuovo materiale. Precisa però che tale procedimento è stato invece alterato e i nuovi elementi formali derivano da considerazioni di altro tipo. La forma è un fattore determinante per una struttura efficiente, troppo spesso per ottenere la resistenza opportuna si ragiona, invece che sulla forma, in termini di massa.

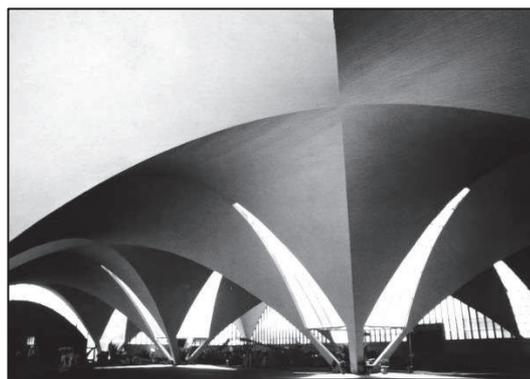
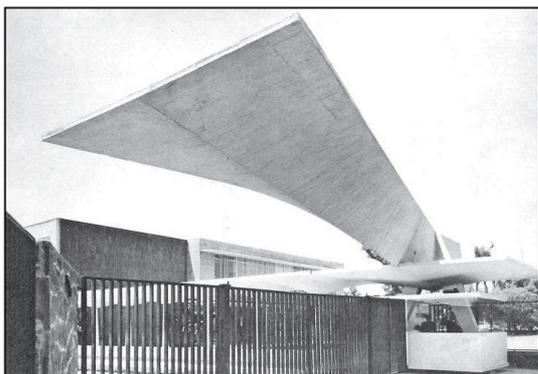


Fig. 2.13 – Candela F. Laboratori Lederle, Città del Messico, 1956; Fig. 2.14 – Candela F., Stabilimento Bacardi, Cuantitlán, 1960

2.3.6. Sergio Musmeci (1926 – 1981)

L'opera di Sergio Musmeci è incentrata sulla ricerca della forma. Essa deriva dalla ricerca della necessaria configurazione della materia nello spazio. Si devono utilizzare le minori risorse possibili per assolvere il compito strutturale. La morfologia non deve essere concepita astrattamente, ma deve rivelare i flussi di forze interne che la attraversano. Ad ogni contesto differente corrisponderà una differente opera strutturale unica e specifica. I fattori che la determinano sono: la dislocazione spaziale delle forze esterne, le tecnologie disponibili e i valori ambientali. Secondo Musmeci ancora oggi, nonostante le conoscenze che abbiamo appreso tramite la scienza delle costruzioni, utilizziamo dei metodi progettuali che non si discostano dai modelli rinascimentali. La scienza deve essere sfruttata già a livello dell'invenzione, non soltanto al livello della verifica. Secondo Musmeci esistono delle invarianti all'interno della progettazione, la definizione della quantità minima di materia con la quale ogni struttura può essere realizzata, avendo definito il sistema di forze esterne, è una di queste. Possiamo quindi associare tale invariante al concetto di minimo strutturale. La forma, una volta assegnata la materia, deve occupare il minor volume nello spazio. La ricerca del minimo strutturale non deve essere confusa con la volontà di una standardizzazione. Assegnato il materiale, i due fattori indissolubilmente legati al contesto, quali le forze esterne e l'ambiente, determinano configurazioni molteplici.



Fig. 2.15 – Musmeci S., Ponte sul Basento, Potenza, 1971 - 1976

Molto spesso Musmeci si affidava alle potenzialità di un materiale ideale, in questo modo poteva concentrarsi unicamente sulla forma, e ricercare quelle che potevano essere definite quali le più pure. Questo principio, secondo Musmeci, si accosta molto bene al concetto di ciclo di Carnot. Esso rappresenta il massimo rendimento dei motori termici e di cui non si può non tenere conto nella progettazione dei motori, anche se la sua applicazione integrale risulta impossibile. Tale invariante risulta quindi essere un orizzonte di riferimento al quale accostarsi mediante le elaborazioni successive (Nicoletti 1999). Musmeci suddivide le strutture in due grandi categorie, quelle in cui si verifica il “tutto teso - tutto compresso” e quelle in cui le due tensioni sono compresenti. È interessante sottolineare che egli riuscì a dimostrare che, nel secondo tipo di strutture, la differenza tra la materia compressa e quella tesa costituisce essa stessa un’invariante. Questa è specifica per ogni concreto tema strutturale, assegnati che siano i tre fattori che la determinano. La forma ideale, ad ogni modo, risulta essere quella in cui si sviluppa il principio del “tutto teso-tutto compresso”. Il concetto di minimo strutturale può essere applicato ai sistemi continui, discreti e misti.

Nel primo caso l'insieme degli sforzi può essere descritto come un flusso ininterrotto, nel secondo caso gli sforzi si integrano tra loro attraverso il sistema discontinuo dei nodi, con le membrature sollecitate, di norma, a trazione o compressione semplice. Un esempio di applicazione del concetto di minimo strutturale al primo sistema è il ponte sul Basento (Fig. 2.15), mentre un esempio di applicazione di tale concetto al secondo sistema è il progetto per il ponte sullo Stretto di Messina (Fig. 2.16).

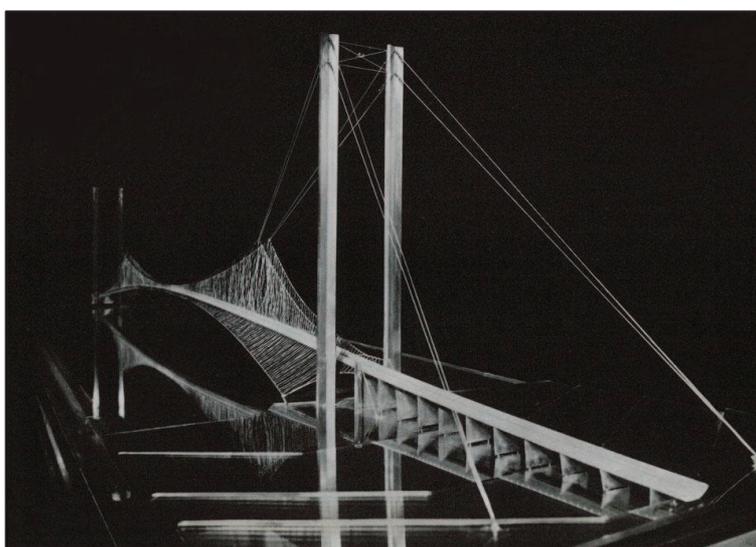


Fig. 2.16 – Musmeci S., Progetto per il Ponte sullo Stretto, Messina, 1969

L'approccio progettuale di Musmeci risulta molto differente da quello dei suoi maestri, Nervi e Morandi. Egli ha l'obiettivo di dare una risposta architettonica conseguente alla nostra civiltà tecnoscientifica. Considera l'opera dei suoi maestri derivante dalla tradizione ottocentesca, nella concezione e nel risultato spaziale. Un approccio visibile nella forma dei risultati realizzativi, operazioni che consistono in trasformazioni di simmetria ottenute attraverso la rotazione o la traslazione nello spazio di figure piane.

La volontà di Musmeci era invece quella di costruire strutture dalla forma specifica, con uno specifico andamento direzionale nello spazio, forme definibili veramente come tridimensionali.

2.3.7. Eladio Dieste (1917 – 2000)

Risulta doveroso citare la teoria che sottende l'opera di Dieste. Egli ingloba la conoscenza delle condizioni specifiche del costruire insieme ad un finissimo senso della struttura (Piaggio 1996). Nelle sue opere il calcolo cerca di seguire il balzo che l'intuito strutturale ha già effettuato. Le sue composizioni derivano dalla volontà di associare ad ogni dettaglio una effettiva giustificazione strutturale, tutto ciò senza arrivare a soluzioni codificate bensì appositamente studiate per ogni caso. La sua è una ricerca costante della leggerezza che lo porta ad adottare strutture, nelle quali non la massa, ma la forma, conduce gli sforzi verso il loro punto di scarico. Le forme più ricche in realtà si ribellano ad una analisi semplice, e numerosi saranno i passaggi analitici prima di arrivare ad una forma che possa essere computata in modo sensato e responsabile. Le sue forme sono una diretta conseguenza di considerazioni tecnologiche e strutturali che riescono comunque, attraverso la ricerca della forma ottimale, a completare ed esplicitare il senso di un luogo. La sua tecnica ha conseguenze architettoniche e formali, la delimitazione tramite forme, colori e tessiture porta alla definizione di spazi più ricchi.

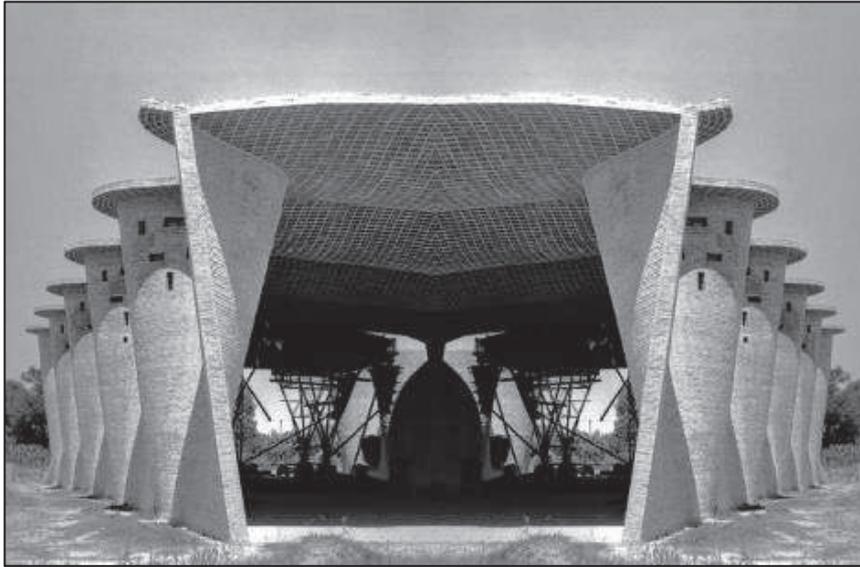


Fig. 2.17 – Dieste E., Chiesa del Cristo Operaio, Atlántida, 1958 - 1960

2.3.8. Santiago Calatrava (1951)

Ad oggi un contributo che risulta necessario introdurre è quello di Santiago Calatrava, egli riporta la struttura in primo piano, pone all'attenzione del pubblico il sistema portante, visto come forma dell'architettura. Al contrario di altri grandi ingegneri, quali ad esempio Maillart, la tecnica nel lavoro di Calatrava non ricopre un ruolo esclusivo e primario. I suoi raggiungimenti mirano invece ad un connubio tra rivelazione strutturale ed espressione plastica, producono risultati che possono essere descritti come una sintesi di estetica e fisica strutturale. Egli ammira i ponti di Maillart per la loro capacità di inserirsi in contesti naturalistici senza turbarne la percezione. Ritiene però che il suo lavoro sia diverso. Realizzare opere che possano riqualificare aree urbane quali ad esempio le zone periferiche di una città richiede un approccio differente al problema (Jodidio 1998) . Ad ogni modo però, Calatrava esaspera le possibilità stilistico-estetiche della struttura e diviene ad un compromesso tra complessità formale e schematizzazioni imposte dagli schemi strutturali e costruttivi.

Alla luce di queste considerazioni si può quindi affermare che Calatrava sia prima scultore e poi architetto e ingegnere, assembla materiali e tecniche tradizionali per portare a termine la sua ricerca formale.



Fig. 2.18 – Calatrava S., Città delle Arti e della Scienza, Valencia, 1996 - 2009

3. Il tema dell'ottimizzazione strutturale

Se la struttura non diventa essa stessa forma la progettazione strutturale è uno strumento che rimane subordinato alla definizione della forma tramite parametri differenti. La riappropriazione del progetto da parte dello strutturista può avvenire invece nei termini in cui la struttura possa tornare ad essere essa stessa forma (Consolini 2007). Si passa quindi all'assunzione del processo progettuale da parte di chi, il più delle volte, svolge solamente un servizio tecnico. In questo modo forma, materiali e forze potranno essere unificati grazie all'intento creativo del progettista. Al fine di consentire allo stesso di poter esercitare le sue scelte formali nel modo più adeguato, occorre definire un metodo, che gli consenta di svolgere tale operazione. A questo proposito facciamo riferimento all'ottimizzazione strutturale. Il tema di una progettazione in cui il criterio dell'ottimizzazione strutturale svolge un ruolo di primo piano può essere affrontato in modi diversi, tra questi ricordiamo: ottimizzazione con uso di linee isostatiche, ottimizzazione con uso di modelli fisici, ottimizzazione con uso di calcoli manuali, ottimizzazione con uso di programmi di calcolo.

3.1. L'ottimizzazione con il metodo delle linee isostatiche

Se si riuscisse a tradurre concretamente l'immagine di tessuto fibroso offerta dall'utilizzo delle linee isostatiche, concentrando la materia lungo il reticolo formato dalle stesse, si potrebbe realizzare nel corpo una condizione ottimale di esercizio. Negli archi a forma di catenaria ad esempio, abbiamo una precisa corrispondenza tra forma e linea isostatica. Se pensiamo alle cupole, meridiani e paralleli sono linee isostatiche. Le linee isostatiche però non sono invarianti a seconda delle condizioni di vincolo e di carico, al contrario si modificano al variare di questi. Questo è uno dei principali motivi per il quale nella realtà pratica è molto difficile dare effettiva realizzazione a questo criterio di ottimizzazione. Si riscontrano infatti, oltre a ciò, diverse difficoltà esecutive. Il metodo dell'ottimizzazione con le linee isostatiche è parte integrante del lavoro di Nervi, ad esempio nella realizzazione dei suoi solai (Fig. 3.1).



Fig. 3.1 – Nervi P.L., Lanificio Gatti, Roma, 1951

3.2. L'ottimizzazione con il metodo dei modelli fisici

L'utilizzo dei modelli fisici nel mondo della progettazione sono quanto di più usuale. Tuttavia l'utilizzo di tali modelli nel modo più appropriato risulta essere, ad oggi, una attività che concerne solo la minima parte di coloro che si apprestano alla realizzazione di un'opera. I modelli fisici dovrebbero essere infatti uno strumento atto a garantire una migliore qualità della progettazione, fungere cioè da elemento di supporto in fase progettuale e non solo in fase di verifica. Negli anni cinquanta, l'utilizzo del form-finding è stato approfondito in modo considerevole. In relazione alle particolari condizioni di carico e di vincolo ed alle caratteristiche del materiale, si conforma quella che risulta essere la disposizione della materia nel modo più efficace. Tra le varie tipologie di modelli quelli che risultano essere stati utilizzati con maggior successo sono essenzialmente tre. I modelli di soluzione d'acqua saponata, sfruttano il fenomeno fisico della tensione superficiale (Fig. 3.2). In un perimetro chiuso, una membrana d'acqua saponata, si dispone in modo da costituire, in ogni suo punto, una distribuzione uniforme delle tensioni. Vengono poi utilizzati dei metodi di rilievo di tipo fotogrammetrico. I modelli di soluzione saponata trovano effettiva applicazione nelle tensostrutture. Lo schema di equilibrio di queste coperture spaziali prevede la riduzione al minimo degli elementi di appoggio lavoranti a compressione e la trasmissione a terra dei carichi eminentemente attraverso reazioni di appoggio negative, ossia mediante vincoli sollecitati a trazione. Ciò significa che le strutture ottenute attraverso questo tipo di modelli, necessitano di una superficie di ancoraggio a terra ridotta e per punti. Un esempio dell'utilizzo di questi modelli come metodo progettuale è senza dubbio lo Stadio olimpico di Monaco di Otto Frei costruito nel 1972.

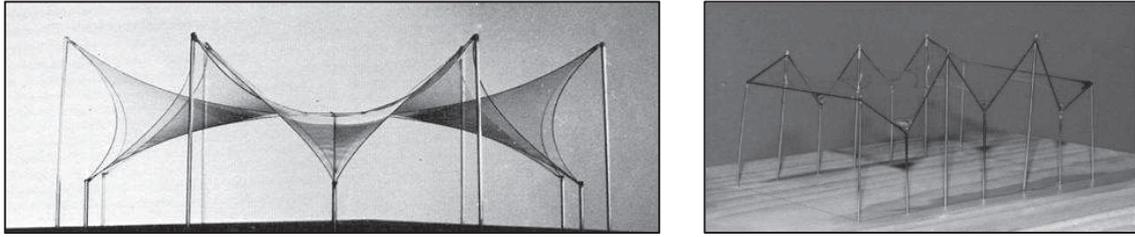


Fig. 3.2 – Modelli di soluzione d'acqua saponata

I modelli in materiale elastico invece, possono essere realizzati con elementi differenti: con una rete di materiale elastico ortotropo di poliestere, o con membrane in gomma, o con membrane in neoprene e, solitamente, vengono realizzati in scala maggiore rispetto alla tecnica delle membrane a base di soluzioni saponate. Vengono utilizzati al fine di ipotizzare ed analizzare le caratteristiche della superficie in questione. Allo stesso modo consentono di individuare zone con una modesta curvatura gaussiana locale che porterebbero ad una capacità portante limitata e ad una difficoltà di smaltimento delle acque piovane e della neve. Detto modello è poi adatto per la definizione delle condizioni al contorno. Un esempio dell'utilizzo dei modelli in materiale elastico in sede progettuale è il ponte sul Basento di Sergio Musmeci (Fig. 3.3; Fig. 3.4). Quale fattore risolutivo del sistema statico si fa proprio riferimento alla forma, pensata efficacemente quale elemento capace di massimizzare il rendimento del materiale impiegato.

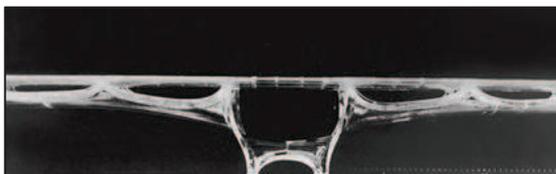


Fig. 3.3 – Modello in metacrilato, ponte sul Basento

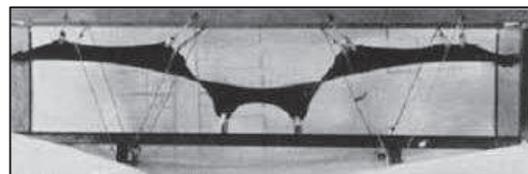


Fig. 3.4 – Modello in neoprene, ponte sul Basento

Per quanto riguarda i modelli di fili appesi a loro volta contribuiscono alla definizione di geometrie staticamente efficienti per strutture spaziali che lavorano prevalentemente a compressione, utilizzando quindi un modello rovescio costituito da masse distribuite su elementi flessibili, quali funi e tessuti, opportunamente vincolati, sottoposte all'azione di gravità (Fig 3.5; Fig 3.6).



Fig. 3.5 – Modello di fili appesi, chiesa

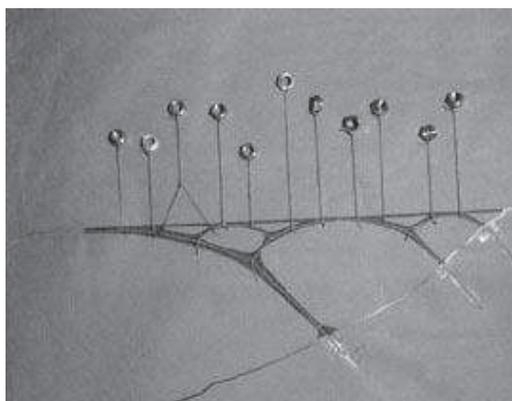


Fig. 3.6 – Modello di fili appesi, ponte

La particolare combinazione di carichi introdotta nel modello attraverso masse distribuite consente di ottenere una geometria che, invertita, corrisponde alla funicolare del sistema di forze. Ricordiamo che questo metodo venne utilizzato da Gaudì per il progetto della Chiesa di Santa Coloma (Fig. 3.7).

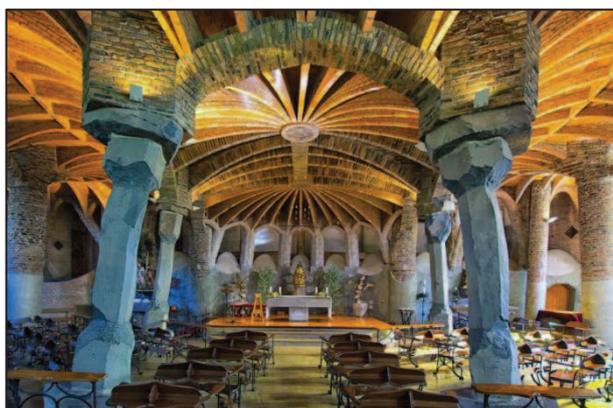


Fig. 3.7 – Gaudí A., Cripta della Chiesa di Santa Coloma de Cervelló, Barcellona, 1898 – 1915

3.3. L'ottimizzazione tramite calcoli manuali

Riccardo Morandi evidenzia l'importanza che il calcolo riveste all'interno della progettazione sia formale che strutturale. Allo stesso tempo però sostiene che esso debba essere comunque strettamente legato all'intuizione di chi progetta. Della stessa opinione è Pier Luigi Nervi secondo cui il calcolo rimane un elemento fondamentale per una corretta progettazione ma resta inferiore alle possibilità offerte dalle capacità creative, costruttive e dalle possibilità offerte dai metodi costruttivi a disposizione. Sergio Musmeci è il progettista che rende il calcolo vero e proprio strumento di progetto invertendo l'uso tradizionale dello stesso.

3.4. L'ottimizzazione topologica con l'utilizzo di programmi di calcolo

Con il termine topologia, nel campo dell'ottimizzazione strutturale, si intende la distribuzione spaziale di molteplici caratteristiche che devono rispondere a precise esigenze. Partendo da una configurazione iniziale di progetto si arriva al concetto di massima resistenza e minimo peso. Questo processo viene effettuato tramite la rimozione graduale del materiale che non viene utilizzato. L'ottimizzazione si può applicare a due grandi famiglie di strutture elastiche: le strutture discrete e le strutture continue. Nel primo caso l'ottimizzazione consiste nel trovare numero, posizione e connessione degli elementi. Nel secondo caso l'ottimizzazione consiste nel determinare i limiti esterni e interni e il numero e la posizione dei vuoti. La teoria matematica dell'ottimizzazione permette di formulare strategie e metodi d'analisi di problemi complessi. Non dobbiamo comunque pensare che l'utilizzo di tale tipo di ottimizzazione non consenta al progettista di effettuare scelte dettate dalla propria sensibilità progettuale.

Infatti le soluzioni che si trovano con i processi di ottimizzazione sono sì stazionarie, ma locali e non assolute. Questo significa che nonostante siano soluzioni di ottimo strutturale, non sono uniche, e questo è un aspetto assolutamente positivo della cosa. Le soluzioni formano quindi un ventaglio di opzioni progettuali possibili dettate dalle differenti condizioni al contorno, di carico e di vincolo, che consentono una valutazione estetica e formale. Lo sviluppo delle tecniche di ottimizzazione strutturale ha prodotto tre tipologie principali di ottimizzazione: dimensionale, di forma e topologica. L'ottimizzazione dimensionale consiste nella definizione ottimale delle proprietà sezionali, mentre la forma e il grado di connessione del dominio sono definiti a priori. L'ottimizzazione di forma consiste nella definizione della forma dei bordi esterni ed interni del corpo. L'ottimizzazione topologica è la tecnica di ottimizzazione strutturale più generale, e consente di definire il grado di connessione, la forma e la dimensione del corpo in oggetto. L'ottimizzazione topologica in alcuni casi è stata utilizzata quale ragione stessa dell'elaborato. Un esempio di quanto appena affermato è il progetto secondo classificato al concorso per la nuova stazione TAV di Firenze ad opera di Arata Isozaki (Fig. 3.8). Occorre precisare comunque che, le diverse configurazioni derivanti dall'ottimizzazione topologica andranno modificate per essere adattate al contesto, senza essere stravolte.



Fig. 3.8 –Isozaki A., Progetto per la nuova stazione TAV, Firenze

3.5. I principi dell'ottimizzazione in diversi ambiti

È importante ricordare la presenza di diversi ambiti, oltre quello dell'ingegneria strutturale, nei quali l'utilizzo della sezione trasversale variabile è diffuso. Un primo esempio potrebbe essere quello dell'aviazione. In questo campo infatti ci si serve di tale strumento geometrico per la realizzazione dell'ala degli aerei. Esso permette di favorire la distribuzione della portanza, la riduzione del peso e delle sollecitazioni di flessione all'incastro dell'ala. In ingegneria meccanica la balestra può essere considerata come un esempio di rastremazione (Fig. 4.1). Essa è un tipo di molla costituito da un fascio di lamine d'acciaio utilizzata nei sistemi di sospensione dei mezzi di trasporto ferroviario e stradali. L'utilizzo per questa componente meccanica di una sezione trasversale variabile così ottenuta porta a vantaggi quali la sua elementarità ed il suo costo ridotto.



Fig. 3.9 - Balestra in un mezzo di trasporto ferroviario

Esempi di ottimizzazione strutturale si verificano anche in natura, basti pensare ad alberi, calici di fiori e gusci di uova solo per citarne alcuni. In una struttura ottimizzata possiamo notare l'effettiva assenza di aree in cui abbiamo un carico eccessivo e di aree in cui il carico è ridotto.

Si ricerca quindi la condizione ottimale per avere in ogni punto una distribuzione degli sforzi direttamente rapportabile alle capacità del materiale che li veicola. In un albero sia il tronco che i rami potremmo considerarli come delle mensole, vincolati quindi ad un estremo e liberi nell'altro, essi riducono la loro sezione trasversale mano a mano che si allontanano dall'incastro rispondendo brillantemente al criterio di ottimizzazione strutturale che si pongono quale obiettivo di tale forma. Un altro spunto interessante ci viene offerto dalle ossa umane. Vi è infatti un sottile reticolo, costituito da trabecole ossee, che formano il cosiddetto tessuto spugnoso. Von Meyer, nel 1867, mostrò che le trabecole visibili in una sezione longitudinale di un femore sono disposte lungo linee curve e che questi fasci lineari sono intersecati da altri fasci in modo che ogni incrocio sia quasi ortogonale. L'ingegnere e professore Culmann, sempre nel 1867, venne a conoscenza di quanto dimostrato da von Meyer e riconobbe che la disposizione delle trabecole ossee era il diagramma delle linee isostatiche (Fig. 4.2).

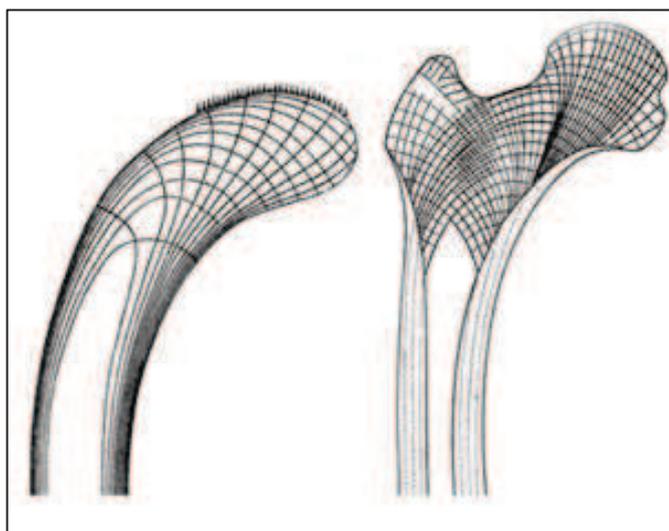


Fig. 3.10 – Gru di Culmann e schema di una testa di femore

Anche in ambito medico porre particolare attenzione alla geometria può essere fondamentale. Possiamo fare riferimento allo stent (Alaimo 2014), una struttura cilindrica a maglie che viene introdotta all'interno degli organi a lume quali i vasi sanguigni e l'intestino. Recenti studi dimostrano che una corretta disposizione della materia, a parità di configurazione geometrica di base dell'intero oggetto, può portare a migliorare notevolmente il comportamento in esercizio di tali elementi introdotti nel corpo umano e sottoposti a diversi tipi di sforzo.

4. L'ottimizzazione strutturale con calcoli manuali: modelli e procedure disponibili

Le travi sono state utilizzate nelle costruzioni per migliaia di anni per solai e coperture. Nell'architettura classica la scelta del materiale era tra legno e pietra. Entrambi i materiali si trovavano in natura in dimensioni maggiori di quelle richieste per la realizzazione degli elementi costruttivi. Era quindi richiesta una grande quantità di lavoro per ridurre gli elementi strutturali desiderati al minimo possibile. La forma e le dimensioni delle travi risultava da un compromesso, dovevano essere semplici da realizzare e larghe a sufficienza da poter sostenere i carichi soprastanti. Nella maggior parte dei casi venivano quindi realizzate travi prismatiche a sezione rettangolare. La situazione cambiò nel momento in cui fu introdotto il ferro quale materiale da costruzione. Esso portò all'esigenza di realizzare strutture con l'utilizzo della minor quantità possibile di materiale dato il peso proprio eccessivo di una struttura non ottimizzata. Causa che condusse alla ricerca della condizione di ottimo anche nelle strutture in calcestruzzo armato. La possibilità di questo materiale da costruzione di essere definito in una qualsivoglia forma, consentendo un risparmio sui materiali ed una diminuzione dei carichi ai quali sarà sottoposta la struttura stessa, con una quantità tutto sommato modesta di lavoro aggiuntivo, ha spinto le analisi di ottimizzazione ad

interessare anche tali tipi di strutture (Addis 2003). Oggetto di ottimizzazione strutturale attraverso calcoli manuali sarà quindi l'elemento costruttivo trave. Lo studio condotto in merito a tale componente strutturale risulta essere uno degli argomenti fondamentali della teoria delle strutture. Nel presente capitolo verranno quindi introdotti i metodi affrontati dalla letteratura classica sull'argomento, quali la trave Eulero – Bernoulli e la teoria del taglio efficace, per poi passare alla trattazione del metodo avanzato. Infine verrà introdotta la trave Gerber, tale tipo di trave presenta delle proprietà che, come si vedrà, potranno contribuire all'ottimizzazione strutturale nel caso dell'applicazione al caso reale affrontata nel Capitolo 6.

4.1. Definizione geometrica di trave

Solitamente la trave viene definita come corpo tridimensionale in cui due dimensioni risultano essere trascurabili rispetto alla terza. Tale definizione risulta però molto restrittiva ed incompleta se consideriamo i vari aspetti che caratterizzano detto elemento costruttivo.

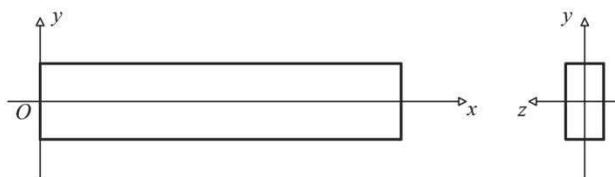


Fig. 4.1 – Trave e relativo sistema di coordinate adottato

In particolare se facciamo riferimento a criteri di ottimizzazione la definizione geometrica dello stesso in modo accurato risulta essere fondamentale. In tal caso è opportuno specificare determinate proprietà della trave, ossia definire se si presenta rettilinea o curvilinea oppure prismatica o soggetta a variazione della sezione

trasversale. Nella nostra analisi ci concentreremo sullo studio di travi a sezione trasversale variabile con asse longitudinale rettilineo. Partiremo nello specifico dal modello di trave a sezione trasversale variabile adottato da Timoshenko, consapevoli del fatto che tale modello risulta essere efficace solo in determinati casi che verranno analizzati e confrontati. Risulta doveroso approfondire tale elemento strutturale ricercandone la condizione di ottimo, ossia mirare all'ottenimento della massima resistenza con il minimo apporto di materiale. Tali travi infatti possono migliorare il comportamento meccanico dell'intera struttura diminuendone il peso. Sarà infatti fondamentale il collocamento di una maggiore quantità di materia nelle aree sottoposte ad uno stato di sforzo maggiore e viceversa. La ricerca di tali soluzioni si pone poi anche quella questione riguardante la riuscita compositiva e formale di un'opera che attraverso tali soluzioni può essere raggiunta. Dobbiamo specificare da subito che l'obiettivo è anche quello di discutere aspetti elementari che influenzano l'efficacia della modellazione delle travi non prismatiche. Potremo infatti notare che le equazioni di equilibrio che governano il modello di trave non sono indipendenti ed inoltre la distribuzione degli sforzi nella sezione trasversale non è banale come nelle travi prismatiche.

4.2. Il metodo classico, la trave Eulero – Bernoulli

Nello studio delle teorie della trave risulta necessario fare riferimento alla teoria della trave Eulero – Bernoulli, essa viene riportata nella maggior parte dei testi classici sull'argomento (Timoshenko 1976) e risulta essere, ad oggi, ancora la più utilizzata. Una delle assunzioni fondamentali riguarda il fatto che le sezioni della trave stessa risultano essere soggette ad un comportamento rigido piano e rimangono ortogonali alla

linea d'asse, quindi non avremo deformazioni nel piano della sezione trasversale. Questo significa che, in una trave soggetta a deformazione, sono trascurati i contributi forniti dallo sforzo di taglio alla deformazione stessa. Quando una trave è soggetta ad una generica forza esterna, avente componenti in direzione x ed y , si generano i noti stati di sforzo: sforzo assiale N , momento flettente M nel piano xy , sforzo di taglio V in direzione y . I tre tipi di stress possono essere calcolati facilmente per una qualsiasi sezione trasversale, avendo assunto la componente $\sigma_y = 0$. Nel caso monodimensionale possiamo definire le equazioni di equilibrio come segue:

$$N'(x) = -p(x) \quad V'(x) = -q(x) \quad M'(x) - V(x) = -m(x) \quad (4.1)$$

Dove p indica il carico distribuito in direzione x , q il carico distribuito in direzione y ed m il momento distribuito lungo x . Le espressioni degli stress sono scritte come forze risultanti di σ_x e σ_{xy} , dove A è l'area della sezione trasversale:

$$N(x) = \int_{A(x)} \sigma_x dA \quad M(x) = \int_{A(x)} \sigma_x y dA \quad V(x) = \int_{A(x)} \sigma_{xy} dA \quad (4.2)$$

La teoria di Eulero – Bernoulli però, non permette di definire il taglio V come risultante delle componenti dello sforzo di taglio σ_{xy} , in quanto tale componente viene assunta pari a 0 quale ipotesi fondamentale dell'intera trattazione. Proprio a causa della suddetta ipotesi, ossia che i contributi alla deformazione dati dagli sforzi di taglio siano nulli, questa teoria viene utilizzata per studiare travi sottili dove il comportamento flettente è predominante comparato al comportamento tagliante a tal punto da poter trascurare il contributo dato da quest'ultimo.

Per poter calcolare lo sforzo di taglio agente, è necessario fare ricorso alle equazioni indefinite di equilibrio, che nel caso piano in esame risultano essere:

$$\begin{cases} \sigma_x \cdot n_x + \tau \cdot n_y = 0 \\ \tau \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

La distribuzione degli sforzi nella sezione sarà di tipo lineare per quanto riguarda le σ_x e di tipo parabolico per quanto riguarda le τ , se facciamo riferimento alla nota distribuzione dello sforzo di taglio nella sezione secondo Jourawski.

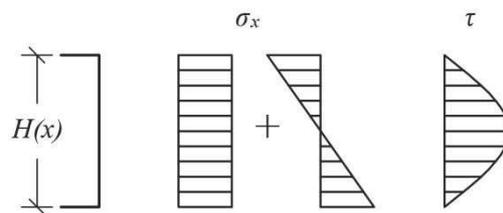


Fig. 4.2 – Ricostruzione degli stress nella sezione

4.3. La teoria del taglio efficace

Le prime considerazioni effettuate per chiarire l'effettiva corrispondenza tra la teoria del taglio efficace e gli effetti realmente riscontrabili sulle strutture composte da travi di altezza variabile, vengono effettuate su di un ponte realizzato circa cinquanta anni fa (Paglietti 2007). Si nota che, in prossimità degli appoggi, sono presenti lesioni da trazione nella loro parte bassa, compressa per flessione.

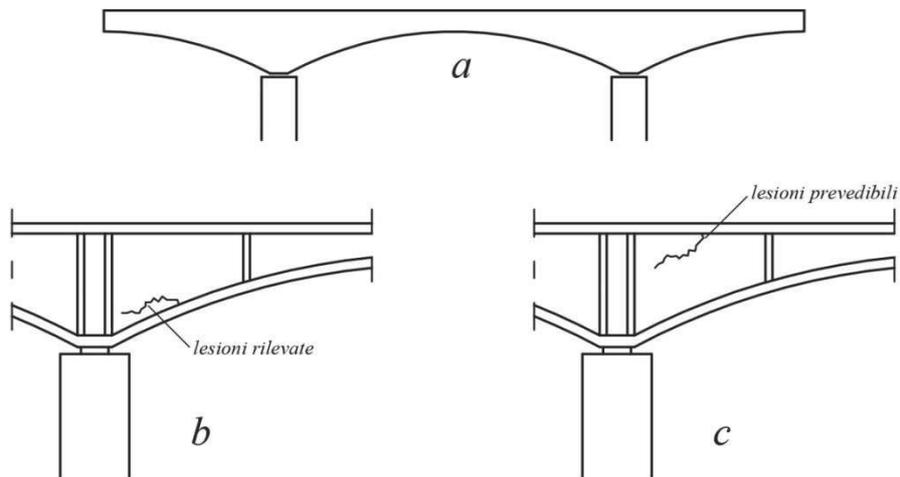


Fig. 4.3 – a) Ponte in c.a. di altezza variabile con sbalzi alle estremità - b) Localizzazione delle lesioni a trazione rilevate - c) Localizzazione teorica delle lesioni per trazione

Secondo la teoria sopra citata ciò sarebbe impossibile. Tale teoria, infatti, facendo riferimento all'esperienza maturata nello studio delle travi ad altezza costante prevede che, anche nelle sezioni di una trave di altezza variabile, lo sforzo di taglio raggiunga il valore massimo nel baricentro della sezione e si annulli nel lembo superiore ed in quello inferiore della stessa. Per le travi ad altezza variabile inoltre, non si fa riferimento all'azione del taglio reale V , ma si fa riferimento alla così detta azione di taglio efficace V^* . quest'ultimo nel caso del ponte in esame, in prossimità degli appoggi risulta essere:

$$V^* = V - C \tan \alpha \quad (4.4)$$

ove α è l'angolo di inclinazione del lembo compresso, mentre C è la risultante degli sforzi di compressione dovuti al momento flettente nella sezione che si considera.

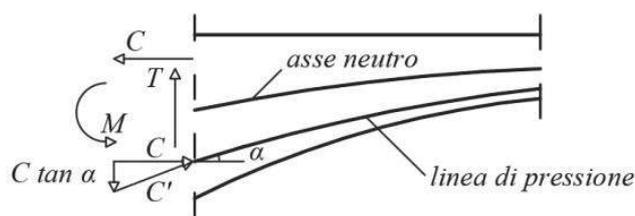


Fig. 4.4 – Schematizzazione che giustifica la formula secondo la teoria del taglio efficace

Questo risulta essere il metodo ad oggi ancora più utilizzato ed è effettivamente quanto riportato in tutti i testi sull'argomento. È da notare inoltre che, paradossalmente, nel caso del ponte in esame, il valore del taglio efficace, calcolato come prescritto, risulta essere considerevolmente inferiore a quello calcolabile per una trave a sezione costante a parità di sezione e di azione tagliante effettiva. Le lesioni riscontrate su detto ponte, hanno portato alla necessità di comprendere l'effettiva distribuzione degli sforzi nell'elemento. Un'analisi della stessa trave con il metodo degli elementi finiti mostrava, a differenza di quanto prevede la teoria del taglio efficace, che il valore massimo dello sforzo di taglio non era raggiunto nel baricentro della sezione, ma in prossimità del lembo compresso. Occorre inoltre sottolineare che, in contrasto con quanto avviene per le travi ad altezza costante, lo sforzo di taglio intorno al baricentro era di ridotta entità, e tendeva a zero verso il lembo teso della trave. Queste osservazioni non fanno altro che sottolineare l'effettiva inefficacia del metodo ad oggi utilizzato e riportato quale strumento di calcolo effettivo per detto tipo di trave in tutto il mondo. Nel 1932 il metodo del taglio efficace per determinare lo sforzo di taglio massimo nelle travi ad altezza variabile compare nel trattato di Bleich sulle costruzioni in acciaio. Egli estendeva il metodo di Jourawski alle travi di altezza variabile, stabilendo così una formula per determinare lo sforzo di taglio medio nella generica corda parallela all'asse neutro di una qualsiasi loro sezione.

In generale la trattazione effettuata da Bleich è corretta se non fosse per un errore nella definizione dell'effettivo sforzo di taglio che attraverso il suo metodo viene riscontrato . Egli infatti applica la sua formula alla corda passante per il baricentro della sezione. Definisce però il valore medio in tale corda “ $\max \tau_m$ ”, probabilmente facendo riferimento al fatto che in una trave ad altezza costante è in tale corda che viene raggiunto il valore massimo. Bleich perviene così alla relazione:

$$\max \tau_m = \frac{V^*}{b_n D} \quad (4.5)$$

dove b_n è la lunghezza della corda baricentrica, D il braccio della coppia interna e V^* il taglio efficace. La formula risulta essere sbagliata proprio a causa del prefisso "max" che precede τ_m in detta formula. È vero che il secondo membro dell'equazione fornisce il corretto valore dello sforzo di taglio al livello della corda baricentrica. Per le travi ad altezza variabile tale risultato però non è il massimo valore dello sforzo di taglio della sezione. Attraverso la soluzione rigorosa del problema ottenuta utilizzando la Teoria dell'Elasticità, abbiamo la dimostrazione che nelle travi ad altezza variabile lo sforzo di taglio massimo non viene raggiunto nel baricentro della sezione. Lo studio di un caso semplice quale quello di una trave a sbalzo caricata all'estremo libero da un carico P dimostra effettivamente che, i valori massimi di sforzo di taglio differiscono in maniera significativa, nonostante detti valori coincidano nel baricentro utilizzando i due metodi sopra citati. Possiamo quindi concludere che, in ogni caso, il metodo del taglio efficace non consente di stimare adeguatamente né il valore dello sforzo di taglio massimo nelle sezioni di una trave, né il punto della sezione dove tale valore viene raggiunto. È necessario sottolineare inoltre che la teoria del taglio efficace è addirittura in contrasto con un noto teorema della teoria dell'analisi limite delle strutture secondo cui " il carico

di rottura di una struttura non diminuisce se si aumenta la resistenza di qualunque sua parte".

4.4. Il metodo avanzato basato sulla formulazione del problema 2D

In primo luogo assumiamo che il corpo trave abbia un comportamento rispettoso delle ipotesi di piccoli spostamenti e stato tensionale piano. Assumiamo inoltre che il materiale che costituisce il corpo trave sia elastico lineare isotropo e omogeneo (Balduzzi 2014).

Definiamo la lunghezza della trave l , la linea centrale della trave c e l'altezza della sezione trasversale H . Nella modellazione della trave, si assume che la snellezza $l/H(x) \gg 1$. I limiti inferiore e superiore della sezione trasversale, h_l ed h_u rispettivamente, sono definite come segue:

$$h_l(x) := c(x) - \frac{1}{2}H(x) \quad h_u(x) := c(x) + \frac{1}{2}H(x) \quad (4.6)$$

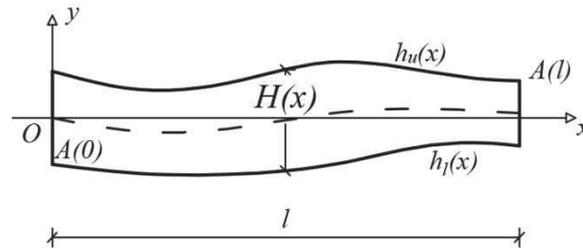


Fig. 4.5 – Geometria della trave, sistema di coordinate, dimensioni e notazione adottata

I versori ai limiti superiore ed inferiore sono definiti come:

$$n|_{h_l}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(h'_l(x))^2}} \begin{Bmatrix} h'_l(x) \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$n|_{h_u}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(h'_u(x))^2}} \begin{Bmatrix} -h'_u(x) \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Dove $(\cdot)'$ significa la derivata rispetto alla variabile indipendente x .

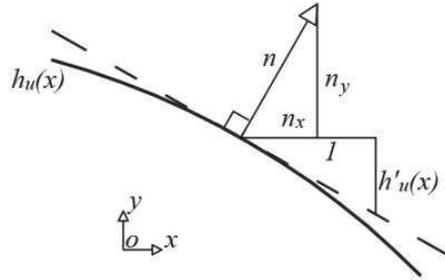


Fig. 4.6 – Vettore unitario esterno valutato al limite superiore della sezione

L'equilibrio al contorno ai limiti superiore ed inferiore ($(\sigma \cdot n)|_{h_l \cup h_u} = 0$) può essere espresso come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x \cdot n_x + \tau \cdot n_y = 0 \\ \tau \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Esplicitando τ e σ_y come funzioni di σ_x , utilizzando il tensore n otteniamo le seguenti espressioni di equilibrio al contorno:

$$\tau = -\frac{n_x}{n_y} \sigma_x = h' \sigma_x \quad (4.10)$$

$$\sigma_y = \frac{n_x^2}{n_y^2} \sigma_x = (h')^2 \sigma_x \quad (4.11)$$

dove h indica sia $h_l(x)$ che $h_u(x)$. σ_x può essere vista come la variabile indipendente che definisce completamente lo stato di sforzo sulla superficie inferiore e superiore, infatti è sufficiente conoscere il valore di σ_x per poter definire lo stato di sforzo in una data sezione della trave. Inoltre la pendenza del limite superiore ed inferiore risultano essere parametri cruciali nella determinazione dell'efficacia del modello di trave. L'unico parametro necessario a definire l'equilibrio al contorno è la pendenza delle

funzioni limite h'_l e h'_u . Rispetto alle equazioni di equilibrio monodimensionale espresse nel metodo Eulero – Bernoulli, possiamo apportare alcune modifiche e scrivere:

$$N'(x) = -p(x) \quad V'(x) = -q(x) \quad (M(x) + H(x) \cdot c(x))' - V(x) = -m(x) \quad (4.12)$$

Dove p indica il carico distribuito in direzione x , q il carico distribuito in direzione y ed m il momento distribuito lungo x . Le espressioni degli stress sono scritte come forze risultanti di σ_{xx} e σ_{xy} , dove A è l'area della sezione trasversale:

$$N(x) = \int_{A(x)} \sigma_x dy \quad M(x) = \int_{A(x)} \sigma_x (c(x) - y) dy \quad V(x) = \int_{A(x)} \sigma_{xy} dy \quad (4.13)$$

Procedendo in questo modo, è possibile ottenere il valore dello sforzo di taglio in ogni sezione, inoltre è possibile ricostruire la distribuzione degli stress nella sezione stessa.

Per quanto riguarda gli sforzi di taglio possiamo notare che essi si discostano dallo sviluppo parabolico illustrato da Jourawski per travi prismatiche, raggiungendo il valore massimo al bordo e non più in mezzeria. In particolare l'espressione analitica risulta:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{4 \cdot (c(x) - y)^2}{h^2(x)} \cdot \left(c'(x) \cdot \sigma_{x0} - \frac{h'(x)}{2} \sigma_{x1} \right) - \frac{2 \cdot (c(x) - y)}{h(x)} \cdot \left(\frac{h'(x)}{2} \sigma_{x0} - c'(x) \cdot \sigma_{x1} \right) + \\ & + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{4(c(x) - y)^2}{h^2(x)} \right) \cdot \bar{\tau} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dove σ_{x0} è lo sforzo orizzontale medio nella sezione trasversale, σ_{x1} è lo sforzo orizzontale valutato al limite inferiore mentre $\bar{\tau}$ è lo sforzo di taglio medio.

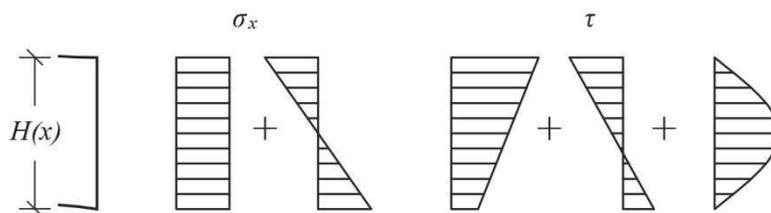


Fig.4.7 - Ricostruzione degli stress nella sezione

4.5. La trave Gerber

La trave a sezione trasversale variabile utilizzata sarà una trave Gerber, che presenta un numero di appoggi superiori a due ed è resa isostatica attraverso un numero adeguato di cerniere. Queste devono essere pari al numero di appoggi sovrabbondanti. Al fine di garantire la corretta distribuzione dei vincoli, non dovremo avere più di due cerniere tra due appoggi e nemmeno più di due appoggi tra due cerniere (Belluzzi 1966) . In caso contrario avremmo una struttura caratterizzata da un tratto labile o da un tratto iperstatico rispettivamente.

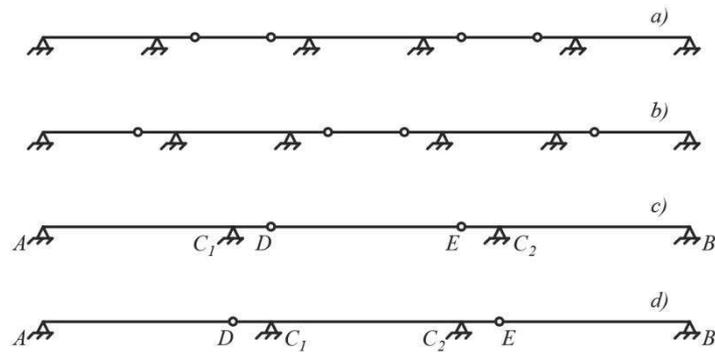


Fig. 4.8 – a,b) Tipologie possibili di distribuzione delle cerniere per un numero qualsiasi di appoggi
– c,d) Distribuzione delle cerniere nel caso frequente corrispondente ad un numero di quattro appoggi

Nelle strutture isostatiche le sollecitazioni interne indotte dai carichi meccanici sono superiori rispetto a quelle indotte nella stessa struttura vincolata in modo sovrabbondante. D'altro canto, le sollecitazioni interne indotte dai carichi termici e dai cedimenti vincolari sono nulle nelle strutture isostatiche ma possono invece risultare importanti in strutture iperstatiche. La struttura isostatica presenta infatti ampie possibilità di assestamento con l'intervento di soli movimenti rigidi (Carpinteri 1992).

Possiamo avere una conferma diretta di tali affermazioni confrontando il comportamento di una trave Gerber con quello di una trave continua in seguito al cedimento δ di un appoggio.

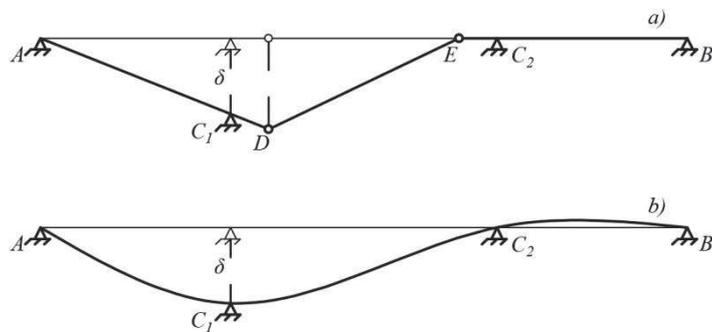


Fig. 4.9 – a) Trave Gerber sottoposta al cedimento δ di un appoggio
 – b) Trave continua sottoposta al cedimento δ di un appoggio

Possiamo notare che, mentre la trave Gerber rimane rettilinea nei suoi vari tratti, la trave continua s'incurva, sorgono quindi in questo caso tensioni interne e reazioni dei vincoli. La trave Gerber inoltre presenta la possibilità di collocare le cerniere in modo tale da ridurre i momenti sugli appoggi, che risultano di solito più elevati rispetto a quelli in campata. È possibile anche disporre le cerniere, ed utilizzare una luce tra gli appoggi, in modo da consentire di ottenere il raggiungimento di un valore del momento flettente massimo uguale in valore assoluto sia in campata che agli appoggi.

4.6. Conclusioni

L'introduzione dei principali riferimenti presenti in letteratura in merito alla teoria della trave risultava necessario. I calcoli che verranno effettuati nei capitoli successivi infatti, avranno come base proprio le assunzioni teoriche sopra riportate, in particolare il confronto sarà approfondito nello studio del rapporto tra il metodo classico ed il metodo avanzato. Come abbiamo potuto osservare il metodo classico viene utilizzato per

studiare travi sottili dove il comportamento flettente è predominante comparato al comportamento tagliante a tal punto da poter trascurare il contributo dato da quest'ultimo. Con l'utilizzo del metodo avanzato invece, sarà possibile tenere in conto non solo dello sforzo di taglio agente τ , ma anche della componente di sforzo σ_y . Nel capitolo successivo vedremo come tali criteri di determinazione dello stato di sforzo si discostino tra loro alla luce di queste considerazioni. L'introduzione della trave Gerber riveste un ruolo importante perché le sue proprietà saranno utilizzate in fase di progettazione al fine di garantire momenti flettenti uguali in valore assoluto agli appoggi ed in mezzaria della trave.

5. L'Ottimizzazione strutturale per schemi statici noti

Nel presente capitolo verrà trattato il metodo di determinazione dello sviluppo ottimale di trave secondo la trattazione proposta da Timoshenko. Tale metodo fa proprie le teorie della trave Eulero - Bernoulli e utilizza unicamente la componente di sforzo σ_x , data dal momento flettente agente, per la determinazione della condizione di ottimo per lo sviluppo longitudinale della trave. Verranno definite le geometrie associate a due schemi statici noti a loro volta suddivisi in base alle condizioni imposte di profilo simmetrico o di profilo piano superiormente. Una volta determinata la forma da associare ai diversi schemi statici per garantire la condizione di ottimo in base alle ipotesi della trave Eulero - Bernoulli, verranno affrontati alcuni esempi numerici al fine di confrontare l'errore commesso nella determinazione dello stato di sforzo tramite l'utilizzo del metodo avanzato. Verranno quindi trattate anche le differenze che sussistono nella determinazione della direzione degli sforzi principali tra i due metodi. Inoltre saranno introdotte le modalità di determinazione della condizione di ottimo tramite l'utilizzo del metodo avanzato. Infine si procederà alla determinazione della condizione di ottimo per lo schema statico della trave presentata nell'articolo sul taglio efficace alla luce dei risultati ottenuti.

5.1. Valutazione dell'errore nell'utilizzo del metodo proposto da Timoshenko

Introduciamo i criteri di snervamento per materiali duttili ai quali faremo riferimento per il calcolo della σ_{id} :

Criterio di Von Mises:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2} \quad \sigma_y \neq 0 \quad (5.1)$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \quad \sigma_y = 0 \quad (5.2)$$

Criterio di Tresca:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau^2)} \quad \sigma_y \neq 0 \quad (5.3)$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \quad \sigma_y = 0 \quad (5.4)$$

5.1.1. Caso 1a - Trave simmetrica sottoposta al carico P

Come primo esempio di trave con sezione trasversale variabile, consideriamo una trave a sbalzo sottoposta ad uno stato di sforzo uniforme (Timoshenko 1976). Una trave in cui il modulo di resistenza varia lungo la trave proporzionalmente al momento flettente. Ogni sezione trasversale avrà la minima area necessaria a soddisfare le condizioni di sforzo. Per una trave a sbalzo con un carico finale P, il momento flettente ad ogni sezione trasversale alla distanza x dal carico P è equivalente a Px. Per avere una trave sottoposta ad uno stato di sforzo uniforme il modulo di resistenza deve essere quindi proporzionale ad x.

Prendiamo ad esempio una trave a sezione rettangolare di base b ed altezza H, avremo:

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{6Px}{bH^2} = \frac{6Pl}{bH_0^2} = \text{costante} \quad (5.5)$$

Dove H_0 è l'altezza della trave all'incastro.

Quindi:

$$H^2 = \frac{H_0^2 x}{l} \quad (5.6)$$

Possiamo notare che l'altezza della trave varia seguendo una legge parabolica. In corrispondenza del punto di applicazione del carico l'area della sezione trasversale è zero. Questo risultato è stato ottenuto perché lo sforzo di taglio è stato trascurato nella derivazione della forma della trave ad uniforme resistenza.

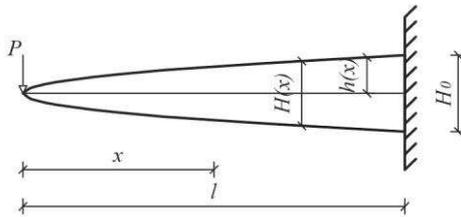


Fig. 5.1 – Trave simmetrica sottoposta al carico P

Dato che:

$$\sigma_x |_{h_l \cup h_u} = \frac{6Pl}{bH_0^2} \quad (5.7)$$

Considerando le condizioni di equilibrio al contorno abbiamo:

$$\tau |_{h_l \cup h_u} = h' \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.8)$$

$$\sigma_y |_{h_l \cup h_u} = (h')^2 \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.9)$$

L'equazione che definisce l'altezza della trave è:

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2 x}{l}} = 2h(x) \quad (5.10)$$

Sostituendo $h(x)$ a $H(x)$ otteniamo:

$$h(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H_0^2 x}{l}} = \frac{1}{2} \frac{H_0}{\sqrt{l}} x^{1/2} \quad (5.11)$$

$$h'(x) = \frac{1}{4} \frac{H_0}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (5.12)$$

$$(h'(x))^2 = \frac{1}{16} \frac{H_0^2}{l} \frac{1}{x} \quad (5.13)$$

Possiamo così ridefinire τ e σ_y come:

$$\tau |_{h_l \cup h_u} = \frac{1}{4} \frac{H_0}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.14)$$

$$\sigma_y |_{h_l \cup h_u} = \frac{1}{16} \frac{H_0^2}{l} \frac{1}{x} \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.15)$$

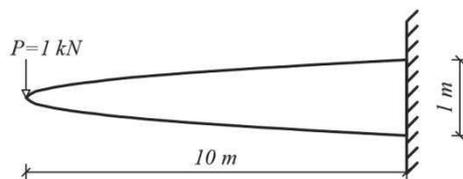


Fig. 5.2 – Trave simmetrica sottoposta al carico P , esempio

A questo punto tramite un semplice esempio numerico in cui definiamo $l = 10 \text{ m}$, $H_0 = 1 \text{ m}$, $P = 1 \text{ kN}$, possiamo notare l'effettiva differenza tra la distribuzione degli sforzi al bordo superiore ed inferiore lungo la sezione longitudinale della trave tra il metodo proposto da Timoshenko ed una applicazione dei criteri di verifica precedentemente introdotti. Si riportano tali risultati numericamente e graficamente.

	Timoshenko	Mises($\sigma_y \neq 0$)	Mises($\sigma_y = 0$)	Tresca($\sigma_y \neq 0$)	Tresca($\sigma_y = 0$)
x [m]	σ_x [kN/m ²]	σ_{id} [kN/m ²]			
0,05	60	67,50	70,36	67,50	73,48
0,1	60	63,75	65,38	63,75	67,08
0,2	60	61,88	62,75	61,88	63,64
0,3	60	61,25	61,85	61,25	62,45
0,4	60	60,94	61,39	60,94	61,85
0,5	60	60,75	61,11	60,75	61,48
0,6	60	60,63	60,93	60,63	61,24
0,7	60	60,54	60,80	60,54	61,06
0,8	60	60,47	60,70	60,47	60,93
0,9	60	60,42	60,62	60,42	60,83
1	60	60,38	60,56	60,38	60,75
1,1	60	60,34	60,51	60,34	60,68
1,2	60	60,31	60,47	60,31	60,62
1,3	60	60,29	60,43	60,29	60,57
1,4	60	60,27	60,40	60,27	60,53
1,5	60	60,25	60,37	60,25	60,50
1,6	60	60,23	60,35	60,23	60,47
1,7	60	60,22	60,33	60,22	60,44
1,8	60	60,21	60,31	60,21	60,42
1,9	60	60,20	60,30	60,20	60,39
2	60	60,19	60,28	60,19	60,37
3	60	60,13	60,19	60,13	60,25
4	60	60,09	60,14	60,09	60,19
5	60	60,08	60,11	60,08	60,15
6	60	60,06	60,09	60,06	60,12
7	60	60,05	60,08	60,05	60,11
8	60	60,05	60,07	60,05	60,09
9	60	60,04	60,06	60,04	60,08
10	60	60,04	60,06	60,04	60,07

Tab. 5.1 – Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica

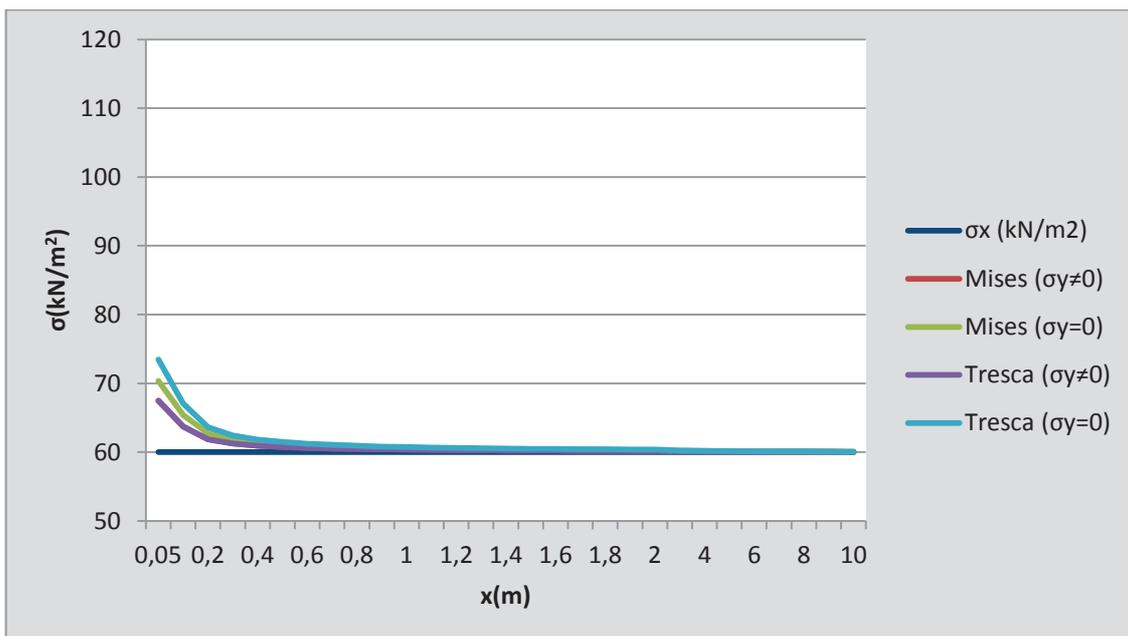


Fig. 5.3 – Distribuzione delle σ al bordo superiore ed inferiore lungo la sezione longitudinale

5.1.2. Caso 1b – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P

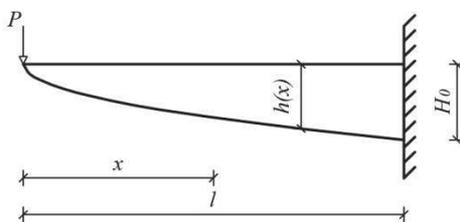


Fig. 5.4 – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P

Procediamo analogamente al Caso 1a, l'equazione che definisce l'altezza della trave è:

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2 x}{l}} = h(x) \quad (5.16)$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{H_0^2 x}{l}} = \frac{H_0}{\sqrt{l}} x^{1/2} \quad (5.17)$$

$$h'(x)|_{h_l} = \frac{1}{2} \frac{H_0}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad h'(x)|_{h_u} = 0 \quad (5.18)$$

$$\left(h'(x)|_{h_l}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{l} \frac{1}{x} \quad (5.19)$$

Possiamo così ridefinire τ e σ_y come:

$$\tau|_{h_l} = \frac{1}{2} \frac{H_0}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sigma_x|_{h_l} \quad \tau|_{h_u} = 0 \quad (5.20)$$

$$\sigma_y|_{h_l} = \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{l} \frac{1}{x} \sigma_x|_{h_l} \quad \sigma_y|_{h_u} = 0 \quad (5.21)$$

Ripetiamo l'esempio numerico descritto in precedenza e riportiamo i risultati.

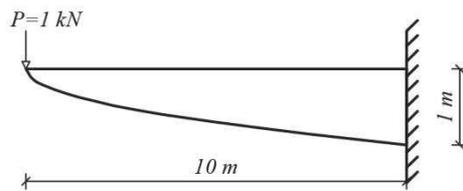


Fig. 5.5 – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico P , esempio

	Timoshenko	Mises($\sigma_y \neq 0$)	Mises($\sigma_y = 0$)	Tresca($\sigma_y \neq 0$)	Tresca($\sigma_y = 0$)
x [m]	σ_x [kN/m ²]	σ_{id} [kN/m ²]			
0,05	60	90,00	94,87	90,00	103,92
0,1	60	75,00	79,37	75,00	84,85
0,2	60	67,50	70,36	67,50	73,48
0,3	60	65,00	67,08	65,00	69,28
0,4	60	63,75	65,38	63,75	67,08
0,5	60	63,00	64,34	63,00	65,73
0,6	60	62,50	63,64	62,50	64,81
0,7	60	62,14	63,13	62,14	64,14
0,8	60	61,88	62,75	61,88	63,64
0,9	60	61,67	62,45	61,67	63,25
1	60	61,50	62,21	61,50	62,93
1,1	60	61,36	62,01	61,36	62,67
1,2	60	61,25	61,85	61,25	62,45
1,3	60	61,15	61,71	61,15	62,26
1,4	60	61,07	61,59	61,07	62,11
1,5	60	61,00	61,48	61,00	61,97
1,6	60	60,94	61,39	60,94	61,85
1,7	60	60,88	61,31	60,88	61,74
1,8	60	60,83	61,24	60,83	61,64
1,9	60	60,79	61,17	60,79	61,56
2	60	60,75	61,11	60,75	61,48
3	60	60,50	60,75	60,50	60,99
4	60	60,38	60,56	60,38	60,75
5	60	60,30	60,45	60,30	60,60
6	60	60,25	60,37	60,25	60,50
7	60	60,21	60,32	60,21	60,43
8	60	60,19	60,28	60,19	60,37
9	60	60,17	60,25	60,17	60,33
10	60	60,15	60,22	60,15	60,30

Tab. 5.2 – Differenze nella distribuzione delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica

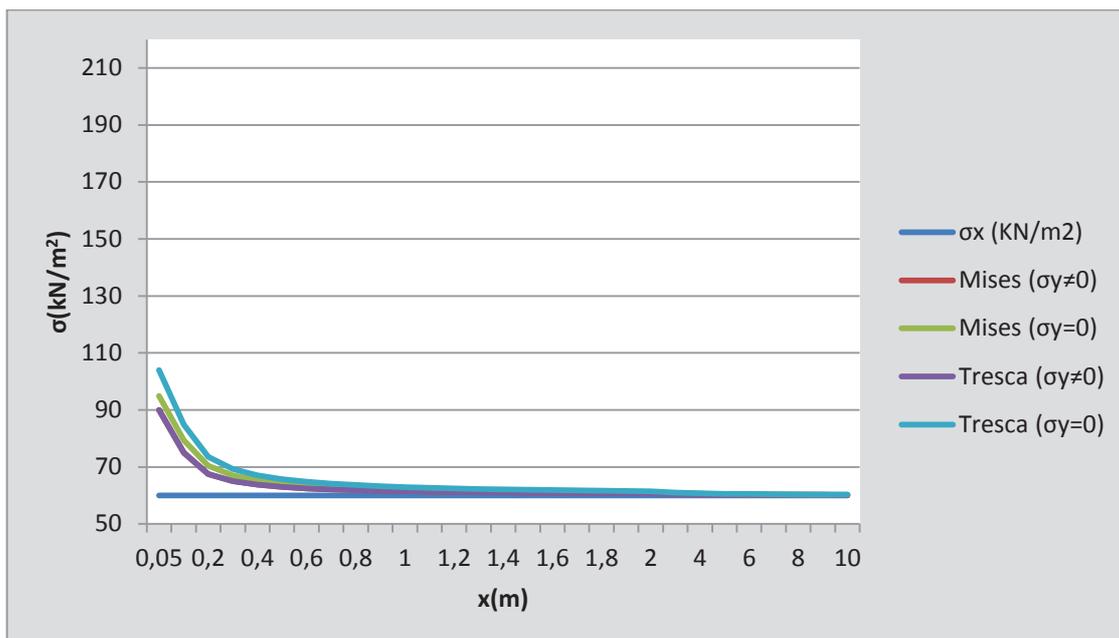


Fig. 5.6 – Distribuzione delle σ al bordo superiore ed inferiore lungo la sezione longitudinale

5.1.3. Caso 2a – Trave simmetrica sottoposta al carico q

Facciamo ora riferimento ad una trave incastrata ad una estremità e sottoposta ad un carico distribuito q .

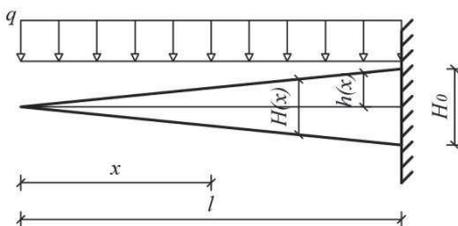


Fig. 5.7 – Trave simmetrica sottoposta al carico q

In questo caso abbiamo:

$$\sigma_x |_{h_l \cup h_u} = \frac{3ql^2}{bH_0^2} \quad (5.22)$$

L'equazione che definisce l'altezza della trave è:

$$H(x) = H_0 \frac{x}{l} = 2h(x) \quad (5.23)$$

Sostituendo $h(x)$ a $H(x)$ otteniamo:

$$h(x) = \frac{1}{2} H_0 \frac{x}{l} \quad (5.24)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \frac{H_0}{l} \quad (5.25)$$

$$(h'(x))^2 = \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{l^2} \quad (5.26)$$

Possiamo così ridefinire τ e σ_y come:

$$\tau |_{h_l \cup h_u} = \frac{1}{2} \frac{H_0}{l} \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.27)$$

$$\sigma_y |_{h_l \cup h_u} = \frac{1}{4} \frac{H_0^2}{l^2} \sigma_x |_{h_l \cup h_u} \quad (5.28)$$

Anche in questo caso svolgiamo un esempio numerico e riportiamo i risultati, definiamo

$q = 1 \text{ kN/m}$.

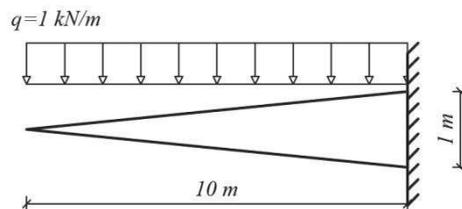


Fig. 5.8 – Trave simmetrica sottoposta al carico q , esempio

Timoshenko	Mises($\sigma_y \neq 0$)	Mises($\sigma_y = 0$)	Tresca($\sigma_y \neq 0$)	Tresca($\sigma_y = 0$)
σ_x [kN/m ²]	σ_{id} [kN/m ²]			
300	300,75	301,12	300,75	301,50

Tab. 5.3 – Differenze nella distribuzione costante delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica

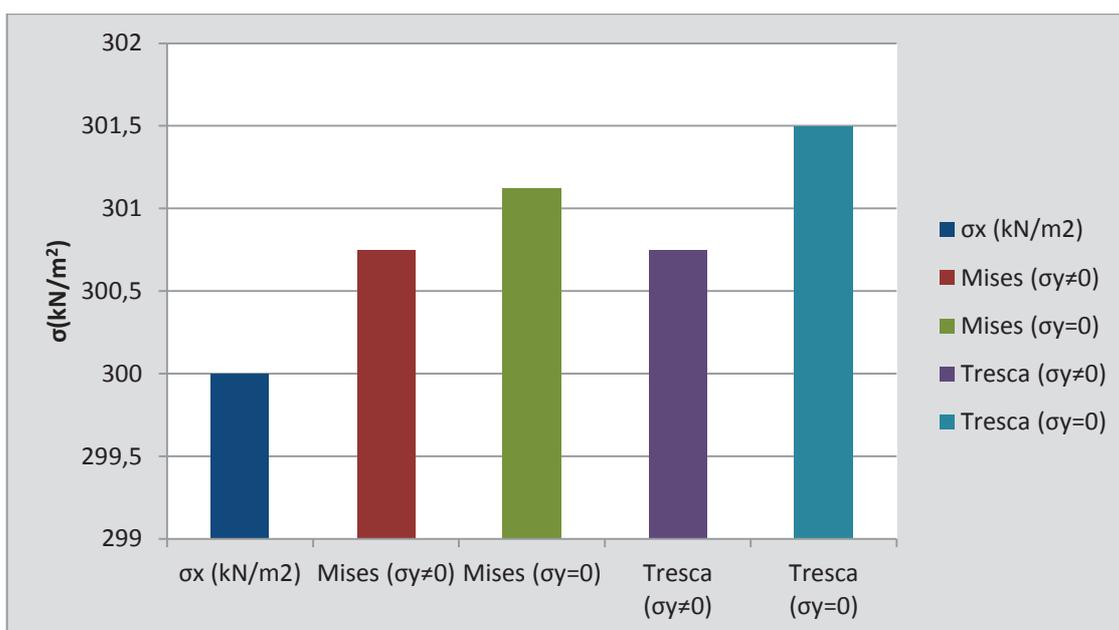


Fig. 5.9 – Distribuzione costante delle σ al bordo superiore ed inferiore lungo la sezione longitudinale

5.1.4. Caso 2b – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q

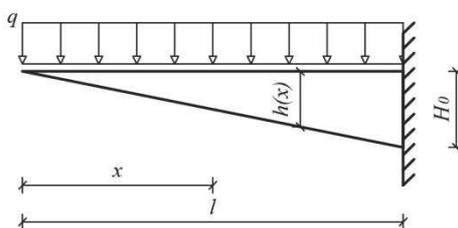


Fig. 5.10 – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q

Procediamo analogamente al Caso 2a, l'equazione che definisce l'altezza della trave è:

$$H(x) = H_0 \frac{x}{l} = h(x) \quad (5.24)$$

$$h'(x)|_{h_l} = \frac{H_0}{l} \quad h'(x)|_{h_u} = 0 \quad (5.29)$$

$$\left(h'(x)|_{h_l}\right)^2 = \frac{H_0^2}{l^2} \quad (5.30)$$

Possiamo così ridefinire τ e σ_y come:

$$\tau|_{h_l} = \frac{H_0}{l} \sigma_x|_{h_l} \quad \tau|_{h_u} = 0 \quad (5.31)$$

$$\sigma_y|_{h_l} = \frac{H_0^2}{l^2} \sigma_x|_{h_l} \quad \sigma_y|_{h_u} = 0 \quad (5.32)$$

Ripetiamo l'esempio numerico descritto in precedenza e riportiamo i risultati.

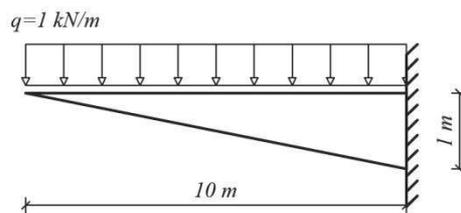


Fig. 5.11 – Trave con profilo piano superiormente sottoposta al carico q , esempio

Mises($\sigma_v \neq 0$)	Mises($\sigma_v = 0$)	Tresca($\sigma_v \neq 0$)	Tresca($\sigma_v = 0$)
σ_{id} (kN/m ²)			
303,00	304,47	303,00	305,94

Tab. 5.4 – Differenze nella distribuzione costante delle σ tra Timoshenko ed i criteri di verifica

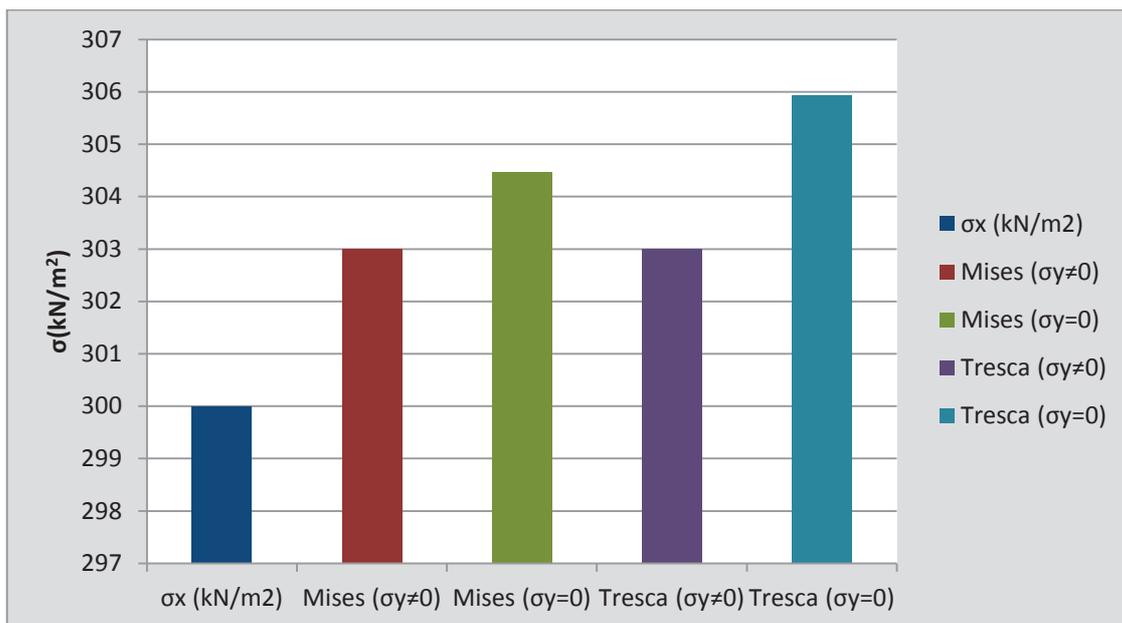


Fig. 5.12 – Distribuzione costante delle σ al bordo superiore ed inferiore lungo la sezione longitudinale

Possiamo precisare che sussiste una sostanziale differenza tra i risultati ottenuti con i due metodi, indifferentemente dal criterio di verifica applicato, essenzialmente in prossimità dell'estremo libero. Questo risultato è in accordo con quanto sostenuto dallo stesso Timoshenko, il quale suggerisce che, per una applicazione pratica dei risultati ottenuti, si dovrà tenere in conto dello sforzo di taglio che è stato trascurato nel suo processo, aumentando l'altezza della trave proprio in prossimità dell'estremo libero. Occorre inoltre osservare che l'errore commesso nell'utilizzo del metodo promosso da Timoshenko è maggiore nel caso di trave con profilo piano superiormente che di fatto risulta essere il modello più utilizzato tra i due nella pratica corrente.

5.1.4.a. Caso 2b - Il rapporto H_0/L

Possiamo notare che, nel Caso 2a e nel Caso 2b, $h'(x)$ non dipende dalla variabile x . Se variamo il rapporto tra l'altezza della trave in corrispondenza dell'incastro e la

lunghezza della stessa possiamo constatare che l'errore commesso con l'utilizzo del metodo di Timoshenko dipende fortemente da tale rapporto. Riportiamo qui di seguito i risultati ottenuti, facendo riferimento al Caso 2b, mantenendo costante la prima variabile e modificando la seconda.

H ₀ [m]	L [m]	Timoshenko	Mises($\sigma_y \neq 0$)	Mises($\sigma_y = 0$)	Tresca($\sigma_y \neq 0$)	Tresca($\sigma_y = 0$)
		σ_x [kN/m ²]	σ_{id} [kN/m ²]			
1	1	3	6,00	6,00	6,00	6,71
	2	12	15,00	15,87	15,00	16,97
	3	27	30,00	31,18	30,00	32,45
	4	48	51,00	52,31	51,00	53,67
	5	75	78,00	79,37	78,00	80,78
	6	108	111,00	112,41	111,00	113,84
	7	147	150,00	151,43	150,00	152,88
	8	192	195,00	196,45	195,00	197,91
	9	243	246,00	247,46	246,00	248,93
	10	300	303,00	304,47	303,00	305,94
	11	363	366,00	367,47	366,00	368,95
	12	432	435,00	436,48	435,00	437,96
	13	507	510,00	511,48	510,00	512,96
	14	588	591,00	592,48	591,00	593,97
	15	675	678,00	679,49	678,00	680,97
	16	768	771,00	772,49	771,00	773,98
	17	867	870,00	871,49	870,00	872,98
	18	972	975,00	976,49	975,00	977,98
	19	1083	1086,00	1087,49	1086,00	1088,98
	20	1200	1203,00	1204,49	1203,00	1205,99

Tab. 5.5 – Differenze nella distribuzione delle σ al variare del rapporto H_0/L

Per il caso in esame possiamo evidenziare come l'errore commesso sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà il rapporto H_0/L . In particolare l'errore comincia ad essere rilevante per valori di tale rapporto superiori a 0,2. Per chiarezza riportiamo esplicitamente l'errore commesso utilizzando il metodo di Timoshenko al posto di quelli evidenziati in tabella, esprimendolo in percentuale.

		Mises($\sigma_v \neq 0$)	Mises($\sigma_v = 0$)	Tresca($\sigma_v \neq 0$)	Tresca($\sigma_v = 0$)
H_0 [m]	L [m]	Errore [%]	Errore [%]	Errore [%]	Errore [%]
1	1	100,00	100,00	100,00	123,61
	2	25,00	32,29	25,00	41,42
	3	11,11	15,47	11,11	20,19
	4	6,25	8,97	6,25	11,80
	5	4,00	5,83	4,00	7,70
	6	2,78	4,08	2,78	5,41
	7	2,04	3,02	2,04	4,00
	8	1,56	2,32	1,56	3,08
	9	1,23	1,84	1,23	2,44
	10	1,00	1,49	1,00	1,98
	11	0,83	1,23	0,83	1,64
	12	0,69	1,04	0,69	1,38
	13	0,59	0,88	0,59	1,18
	14	0,51	0,76	0,51	1,02
	15	0,44	0,66	0,44	0,88
	16	0,39	0,58	0,39	0,78
	17	0,35	0,52	0,35	0,69
	18	0,31	0,46	0,31	0,62
	19	0,28	0,41	0,28	0,55
	20	0,25	0,37	0,25	0,50

Tab. 5.6 - Errore commesso con l'utilizzo del metodo proposto da Timoshenko confrontandolo con i criteri di verifica adottati al variare del rapporto H_0/L

5.1.5. Direzione degli sforzi principali

Per quanto riguarda invece una analisi del quadro fessurativo, possiamo notare che le stesse, secondo il metodo proposto da Timoshenko, si sviluppano ortogonalmente all'asse longitudinale della trave. L'utilizzo dei metodi sopra esposti porta invece ad un evidente discostamento dei risultati da tale valore, come possiamo notare sia numericamente che graficamente.

Ricordiamo che:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\left[\arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \right]}{2} \quad (5.33)$$

	Timoshenko	Caso 1a	Caso 1b	Caso 2a	Caso 2b
x [m]	$\alpha(\sigma_x)$ [°]	$\alpha(\sigma_{id})$ [°]	$\alpha(\sigma_{id})$ [°]	$\alpha(\sigma_{id})$ [°]	$\alpha(\sigma_{id})$ [°]
0,05	90	70,53	54,74	87,14	84,29
0,1	90	75,96	63,43	87,14	84,29
0,2	90	79,98	70,53	87,14	84,29
0,3	90	81,79	73,90	87,14	84,29
0,4	90	82,87	75,96	87,14	84,29
0,5	90	83,62	77,40	87,14	84,29
0,6	90	84,17	78,46	87,14	84,29
0,7	90	84,60	79,30	87,14	84,29
0,8	90	84,95	79,98	87,14	84,29
0,9	90	85,24	80,54	87,14	84,29
1	90	85,48	81,02	87,14	84,29
1,1	90	85,69	81,43	87,14	84,29
1,2	90	85,87	81,79	87,14	84,29
1,3	90	86,03	82,10	87,14	84,29
1,4	90	86,18	82,39	87,14	84,29
1,5	90	86,31	82,64	87,14	84,29
1,6	90	86,42	82,87	87,14	84,29
1,7	90	86,53	83,09	87,14	84,29
1,8	90	86,63	83,28	87,14	84,29
1,9	90	86,72	83,46	87,14	84,29
2	90	86,80	83,62	87,14	84,29
3	90	87,39	84,78	87,14	84,29
4	90	87,74	85,48	87,14	84,29
5	90	87,98	85,96	87,14	84,29
6	90	88,15	86,31	87,14	84,29
7	90	88,29	86,58	87,14	84,29
8	90	88,40	86,80	87,14	84,29
9	90	88,49	86,98	87,14	84,29
10	90	88,57	87,14	87,14	84,29

Tab. 5.7 – Differenze nell'angolo di sviluppo delle fessure tra Timoshenko ed i criteri di verifica

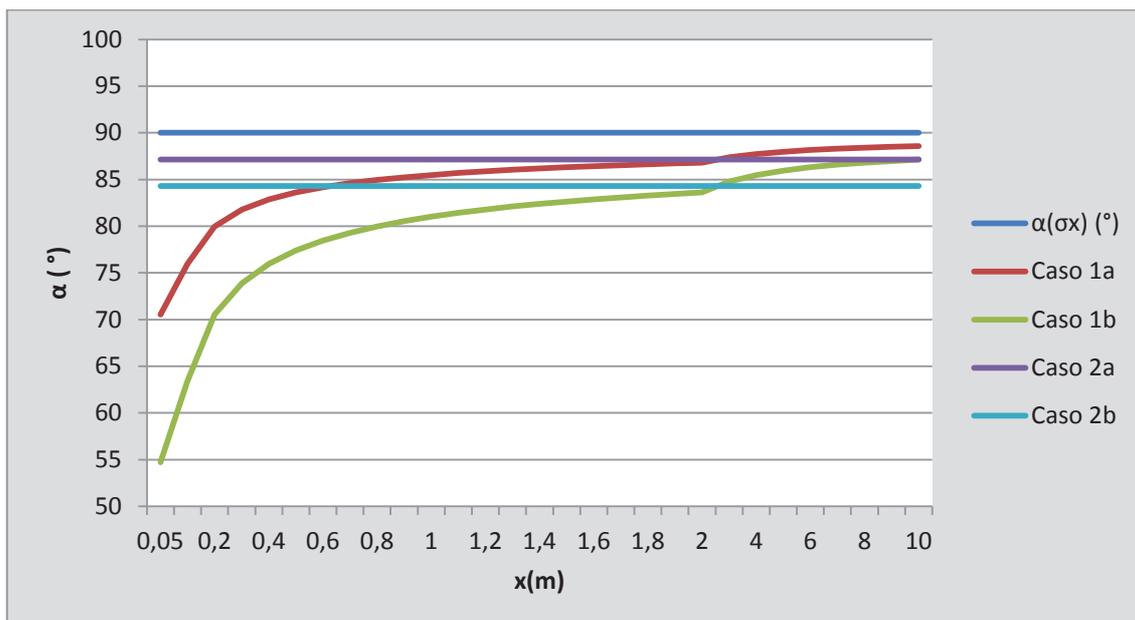


Fig. 5.13 – Variazione di α lungo la sezione longitudinale della trave

In questo caso l'errore commesso utilizzando il metodo proposto da Timoshenko risulta essere importante. Come abbiamo potuto osservare in precedenza i risultati si discostano maggiormente dal metodo di Timoshenko in prossimità dell'estremo libero.

5.2. Determinazione dell'altezza della trave con i criteri di Von Mises e Tresca

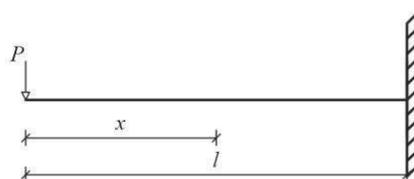


Fig. 5.14 - Trave a sbalzo sottoposta al carico concentrato P all'estremo libero

Per prima cosa esplicitiamo i contributi di σ_x, σ_y, τ , sostituendo $H(x)$ con $h(x)$

otteniamo:

$$\sigma_x |_{h_l \cup h_u} = \frac{M(x)}{J(x)} h(x) \quad (5.34)$$

Dove:

$$J(x) = \frac{1}{12} b H^3 = \frac{H^3}{12} = \frac{(2h(x))^3}{12} = \frac{2}{3} h^3(x) \quad (5.35)$$

Avremo allora:

$$\sigma_x |_{h_l \cup h_u} = M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \quad (5.36)$$

$$\tau |_{h_l \cup h_u} = h' \sigma_x |_{h_l \cup h_u} = h'(x) M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \quad (5.37)$$

$$\sigma_y |_{h_l \cup h_u} = (h')^2 \sigma_x |_{h_l \cup h_u} = (h'(x))^2 M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \quad (5.38)$$

5.2.1. Criterio di Von Mises ($\sigma_y \neq 0$):

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2} = \text{cost} \quad (5.39)$$

$$\sigma_{id}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2 = \text{cost}^2 = K \quad (5.40)$$

Sostituiamo i valori di σ_x, σ_y, τ :

$$\left(M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 + \left[(h'(x))^2 M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right]^2 + \quad (5.41)$$

$$- (h'(x))^2 M^2(x) \frac{9}{4} \frac{1}{h^4(x)} + 3 \left(h'(x) M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 = K$$

Otteniamo:

$$h'(x) = \sqrt{\sqrt{K} \frac{1}{M(x)} \frac{2}{3} h^2(x) - 1} \quad (5.42)$$

5.2.2. Criterio di Von Mises ($\sigma_y = 0$):

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} = \text{cost} \quad (5.43)$$

$$\sigma_{id}^2 = \sigma_x^2 + 3\tau^2 = \text{cost}^2 \quad (5.44)$$

Sostituiamo i valori di σ_x, σ_y, τ :

$$\left(M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 + 3 \left(h'(x) M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 = K \quad (5.45)$$

Otteniamo:

$$h'(x) = \sqrt{K \frac{1}{M^2(x)} \frac{4}{27} h^4(x) - \frac{1}{3}} \quad (5.46)$$

5.2.3. Criterio di Tresca ($\sigma_y \neq 0$):

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau^2)} = \text{cost} \quad (5.47)$$

$$\sigma_{id}^2 = (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau^2) = \text{cost}^2 = K \quad (5.48)$$

Sostituiamo i valori di σ_x, σ_y, τ :

$$\left(M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} + (h'(x))^2 M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 +$$

$$- 4 \left[M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} (h'(x))^2 M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} - \left((h'(x)) M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 \right] = K \quad (5.49)$$

Otteniamo:

$$h'(x) = \sqrt{\sqrt{K} \frac{1}{M(x)} \frac{2}{3} h^2(x) - 1} \quad (5.50)$$

5.2.4. Criterio di Tresca ($\sigma_y = 0$):

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} = \text{cost} \quad (5.51)$$

$$\sigma_{id}^2 = \sigma_x^2 + 4\tau^2 = \text{cost}^2 = K \quad (5.52)$$

Sostituiamo i valori di σ_x, σ_y, τ :

$$\left(M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 + 4 \left(h'(x) M(x) \frac{3}{2} \frac{1}{h^2(x)} \right)^2 = K \quad (5.53)$$

Otteniamo:

$$h'(x) = \sqrt{K \frac{1}{M^2(x)} \frac{1}{9} h^4(x) - \frac{1}{4}} \quad (5.54)$$

5.3. Trave ad uniforme resistenza nel caso studio dell'articolo sul taglio efficace

Come abbiamo potuto osservare in precedenza, durante lo studio di travi ad uniforme resistenza per casi semplici, quali travi a sbalzo caricate uniformemente o sottoposte ad un carico concentrato all'estremo libero, è possibile utilizzare il metodo di Timoshenko al fine di ottenere una geometria della trave tale per cui lo sforzo σ sia costante. Lo stesso metodo, appurato l'errore minimo commesso nella determinazione della forma della trave rispetto ai criteri di verifica di Von Mises e Tresca, possiamo applicarlo ad un caso più complesso. Riprendiamo quindi lo schema statico trattato nel paragrafo riguardante la favola del taglio efficace, attraverso l'analisi delle differenti

combinazioni di carico possiamo giungere anche in questo caso alla determinazione della forma ottimale per la trave in esame.

Ricordiamo che se $\sigma = \text{cost}$ allora:

$$\sigma = \frac{6M(x)}{bH^2(x)} = \frac{6M(H_0)}{bH_0^2} \quad (5.55)$$

Al fine di poter svolgere anche in questo caso un esempio numerico consideriamo:

Campata 1 - $l_1=5\text{m}$, Campata 2 - $l_2=10\text{m}$, Campata 3 - $l_3=5\text{m}$; $H_0=1\text{m}$; $q = 1 \text{ kN/m}$.

5.3.1. Prima combinazione di carico

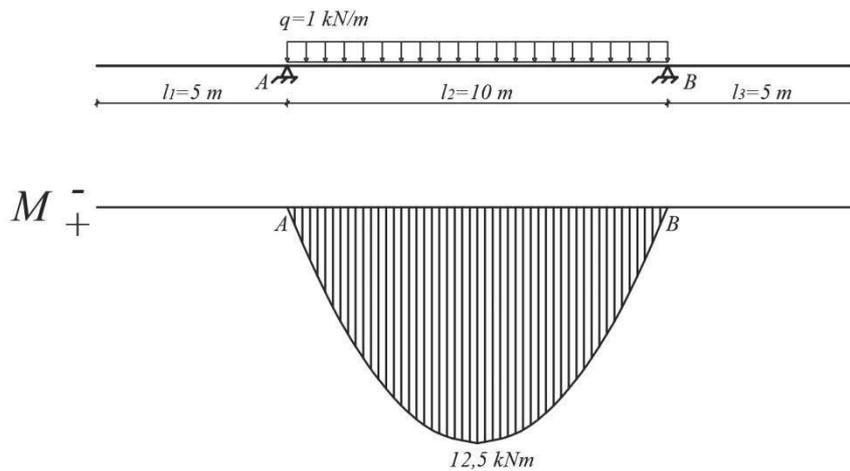


Fig. 5.15 – Prima combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 2

$$H_0 = H_{mezz} \quad (5.56)$$

Dove H_{mezz} è l'altezza in mezzeria della campata in esame.

$$M(x) = T_A x - \frac{qx^2}{2} \quad M(H_0) = T_A \frac{l_2}{2} - \frac{ql_2^2}{8} \quad T_A = \frac{ql_2}{2} \quad (5.57)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(T_A \frac{l_2}{2} - \frac{ql_2^2}{8}\right)}} \left(T_A x - \frac{qx^2}{2}\right) \quad (5.58)$$

x [m]	H(x) [m]	h _u (x) [m]	h _i (x) [m]
0,0	0,000	0,000	0,000
0,5	0,436	0,218	-0,218
1,0	0,600	0,300	-0,300
1,5	0,714	0,357	-0,357
2,0	0,800	0,400	-0,400
2,5	0,866	0,433	-0,433
3,0	0,917	0,458	-0,458
3,5	0,954	0,477	-0,477
4,0	0,980	0,490	-0,490
4,5	0,995	0,497	-0,497
5,0	1,000	0,500	-0,500
5,5	0,995	0,497	-0,497
6,0	0,980	0,490	-0,490
6,5	0,954	0,477	-0,477
7,0	0,917	0,458	-0,458
7,5	0,866	0,433	-0,433
8,0	0,800	0,400	-0,400
8,5	0,714	0,357	-0,357
9,0	0,600	0,300	-0,300
9,5	0,436	0,218	-0,218
10,0	0,000	0,000	0,000

Tab. 5.8 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

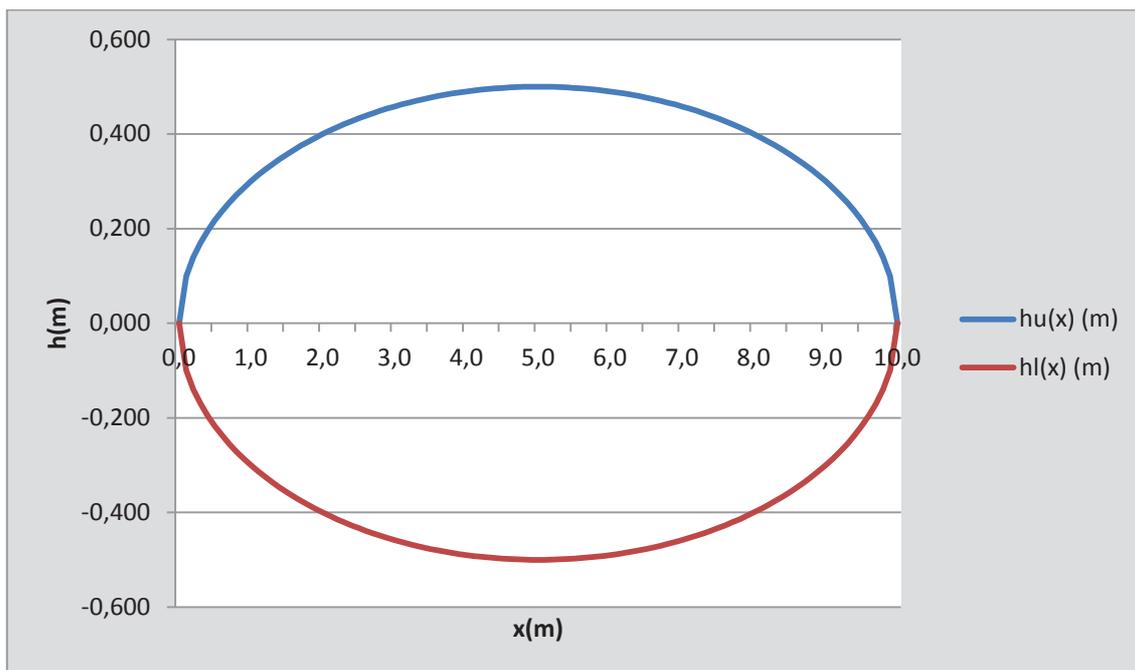


Fig. 5.16 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

5.3.2. Seconda combinazione di carico

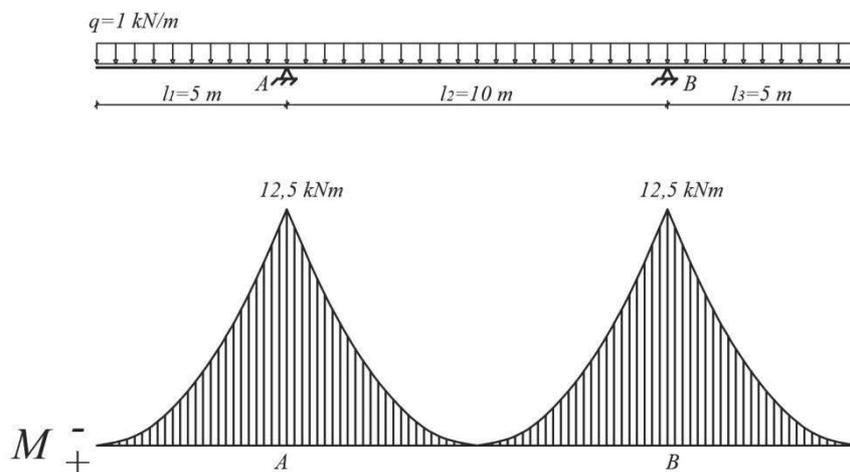


Fig. 5.17 – Seconda combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 1

$$H_0 = H_{ed} \quad (5.59)$$

Dove H_{ed} è l'altezza all'estremo destro della campata in esame.

$$M(x) = qx \quad M(H_o) = ql_1 \quad (5.60)$$

$$H(x) = \frac{H_0 x}{l_1} \quad (5.61)$$

x [m]	H(x) [m]	h _u (x) [m]	h _l (x) [m]
0,0	0,000	0,000	0,000
0,5	0,100	0,050	-0,050
1,0	0,200	0,100	-0,100
1,5	0,300	0,150	-0,150
2,0	0,400	0,200	-0,200
2,5	0,500	0,250	-0,250
3,0	0,600	0,300	-0,300
3,5	0,700	0,350	-0,350
4,0	0,800	0,400	-0,400
4,5	0,900	0,450	-0,450
5,0	1,000	0,500	-0,500

Tab. 5.9 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 1 al variare di x

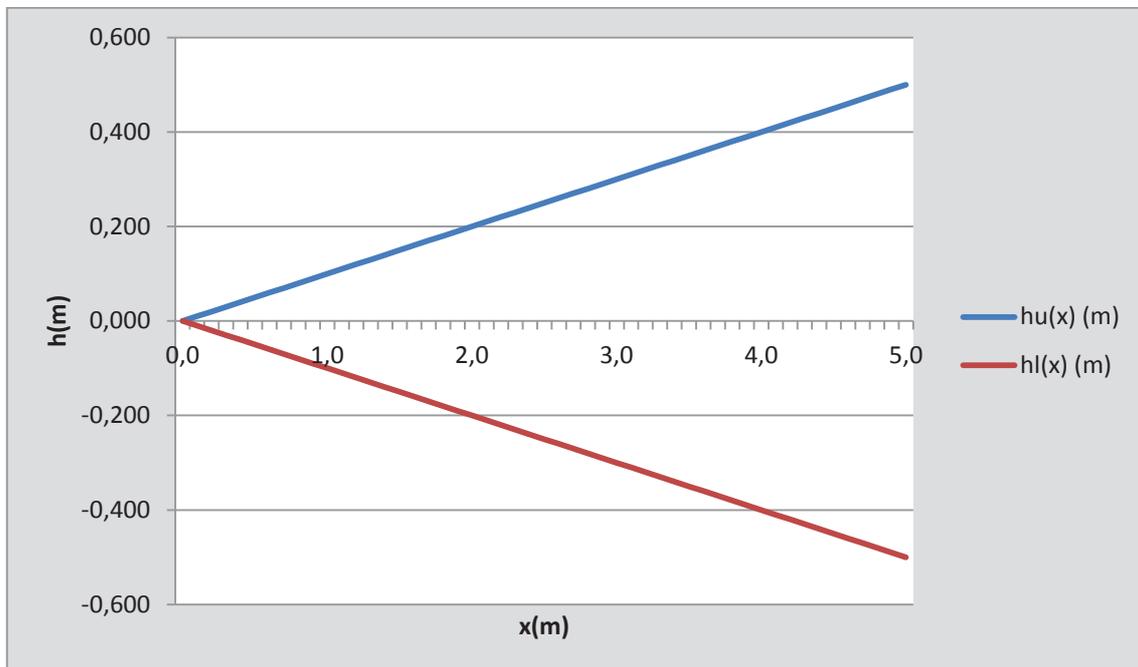


Fig. 5.18 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 1

Campata 2

$$H_0 = H_{es} \quad (5.62)$$

Dove H_{es} è l'altezza all'estremo sinistro della campata in esame.

$$M(x) = T_A x - \frac{q(l_1 + x)^2}{2} \quad M(H_0) = -\frac{ql_1^2}{2} \quad T_A = \frac{q(l_1 + l_2 + l_3)}{2} \quad (5.63)$$

$$H(x) = \sqrt{\left(\frac{H_0^2}{\left(-\frac{ql_1^2}{2}\right)}\right) \left[T_A x - \frac{q(l_1 + x)^2}{2}\right]} \quad (5.64)$$

x [m]	H(x) [m]	h _u (x) [m]	h _i (x) [m]
0,0	1,000	0,500	-0,500
0,5	0,900	0,450	-0,450
1,0	0,800	0,400	-0,400
1,5	0,700	0,350	-0,350
2,0	0,600	0,300	-0,300
2,5	0,500	0,250	-0,250
3,0	0,400	0,200	-0,200
3,5	0,300	0,150	-0,150
4,0	0,200	0,100	-0,100
4,5	0,100	0,050	-0,050
5,0	0,000	0,000	0,000
5,5	0,100	0,050	-0,050
6,0	0,200	0,100	-0,100
6,5	0,300	0,150	-0,150
7,0	0,400	0,200	-0,200
7,5	0,500	0,250	-0,250
8,0	0,600	0,300	-0,300
8,5	0,700	0,350	-0,350
9,0	0,800	0,400	-0,400
9,5	0,900	0,450	-0,450
10,0	1,000	0,500	-0,500

Tab. 5.10 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

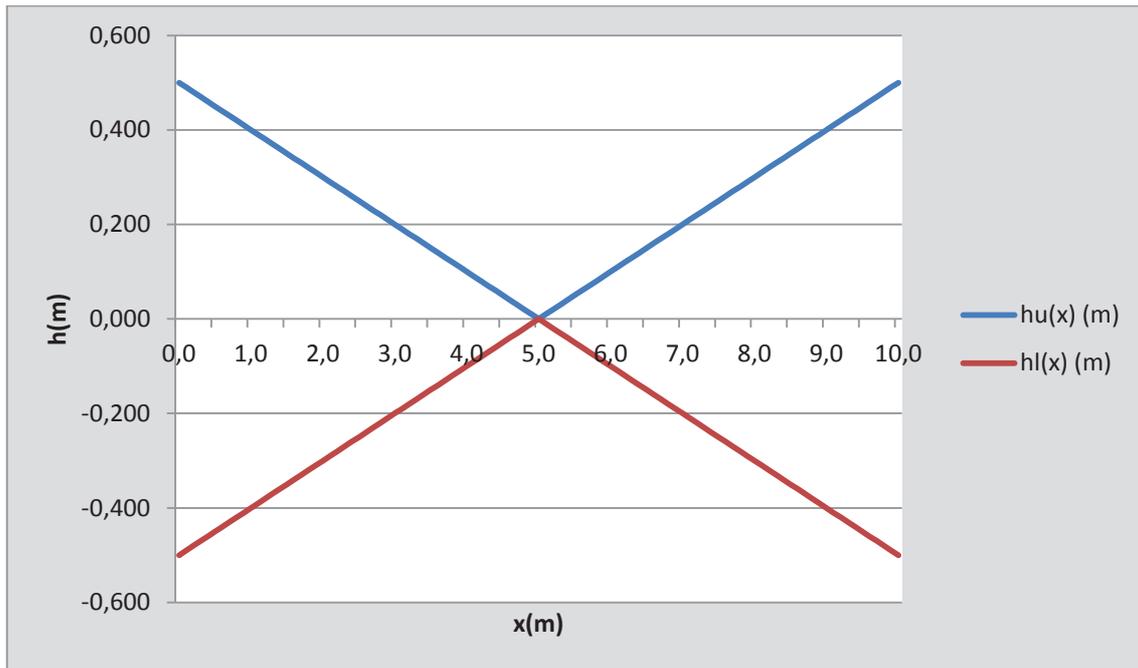


Fig. 5.19 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

Campata 3

$$H_0 = H_{es} \quad (5.65)$$

$$M(x) = -\frac{q(l_3 - x)^2}{2} \quad M(H_0) = -\frac{ql_3^2}{2} \quad (5.66)$$

$$H(x) = \frac{H_0(l_3 - x)}{l_3} \quad (5.67)$$

x [m]	H(x) [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	1,000	0,500	-0,500
0,5	0,900	0,450	-0,450
1,0	0,800	0,400	-0,400
1,5	0,700	0,350	-0,350
2,0	0,600	0,300	-0,300
2,5	0,500	0,250	-0,250
3,0	0,400	0,200	-0,200
3,5	0,300	0,150	-0,150
4,0	0,200	0,100	-0,100
4,5	0,100	0,050	-0,050
5,0	0,000	0,000	0,000

Tab. 5.11 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 3 al variare di x

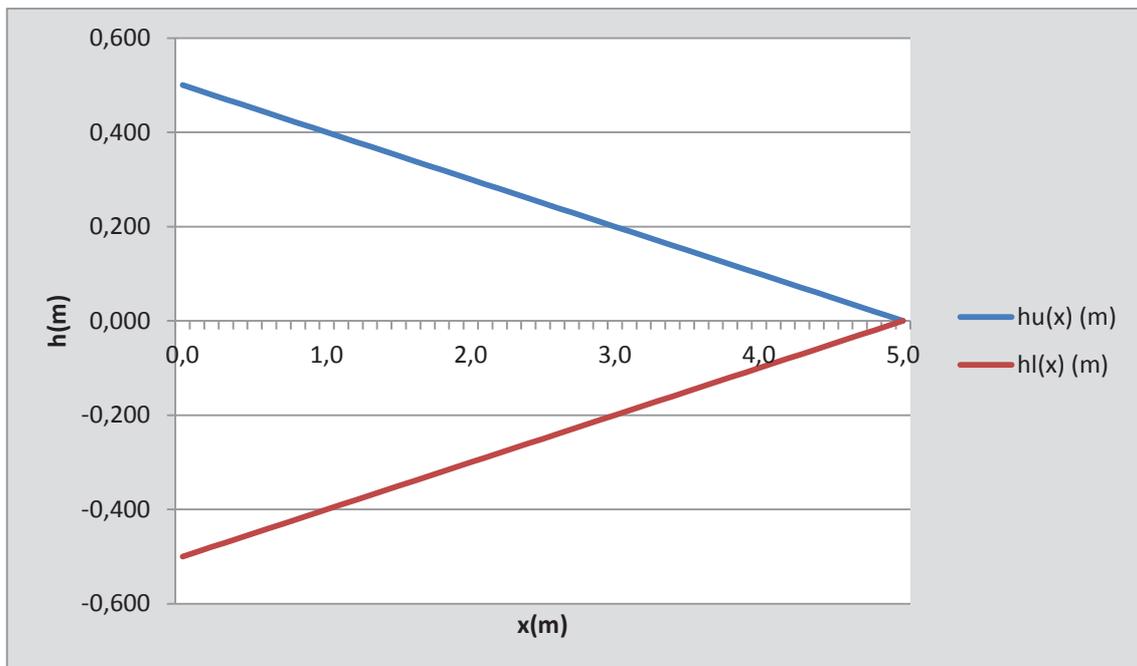


Fig. 5.20 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 3

5.3.3. Terza combinazione di carico

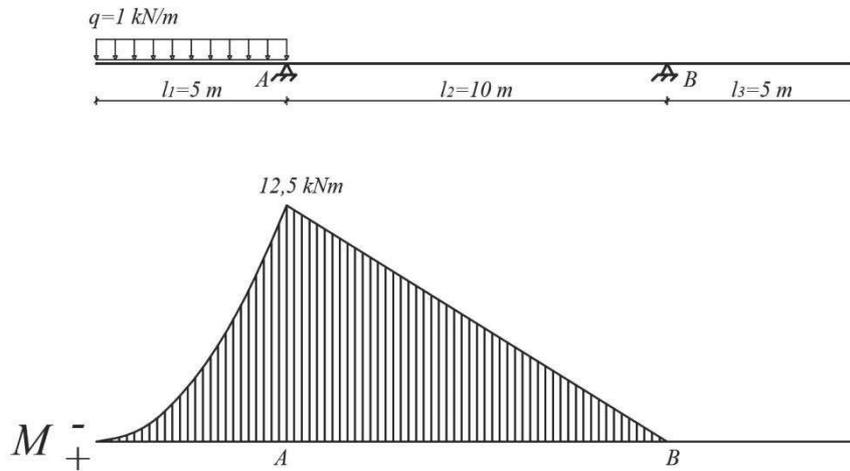


Fig. 5.21 - Terza combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 2

$$H_0 = H_{es} \quad (5.68)$$

$$M(x) = -ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + x \right) + T_A x \quad M(H_0) = \frac{-ql_1^2}{2} \quad T_A = ql_1 \left(1 + \frac{l_1}{2l_2} \right) \quad (5.69)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(\frac{-ql_1^2}{2} \right)} \left[-ql_1 \left(\frac{l_1}{2} + x \right) + T_A x \right]} \quad (5.70)$$

x [m]	H(x) [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	1,000	0,500	-0,500
0,5	0,975	0,487	-0,487
1,0	0,949	0,474	-0,474
1,5	0,922	0,461	-0,461
2,0	0,894	0,447	-0,447
2,5	0,866	0,433	-0,433
3,0	0,837	0,418	-0,418
3,5	0,806	0,403	-0,403
4,0	0,775	0,387	-0,387
4,5	0,742	0,371	-0,371
5,0	0,707	0,354	-0,354
5,5	0,671	0,335	-0,335
6,0	0,632	0,316	-0,316
6,5	0,592	0,296	-0,296
7,0	0,548	0,274	-0,274
7,5	0,500	0,250	-0,250
8,0	0,447	0,224	-0,224
8,5	0,387	0,194	-0,194
9,0	0,316	0,158	-0,158
9,5	0,224	0,112	-0,112
10,0	0,000	0,000	0,000

Tab. 5.12 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

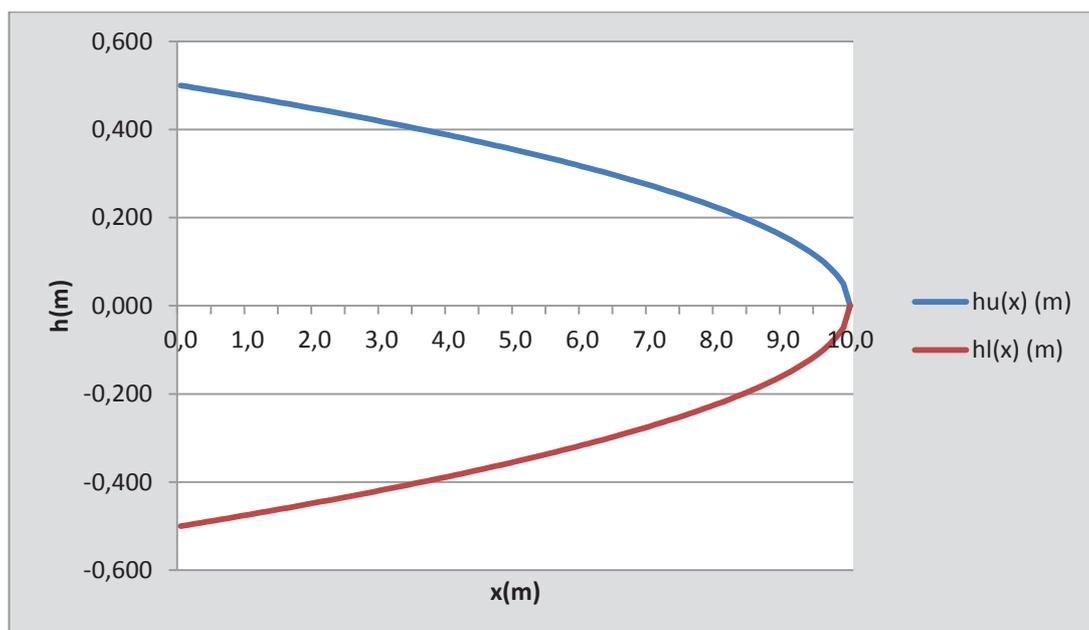


Fig. 5.22 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

5.3.4. Quarta combinazione di carico

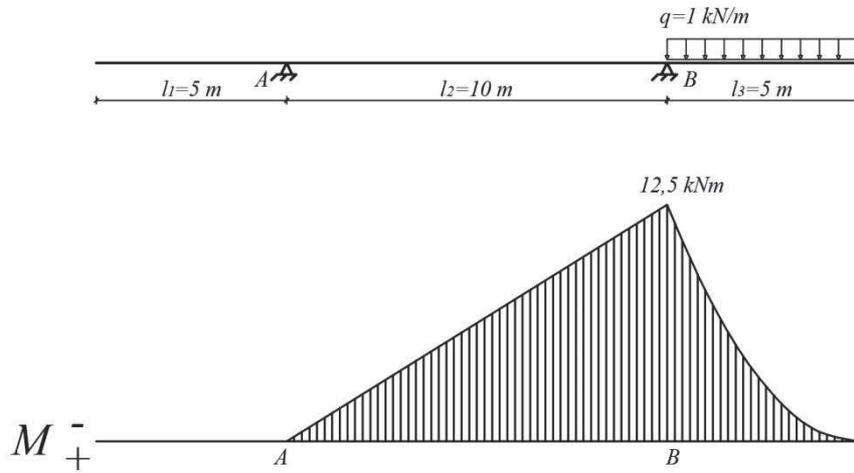


Fig. 5.23 - Quarta combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 2

$$H_0 = H_{ed} \quad (5.71)$$

$$M(x) = -ql_3\left(\frac{l_3}{2} + l_2 - x\right) + T_A(l_2 - x) \quad M(H_0) = -\frac{ql_3^2}{2} \quad T_B = ql_3\left(1 + \frac{l_3}{2l_2}\right) \quad (5.72)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(\frac{-ql_3^2}{2}\right)} \left[-ql_3\left(\frac{l_3}{2} + l_2 - x\right) + T_B(l_2 - x) \right]} \quad (5.73)$$

x [m]	H(x) [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	0,000	0,000	0,000
0,5	0,224	0,112	-0,112
1,0	0,316	0,158	-0,158
1,5	0,387	0,194	-0,194
2,0	0,447	0,224	-0,224
2,5	0,500	0,250	-0,250
3,0	0,548	0,274	-0,274
3,5	0,592	0,296	-0,296
4,0	0,632	0,316	-0,316
4,5	0,671	0,335	-0,335
5,0	0,707	0,354	-0,354
5,5	0,742	0,371	-0,371
6,0	0,775	0,387	-0,387
6,5	0,806	0,403	-0,403
7,0	0,837	0,418	-0,418
7,5	0,866	0,433	-0,433
8,0	0,894	0,447	-0,447
8,5	0,922	0,461	-0,461
9,0	0,949	0,474	-0,474
9,5	0,975	0,487	-0,487
10,0	1,000	0,500	-0,500

Tab. 5.13 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

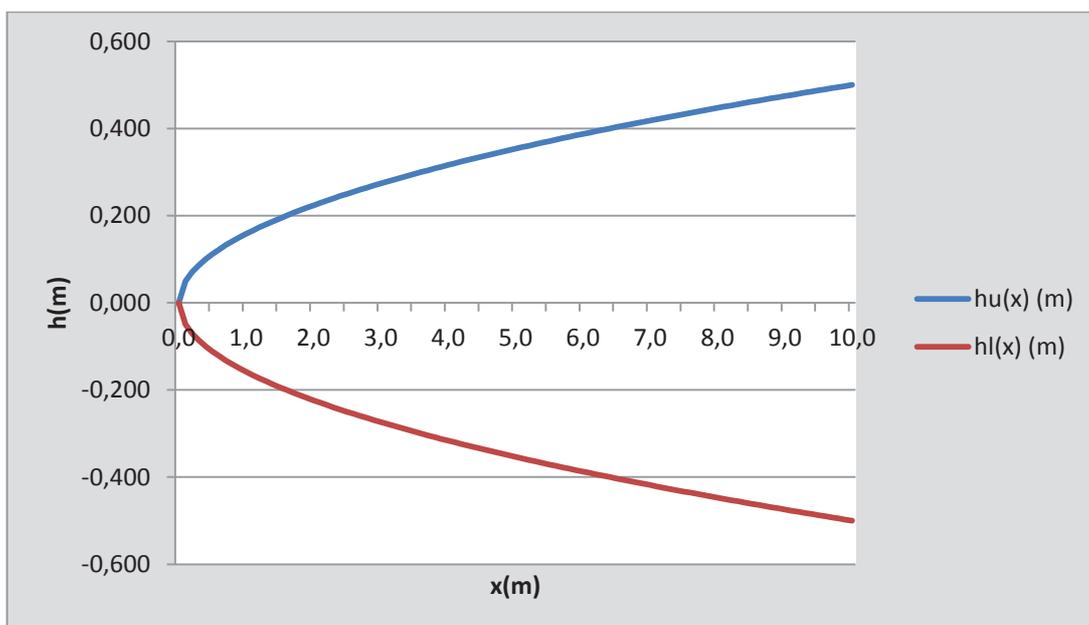


Fig. 5.24 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

5.3.5. Quinta combinazione di carico

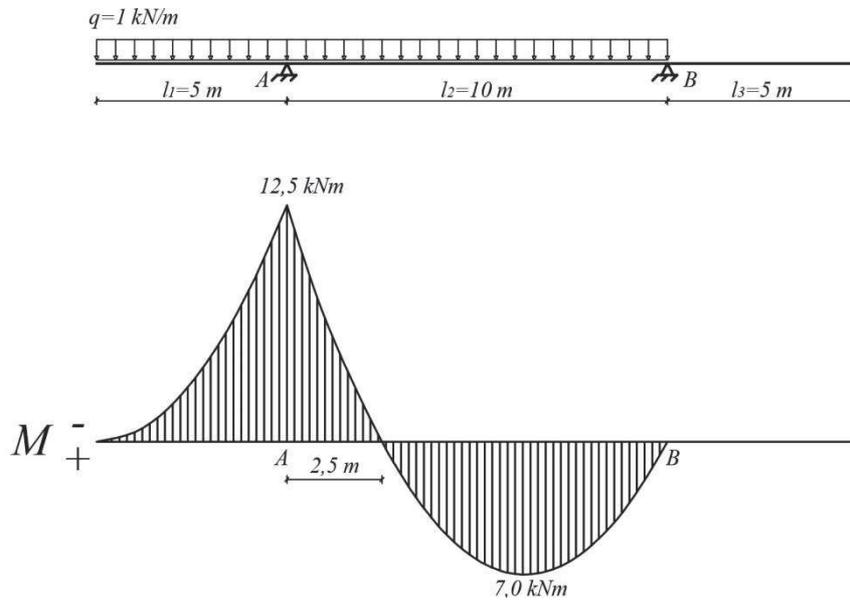


Fig. 5.25 - Quinta combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 2

$$H_0 = H_{es} \quad (5.74)$$

$$M(x) = -\frac{q(l_1 + x)^2}{2} + T_A x \quad M(H_0) = -\frac{ql_1^2}{2} \quad TA = \frac{q(l_1 + l_2)^2}{2l_2} \quad (5.75)$$

$$H(x) = \sqrt{\left[\frac{H_0^2}{\left(-\frac{ql_1^2}{2} \right)} \left[-\frac{q(l_1 + x)^2}{2} + T_A x \right] \right]} \quad (5.76)$$

x [m]	H(x) [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	1,000	0,500	-0,500
0,5	0,872	0,436	-0,436
1,0	0,735	0,367	-0,367
1,5	0,583	0,292	-0,292
2,0	0,400	0,200	-0,200
2,5	0,000	0,000	0,000
3,0	0,374	0,187	-0,187
3,5	0,510	0,255	-0,255
4,0	0,600	0,300	-0,300
4,5	0,663	0,332	-0,332
5,0	0,707	0,354	-0,354
5,5	0,735	0,367	-0,367
6,0	0,748	0,374	-0,374
6,5	0,748	0,374	-0,374
7,0	0,735	0,367	-0,367
7,5	0,707	0,354	-0,354
8,0	0,663	0,332	-0,332
8,5	0,600	0,300	-0,300
9,0	0,510	0,255	-0,255
9,5	0,374	0,187	-0,187
10,0	0,000	0,000	0,000

Tab. 5.14 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

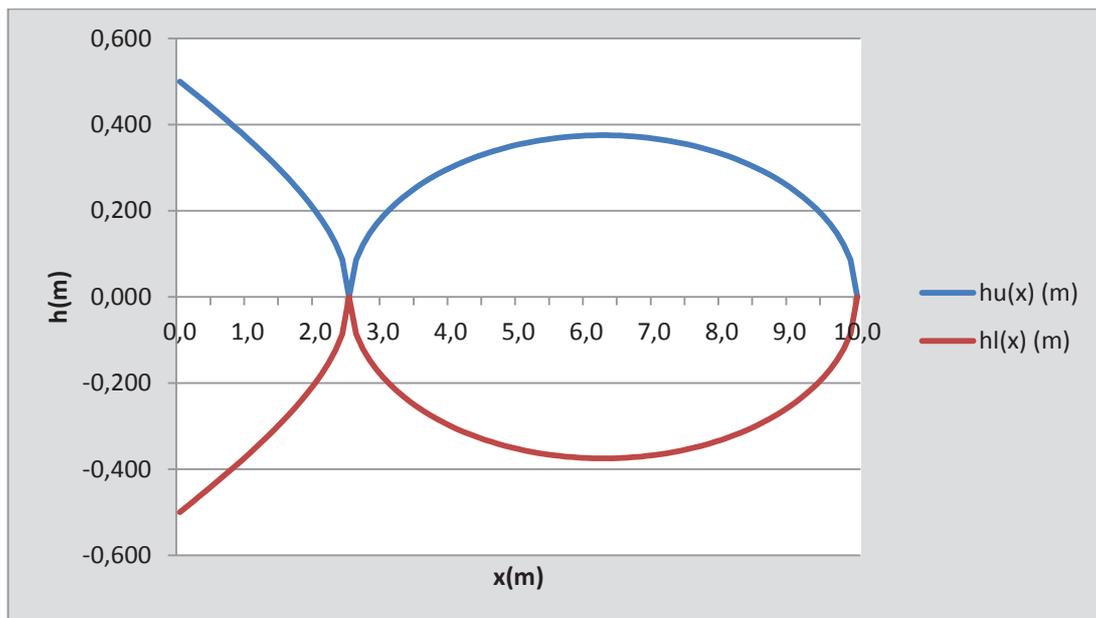


Fig. 5.26 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

5.3.6. Sesta combinazione di carico

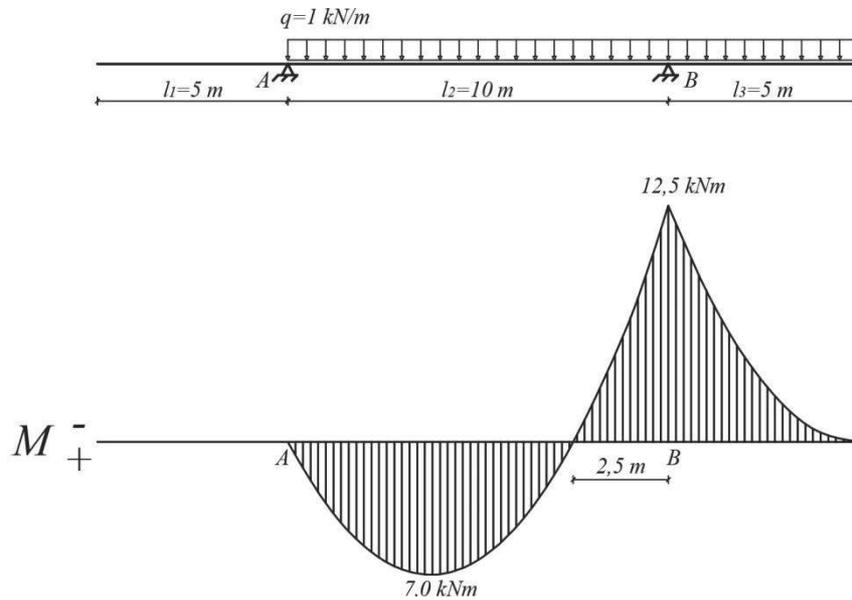


Fig. 5.27 - Sesta combinazione di carico e diagramma del momento flettente

Campata 2

$$H_0 = H_{ed} \quad (5.77)$$

$$M(x) = -\frac{q(l_3 + l_2 - x)^2}{2} + T_B(l_2 - x) \quad M(H_0) = -\frac{ql_3^2}{2} \quad T_B = \frac{q(l_2 + l_3)^2}{2l_2} \quad (5.78)$$

$$H(x) = \sqrt{\left[\frac{H_0^2}{\left(-\frac{ql_3^2}{2} \right)} \left[-\frac{q(l_3 + l_2 - x)^2}{2} + T_B(l_2 - x) \right] \right]} \quad (5.79)$$

x [m]	H(x) [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	0,000	0,000	0,000
0,5	0,374	0,187	-0,187
1,0	0,510	0,255	-0,255
1,5	0,600	0,300	-0,300
2,0	0,663	0,332	-0,332
2,5	0,707	0,354	-0,354
3,0	0,735	0,367	-0,367
3,5	0,748	0,374	-0,374
4,0	0,748	0,374	-0,374
4,5	0,735	0,367	-0,367
5,0	0,707	0,354	-0,354
5,5	0,663	0,332	-0,332
6,0	0,600	0,300	-0,300
6,5	0,510	0,255	-0,255
7,0	0,374	0,187	-0,187
7,5	0,000	0,000	0,000
8,0	0,400	0,200	-0,200
8,5	0,583	0,292	-0,292
9,0	0,735	0,367	-0,367
9,5	0,872	0,436	-0,436
10,0	1,000	0,500	-0,500

Tab. 5.15 – Valori discreti dell'altezza della trave della Campata 2 al variare di x

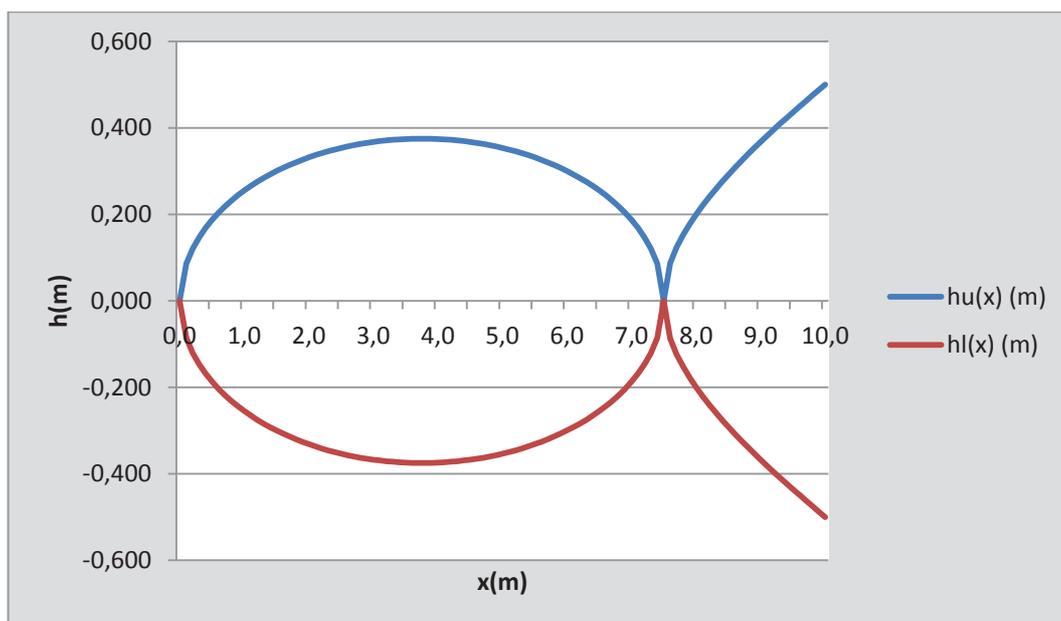


Fig. 5.28 – Configurazione geometrica ottimale della Campata 2

A questo punto ottenute le diverse configurazioni della trave per ogni combinazione di carico, possiamo procedere alla determinazione del profilo ottimale tramite l'utilizzo del valore massimo e minimo rispettivamente di $h_u(x)$ e $h_l(x)$.

x [m]	$h_u(x)$ [m]	$h_l(x)$ [m]
0,0	0,000	0,000
1,0	0,100	-0,100
2,0	0,200	-0,200
3,0	0,300	-0,300
4,0	0,400	-0,400
5,0	0,500	-0,500
6,0	0,474	-0,474
7,0	0,447	-0,447
8,0	0,458	-0,458
9,0	0,490	-0,490
10,0	0,500	-0,500
11,0	0,490	-0,490
12,0	0,458	-0,458
13,0	0,447	-0,447
14,0	0,474	-0,474
15,0	0,500	-0,500
16,0	0,400	-0,400
17,0	0,300	-0,300
18,0	0,200	-0,200
19,0	0,100	-0,100
20,0	0,000	0,000

Tab. 5.16 – Valori discreti dell'altezza della trave simmetrica rispetto all'asse longitudinale

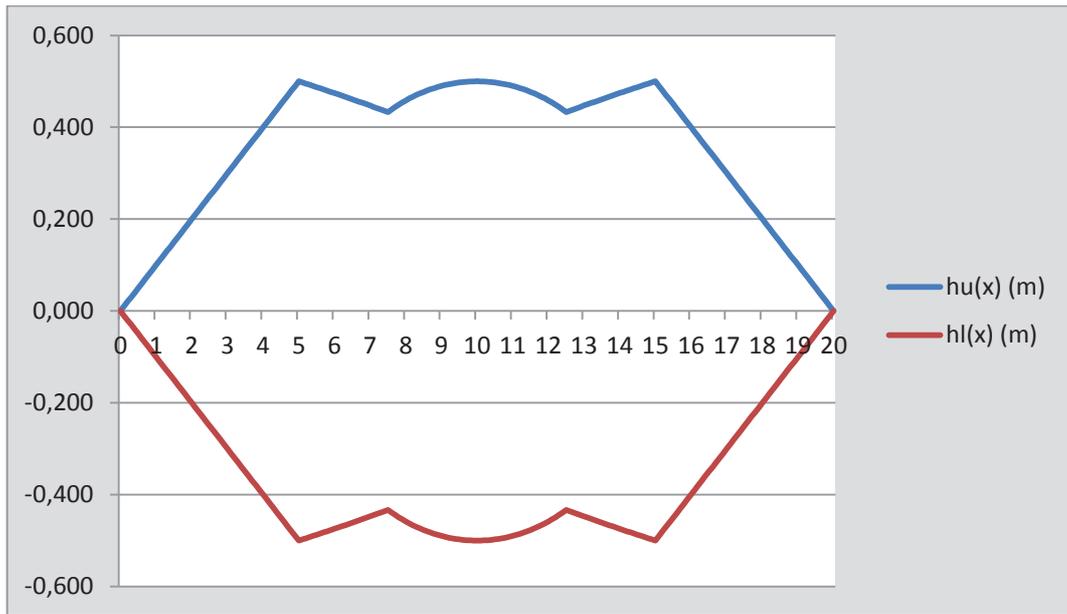


Fig. 5.29 – Configurazione ottimale della trave simmetrica rispetto all'asse longitudinale

Riportiamo ora i risultati nel caso in cui si consideri una trave avente profilo piano superiormente e variabile inferiormente.

x [m]	H(x) [m]
0,0	0,000
1,0	-0,200
2,0	-0,400
3,0	-0,600
4,0	-0,800
5,0	-1,000
6,0	-0,949
7,0	-0,894
8,0	-0,917
9,0	-0,980
10,0	-1,000
11,0	-0,980
12,0	-0,917
13,0	-0,894
14,0	-0,949
15,0	-1,000
16,0	-0,800
17,0	-0,600
18,0	-0,400
19,0	-0,200
20,0	0,000

Tab. 5.17 – Valori discreti dell'altezza della trave con profilo piano superiormente

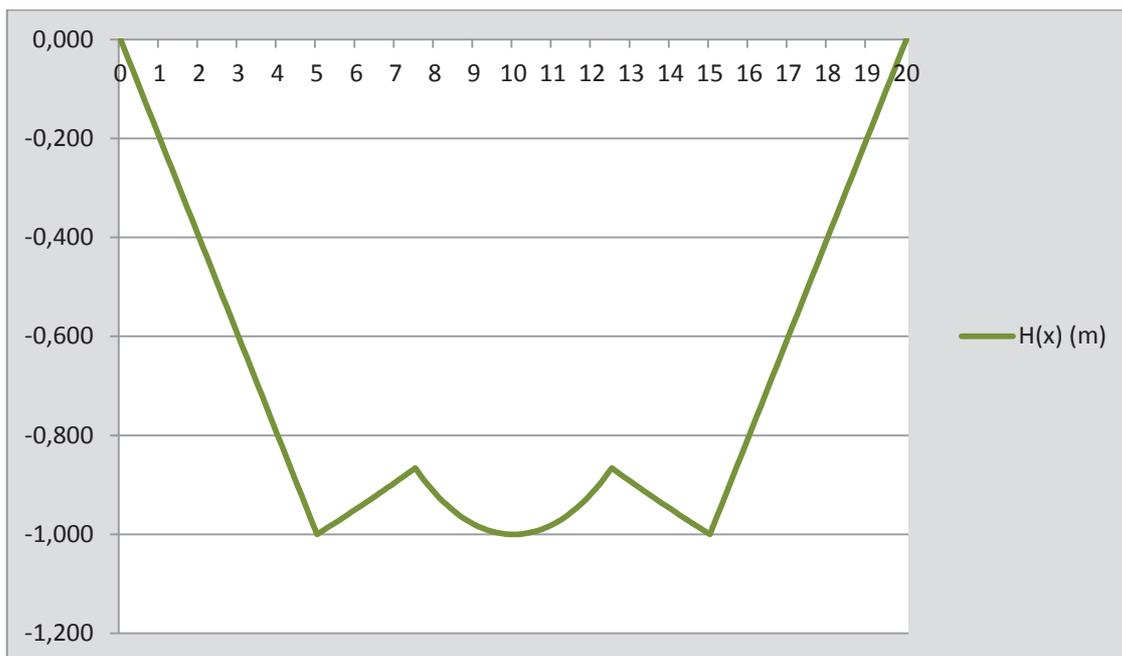


Fig. 5.30 – Configurazione ottimale della trave con profilo piano superiormente

5.4. Conclusioni

Come abbiamo potuto osservare, nella determinazione dello stato di sforzo della trave, sussiste una sostanziale differenza tra i risultati ottenuti con i due metodi, indifferentemente dal criterio di verifica applicato, essenzialmente in prossimità dell'estremo libero. Tale risultato è in accordo con quanto sostenuto dallo stesso Timoshenko, il quale suggerisce che, per una applicazione pratica dei risultati ottenuti, si dovrà tenere in conto dello sforzo di taglio che è stato trascurato nel suo processo, aumentando l'altezza della trave proprio in prossimità dell'estremo libero. In generale il "metodo Timoshenko" produce stime ragionevoli degli sforzi, con errori di pochi punti percentuali. Occorre inoltre osservare che l'errore commesso nell'utilizzo del metodo da lui proposto è maggiore nel caso di trave con profilo piano superiormente che di fatto risulta essere il modello più utilizzato tra i due nella pratica corrente. Nel caso particolare 5.1.4.a. abbiamo potuto constatare che l'errore commesso sarà tanto

maggiore quanto maggiore sarà il rapporto H_0/L , anche in questo caso in accordo con quanto sostenuto nel metodo classico in cui si evidenzia la correttezza di tale metodo esclusivamente per travi snelle. Per quanto riguarda invece la determinazione della direzione delle tensioni principali l'errore commesso utilizzando il metodo proposto da Timoshenko risulta essere importante. Anche in questo caso i risultati ottenuti tramite l'utilizzo del metodo avanzato si discostano maggiormente dal metodo di Timoshenko in prossimità dell'estremo libero. Lo sviluppo delle equazioni differenziali per la determinazione del profilo ottimale della trave è stato riportato per completezza di trattazione, tuttavia non è stato applicato, vista la bontà e semplicità dei metodi alternativi. Alla luce dell'errore minimo commesso nell'ambito di trave snelle infatti, al quale associamo dei vincoli di fattibilità realizzativa che condizionano la realizzazione effettiva del profilo di trave perfettamente rispondente alla condizione di ottimo, e tenendo in considerazione che, nel caso dell'estremo libero, dovrà comunque essere garantito uno spessore minimo strutturale, si ritiene che si possa procedere alla determinazione del profilo di trave tramite il metodo proposto dalla trattazione classica. Con tale metodo è stato quindi determinato il profilo di trave rispondente allo schema statico nel caso studio del taglio efficace e con tale metodo si procederà alla determinazione del profilo della trave Gerber anche in ambito progettuale. Le proprietà della trave ad uniforme resistenza ci consentiranno di compensare le difficoltà realizzative date dall'utilizzo di una geometria complessa, con conseguente dispendio di manovalanza per la realizzazione delle staffe, con una distribuzione uniforme delle armature.

6. Applicazione dei risultati ottenuti ad un caso reale

Nel presente capitolo saranno applicati i criteri di ottimizzazione strutturale fin qui trattati ad un caso reale. Si procederà infatti alla progettazione di una copertura per lo spazio destinato a mercato in Via Buontalenti a Livorno. Nell'ambito dell'iniziativa promossa dal Comune di Livorno, Pensiamo in Grande, sono infatti in programmazione dei progetti di riqualificazione urbana proprio per le aree del centro storico in esame. Nel nostro caso la realizzazione di una copertura ci fornirà il pretesto per una applicazione pratica dei risultati fino a qui ottenuti. A partire da una analisi dei rapporti esistenti tra il mercato e la città ci addenteremo poi nella stesura dei calcoli manuali per la struttura in esame.

6.1. Il binomio mercato-città e il Mercato delle Vettovaglie di Livorno

Il mercato mantiene un legame inscindibile con lo sviluppo di una città. La causa, diretta o indiretta, della comparsa e della decadenza della città storica risiede proprio nell'organizzazione del commercio. Risulta quindi impossibile parlare di mercato senza accostarlo ad un contesto urbano di riferimento. Nella storia dell'architettura possiamo notare come non esista alcuna città che non abbia spazi destinati al mercato in quanto luoghi inscindibili dalla città stessa (Nucifora 2012). Se da un lato questo legame risulta evidente, dall'altro possiamo notare come spazi ed architetture destinati al commercio

all'interno del tessuto urbano cittadino non favoriscano delle stesse attenzioni attribuite alle architetture destinate alla politica, al culto e alla difesa. Il carattere ambulante di merci e mercati ha portato, non alla determinazione e creazione di appositi ambiti destinati al commercio, ma all'occupazione di zone libere esistenti con strutture precarie e disordinate. Nella storia inoltre, nel momento in cui sono stati effettivamente destinati alcuni luoghi al commercio, nella maggioranza dei casi ciò avveniva solo al fine di migliorare il decoro e l'igiene dei luoghi nei quali il mercato era precedentemente collocato. Il mercato all'aperto il più delle volte è reso riconoscibile dalla marce esposta, dal vociare di mercanti e compratori, privi di bancarelle ed ambulanti, questi spazi tornano ad essere dei vuoti urbani. Con l'esplosione del fenomeno dell'inurbamento definire edifici destinati a tale attività diventa necessario, un esempio di tali manufatti lo ritroviamo nel Mercato delle Vettovaglie di Livorno. Nel centro storico della città stessa, l'attività commerciale riveste ancora un ruolo primario nell'ambito della definizione degli spazi urbani, a tal punto da meritare una maggiore attenzione. Proprio nello spazio antistante tale mercato però, si è verificato nel tempo quel fenomeno, sopra descritto, caratterizzato dall'occupazione del suolo in modo inappropriato e confusionario, ci apprestiamo quindi alla realizzazione di un progetto in detto sito. Esso consisterà nell'utilizzo di una trave a sezione trasversale variabile quale elemento generatore dell'insieme e capace di conferire direzionalità, essendo quest'ultima un riferimento essenziale delle caratteristiche dello spazio nel quale tale copertura verrà inserito. Si rimanda alle successive trattazioni per lo svolgimento dei calcoli effettuati ed alle tavole allegate per avere una visione completa del progetto stesso.

6.2. Calcoli di progetto

Per la progettazione della struttura in calcestruzzo armato utilizziamo:

$$\text{Calcestruzzo C 28/35} \quad f_{ck} = 28 \text{ MPa} \quad E = 33720 \text{ MPa} \quad (6.1)$$

$$\text{Ferri di armatura Fe B 450 C} \quad f_{yk} = 450 \text{ MPa} \quad E = 210000 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

$$f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 15,87 \text{ MPa} \quad \text{dove } \alpha = 0,85; \gamma_c = 1,5 \quad (6.3)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 391,30 \text{ MPa} \quad \text{dove } \gamma_s = 1,15 \quad (6.4)$$

$$n = 15 \quad (6.5)$$

6.2.1. Soletta in calcestruzzo armato

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$q_s = \mu_i q_{sk} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ \quad \rightarrow \quad \mu_1 = 0,8$$

$$a_s \leq 200 \text{ m} \quad \rightarrow \quad q_{sk} = 1,15 \text{ kN/m}^2$$

$$q_s = 0,8 \cdot 1,15 = 1 \text{ kN/m}^2$$

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,00 \text{ m} \quad = 1,0 \text{ kN/m}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 1,00 \text{ m} \quad = 0,1 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 1,00 \text{ m} \cdot 0,10 \text{ m} \quad = 2,5 \text{ kN/m}$$

$$g_k = 2,6 \text{ kN/m} \quad q_k = 1,0 \text{ kN/m} \quad (6.6)$$

$$g_d = \gamma_g \cdot g_k = 3,4 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.7)$$

$$q_d = \gamma_q \cdot q_k = 1,5 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_q = 1,5 \quad (6.8)$$

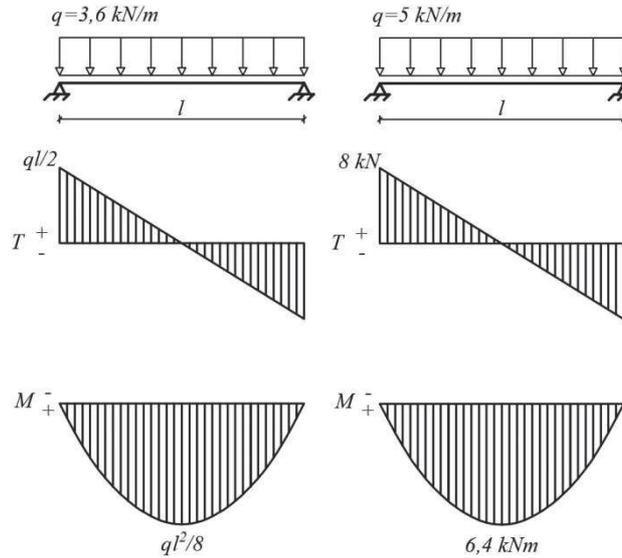


Fig. 6.1 – Schema statico e diagrammi della soletta in calcestruzzo armato

Definiamo la lunghezza massima tra gli appoggi della soletta, consideriamo la stessa come un elemento monodimensionale consapevoli di tralasciare alcune delle proprietà favorevoli garantite dall'elemento piastra.

La soletta presenta quindi le seguenti caratteristiche:

$$\text{Armatura superiore } 1 \phi 8 / 20 \text{ cm} \rightarrow A'_s = 2,51 \text{ cm}^2 \quad (6.9)$$

$$\text{Armatura inferiore } 1 \phi 8 / 20 \text{ cm} \rightarrow A_s = 2,51 \text{ cm}^2 \quad (6.10)$$

$$d' = c_s + \frac{\phi_{rete}}{2} = 2,4 \text{ cm} \quad d = h - d' = 7,6 \text{ cm} \quad (6.11)$$

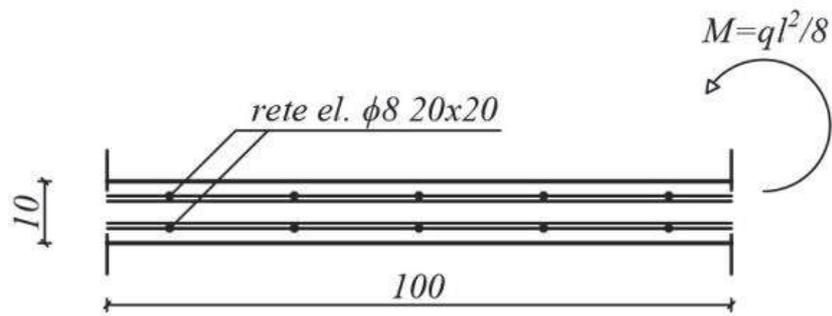


Fig. 6.2 – Sezione trasversale della soletta in calcestruzzo armato

Consideriamo la soletta in c.a. sottoposta a flessione semplice:

$$S = 0 \quad (6.12)$$

$$S = \frac{b \cdot x^2}{2} + n \cdot A'_s \cdot (x - d') - n \cdot A_s \cdot (d - x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2,1 \text{ cm} \quad (6.13)$$

$$J = \frac{b \cdot x^3}{3} + n \cdot A'_s \cdot (x - d')^2 + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2 = 1451 \text{ cm}^4 \quad (6.14)$$

Il raggiungimento delle tensioni limite di esercizio avviene in primo luogo nelle barre di armatura soggette a trazione quindi definiamo la lunghezza della soletta in riferimento a tale parametro:

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M}{J} \cdot (d - x) \quad \sigma_s \leq 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.15)$$

$$M_{\max} = \frac{q \cdot l^2}{8} = 0,8 \cdot f_{yk} \cdot \frac{J}{n} \cdot \frac{1}{(d - x)} \quad \text{dove } q = g_k + q_k = 3,6 \text{ kN/m} \quad (6.16)$$

$$l_{\max} = \sqrt{0,8 \cdot f_{yk} \cdot \frac{J}{n} \cdot \frac{1}{(d - x)} \cdot \frac{8}{q}} = 3,75 \text{ m} \quad \text{assumiamo } l = 3,20 \text{ m} \quad (6.17)$$

Verifica allo stato limite ultimo

$$M_d = \frac{q \cdot l^2}{8} = 6,4 \text{ kNm} \quad \text{dove } q = g_d + q_d = 5 \text{ kN/m} \quad (6.18)$$

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,8 \cdot b \cdot f_{cd}} = 0,8 \text{ cm} \quad (6.19)$$

$$M_u = A_s \cdot f_{yd} (d - 0,4x) = 7,2 \text{ kNm} \quad (6.20)$$

$$M_d = 6,4 \text{ kNm} < 7,2 \text{ kNm} = M_u \quad (6.21)$$

Verifica allo stato limite di esercizio – combinazione di carico rara

$$M_e = \frac{q \cdot l^2}{8} = 4,6 \text{ kNm} \quad \text{dove } q = g_k + q_k = 3,6 \text{ kN/m} \quad (6.22)$$

$$x = \frac{n \cdot A_s}{b} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{n \cdot A_s}} \right) = 2 \text{ cm} \quad (6.23)$$

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot M_e}{b \cdot x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = 6,63 \text{ MPa} \quad (6.24)$$

$$\sigma_s = \frac{M_e}{A_s \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = 265,60 \text{ MPa} \quad (6.25)$$

$$\sigma_c = 6,63 \text{ MPa} < 16,80 \text{ MPa} = 0,60 \cdot f_{ck} \quad (6.26)$$

$$\sigma_s = 265,60 \text{ MPa} < 360,00 \text{ MPa} = 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.27)$$

6.2.2. Trave a sbalzo

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 3,20 \text{ m} = 3,0 \text{ kN/m}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 3,20 \text{ m} = 0,3 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 3,2 \text{ m} = 8,0 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} = 3,4 \text{ kN/m}$$

$$g_{k1} = 8,3 \text{ kN/m} \quad g_{k2} = 3,4 \text{ kN/m} \quad q_k = 3,0 \text{ kN/m} \quad (6.31)$$

$$g_{d1} = \gamma_g \cdot g_{k1} = 10,8 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.32)$$

$$g_{d2} = \gamma_g \cdot g_{k2} = 4,4 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.33)$$

$$q_d = \gamma_q \cdot q_k = 4,5 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_q = 1,5 \quad (6.34)$$

$$q_{1k} = 11,3 \text{ kN/m} \quad (6.35)$$

$$q_{1kT} = q_{1k} \cdot \cos \alpha = 11,1 \text{ kN/m} \quad q_{1kN} = q_{1k} \cdot \sin \alpha = 2,0 \text{ kN/m} \quad (6.36)$$

$$q_{2k} = 3,4 \text{ kN/m} \quad (6.37)$$

$$q_{2kT} = q_{2k} \cdot \cos \alpha = 3,3 \text{ kN/m} \quad q_{2kN} = q_{2k} \cdot \sin \alpha = 0,6 \text{ kN/m} \quad (6.38)$$

$$q_1 = 15 \text{ kN/m} \quad (6.39)$$

$$q_{1T} = q_1 \cdot \cos \alpha = 14,8 \text{ kN/m} \quad q_{1N} = q_1 \cdot \sin \alpha = 2,6 \text{ kN/m} \quad (6.40)$$

$$q_2 = 5 \text{ kN/m} \quad (6.41)$$

$$q_{2T} = q_2 \cdot \cos \alpha = 4,9 \text{ kN/m} \quad q_{2N} = q_2 \cdot \sin \alpha = 0,9 \text{ kN/m} \quad (6.42)$$

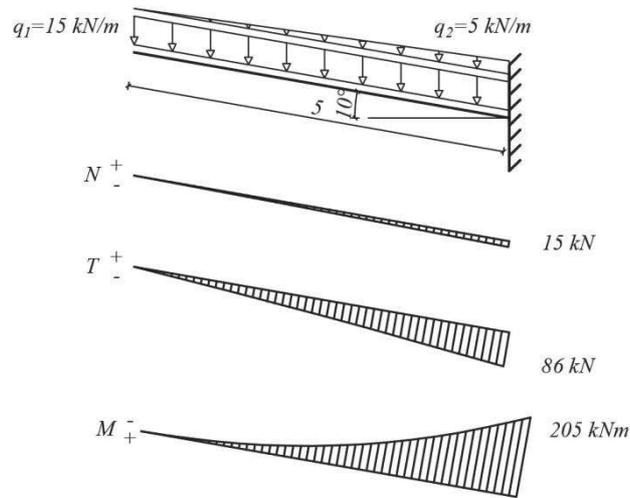


Fig. 6.3 – Schema statico e diagrammi della trave a sbalzo

$$N(x) = -q_{1N} \cdot x - q_{2N} \cdot \frac{x^2}{2l} \quad (6.43)$$

$$T(x) = -q_{1T} \cdot x - q_{2T} \cdot \frac{x^2}{2l} \quad (6.44)$$

$$M(x) = -q_{1T} \cdot \frac{x^2}{2} - q_{2T} \cdot \frac{x^3}{6l} \quad (6.45)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(-q_{1T} \cdot \frac{l^2}{2} - q_{2T} \cdot \frac{l^2}{6}\right)}} \cdot M(x) \quad (6.46)$$

La trave a sbalzo presenta le seguenti caratteristiche in prossimità dell'incastro:

$$\text{Armatura superiore } 4 \phi 22 \rightarrow A_s = 15,21 \text{ cm}^2 \quad (6.47)$$

$$\text{Armatura inferiore } 2 \phi 22 \rightarrow A'_s = 7,60 \text{ cm}^2 \quad (6.48)$$

$$d' = c_s + \phi_{staffe} + \frac{\phi_{ferri}}{2} = 3,9 \text{ cm} \quad d = h - d' = 41,1 \text{ cm} \quad (6.49)$$

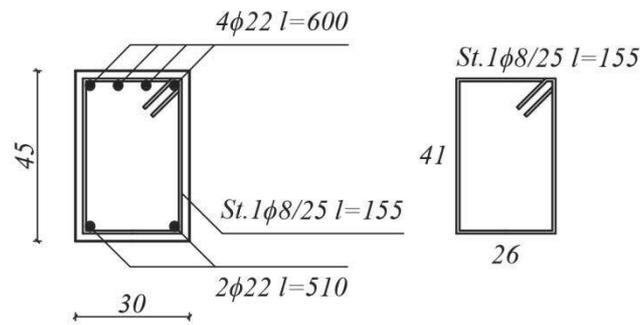


Fig. 6.4 – Sezione trasversale della trave a sbalzo all'incastro

Verifica allo stato limite ultimo

$$M(l) = -q_{1T} \cdot \frac{l^2}{2} - q_{2T} \cdot \frac{l^2}{6} = -205 \text{ kNm} \quad (6.50)$$

$$M_d = 205 \text{ kNm} \quad (6.51)$$

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,8 \cdot b \cdot f_{cd}} = 15,6 \text{ cm} \quad (6.52)$$

$$M_u = A_s \cdot f_{yd} (d - 0,4x) = 207 \text{ kNm} \quad (6.53)$$

$$M_d = 205 \text{ kNm} < 207 \text{ kNm} = M_u \quad (6.54)$$

Verifica allo stato limite di esercizio – combinazione di carico rara

$$M(l) = -q_{1kT} \cdot \frac{l^2}{2} - q_{2kT} \cdot \frac{l^2}{6} = -153 \text{ kNm} \quad (6.55)$$

$$M_e = 153 \text{ kNm} \quad (6.56)$$

$$x = \frac{n \cdot A_s}{b} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{n \cdot A_s}} \right) = 18,5 \text{ cm} \quad (6.57)$$

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot M_e}{b \cdot x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = 15,78 \text{ MPa} \quad (6.58)$$

$$\sigma_s = \frac{M_e}{A_s \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)} = 287,95 \text{ MPa} \quad (6.59)$$

$$\sigma_c = 15,78 \text{ MPa} < 16,80 \text{ MPa} = 0,60 \cdot f_{ck} \quad (6.60)$$

$$\sigma_s = 287,95 \text{ MPa} < 360,00 \text{ MPa} = 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.61)$$

Verifica al taglio

$$V(l) = -q_{1T} \cdot l - q_{2T} \frac{l}{2} = -86,2 \text{ kN} \quad (6.66)$$

$$V_{sd} = 86,2 \text{ kN} \quad (6.67)$$

$$V_{Rd1} = 0,058 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d = 113,8 \text{ kN} \quad (6.68)$$

$$V_{Rd2} = 0,31 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d = 608,0 \text{ kN} \quad (6.69)$$

$$V_{sd} = 86,2 \text{ kN} < 113,8 \text{ kN} = V_{Rd1} \quad (6.70)$$

Disponiamo l'armatura minima prevista dalla normativa ossia il massimo valore tra:

$$A_{st} = 3,00 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (6.71)$$

$$A_{st} = 0,10 \cdot \left(1 + 0,15 \cdot \frac{d}{b}\right) \cdot b = 3,62 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (6.72)$$

$$A_{wd} = 3,62 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (6.73)$$

Utilizziamo staffe ϕ 8 a due braccia con $A_{sw} = 1,01 \text{ cm}^2$ (6.74)

$$n = \frac{A_{wd}}{A_{sw}} = 4 \text{ staffe} \quad s = \frac{x}{n} = 25 \text{ cm} \quad (6.75)$$

Disporremo allora 1 ϕ 8 / 25 cm

La trave a sbalzo viene approssimata, nella realizzazione del progetto, alla formulazione corretta, essa infatti in realtà varia la propria sezione trasversale non linearmente.

L'approssimazione tramite l'assunzione della variazione lineare risulta efficace dato lo scarto minimo ottenuto nella sovrapposizione dei risultati.

6.2.3. Trave Gerber

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 10,40 \text{ m} = 10,4 \text{ kN/m}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 10,40 \text{ m} = 1,0 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 5,00 \text{ m} \cdot 2 = 25,0 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} \cdot 5,00 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 8,4 \text{ kN}$$

$$8,4 \text{ kN} \cdot 2 = 16,8 \text{ kN}$$

$$\frac{16,8}{3,20} \text{ kN/m} = 5,3 \text{ kN} = 7,0 \text{ kN/m}$$

- Peso proprio trave Gerber

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,90 \text{ m} = 9,0 \text{ kN/m}$$

$$g_k = 42 \text{ kN/m} \quad q_k = 10,40 \text{ kN/m} \quad (6.76)$$

$$g_d = \gamma_g \cdot g_k = 55 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.77)$$

$$q_d = \gamma_q \cdot q_k = 16 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_q = 1,5 \quad (6.78)$$

$$\text{Assumiamo } q = 75 \text{ kN/m} \quad (6.79)$$

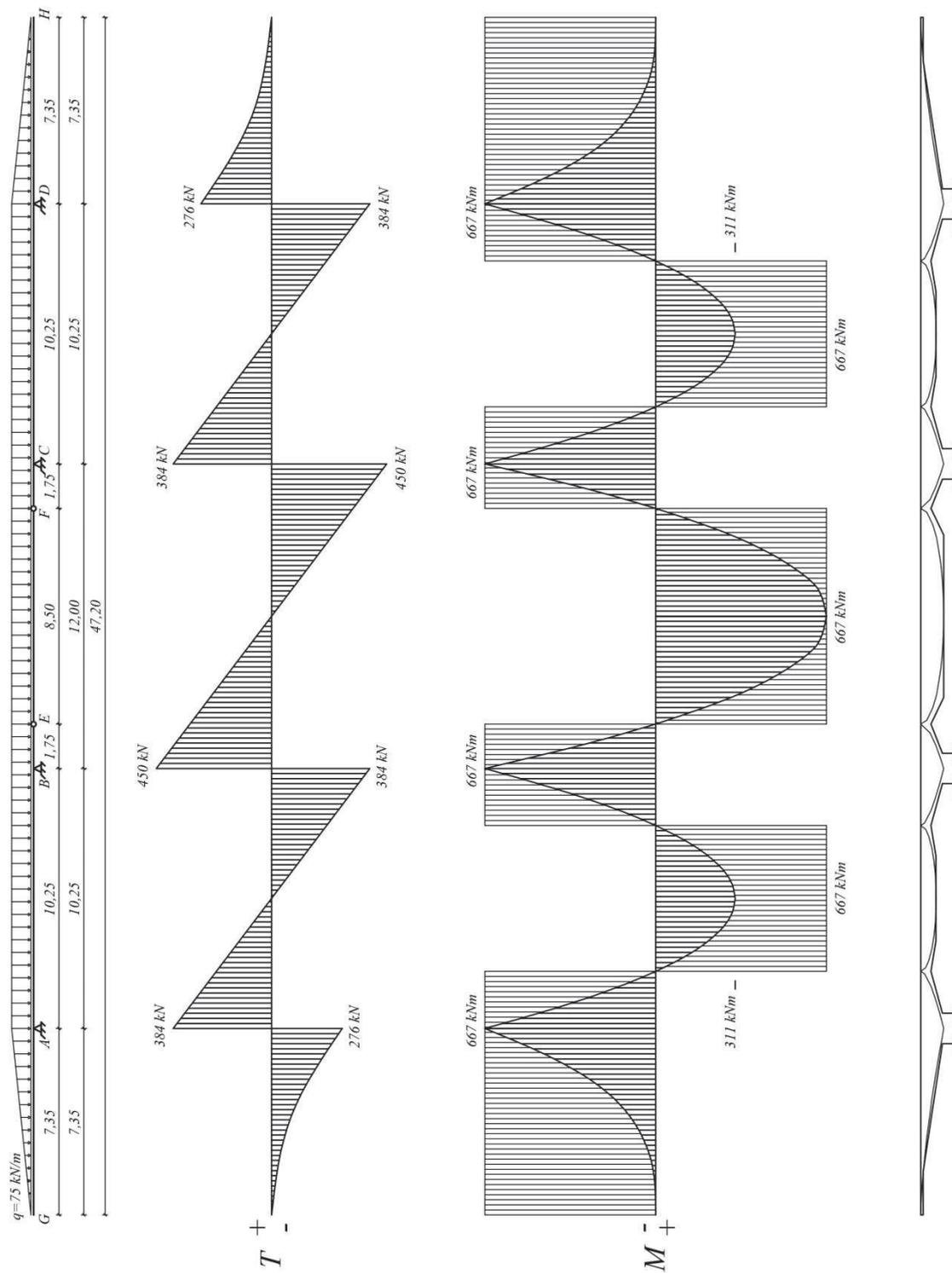


Fig. 6.5 – Schema statico; Diagramma del Taglio; Diagramma del momento flettente e del momento flettente modificato; Sezione longitudinale della trave Gerber ideale e sovrapposizione con la trave reale

Definiamo ora le caratteristiche della trave, interasse tra gli appoggi, posizionamento delle cerniere e lunghezza degli sbalzi, in modo da ottenere lo stesso momento flettente, in valore assoluto, agli appoggi e in mezzaria della trave incernierata alle estremità.

$$l_{BC} = 12,00 \text{ m} \quad l_{AB} = 0,854 \cdot l_{BC} = 10,25 \text{ m} \quad l_{BE} = 0,146 \cdot l_{BC} = 1,75 \text{ m} \quad (6.80)$$

$$M_{EF \max} = \frac{q \cdot l_{EF}^2}{8} = \frac{q \cdot l_{GA}^2}{6} = M_A \quad \rightarrow \quad l_{GA} = \sqrt{l_{EF}^2 \cdot \frac{3}{4}} = 7,35 \text{ m} \quad (6.81)$$

Tratto GA

$$M(x) = -\frac{q \cdot x^3}{6 \cdot l_{GA}} \quad (6.82)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(\frac{-q \cdot l_{GA}^2}{6}\right)} \cdot \left(\frac{-q \cdot x^3}{6 \cdot l_{GA}}\right)} \quad (6.83)$$

Tratto AB

$$M(x) = -\frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l_{GA}^2}{3} + l_{GA} \cdot x + x^2\right) + R_A \cdot x \quad (6.84)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(\frac{-q \cdot l_{GA}^2}{6}\right)} \cdot \left[-\frac{q}{2} \left(\frac{l_{GA}^2}{3} + l_{GA} \cdot x + x^2\right) + R_A \cdot x\right]} \quad (6.85)$$

Tratto BE

$$M(x) = -R_E \cdot (l_{BE} - x) - \frac{q \cdot (l_{BE} - x)^2}{2} \quad (6.86)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(-R_E \cdot l_{BE} - \frac{q \cdot l_{BE}^2}{2}\right)} \cdot \left(-R_E \cdot (l_{BE} - x) - \frac{q \cdot (l_{BE} - x)^2}{2}\right)} \quad (6.87)$$

Tratto EF

$$M(x) = R_E \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (6.88)$$

$$H(x) = \sqrt{\frac{H_0^2}{\left(\frac{q \cdot l_{EF}^2}{8}\right)} \cdot \left(R_E \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}\right)} \quad (6.89)$$

Dove $R_A = 660 \text{ kN}$ $R_B = 834 \text{ kN}$ (6.90)

La trave presenta le seguenti caratteristiche:

Agli appoggi

Armatura superiore 6 ϕ 22 $\rightarrow A_s = 22,81 \text{ cm}^2$ (6.91)

Armatura inferiore 2 ϕ 22 $\rightarrow A'_s = 7,60 \text{ cm}^2$ (6.92)

In mezzaria del tratto EF

Armatura superiore 2 ϕ 22 $\rightarrow A'_s = 7,60 \text{ cm}^2$ (6.93)

Armatura inferiore 6 ϕ 22 $\rightarrow A_s = 22,81 \text{ cm}^2$ (6.94)

$d' = c_s + \phi_{staffe} + \frac{\phi_{ferri}}{2} = 4,9 \text{ cm}$ $d = h - d' = 85,1 \text{ cm}$ (6.95)

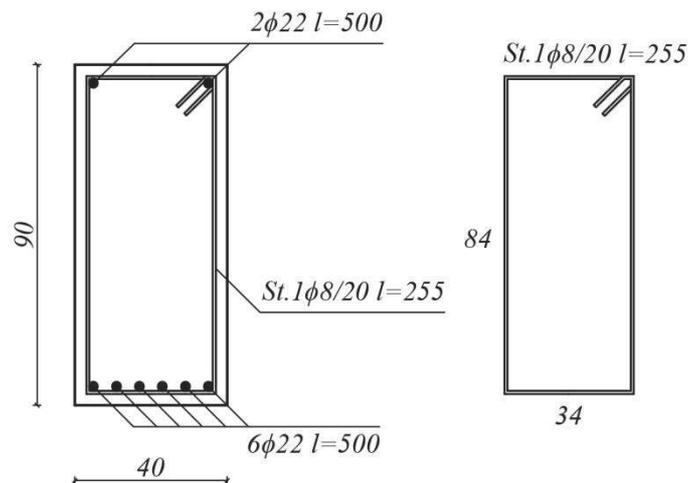


Fig. 6.6 – Sezione trasversale della trave Gerber in mezzaria

Verifica allo stato limite ultimo

$$M_A = -\frac{q \cdot l_{GA}^2}{6} = -667 \text{ kNm} \quad (6.96)$$

$$M_d = 667 \text{ kNm} \quad (6.97)$$

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,8 \cdot b \cdot f_{cd}} = 17,6 \text{ cm} \quad (6.98)$$

$$M_u = A_s \cdot f_{yd} (d - 0,4x) = 697 \text{ kNm} \quad (6.99)$$

$$M_d = 667 \text{ kNm} < 697 \text{ kNm} = M_u \quad (6.100)$$

Verifica allo stato limite di esercizio – combinazione di carico rara

$$M_A = -\frac{q \cdot l_{GA}^2}{6} = -473 \text{ kNm} \quad \text{dove } q = g_k + q_k = 52,4 \text{ kN/m} \quad (6.101)$$

$$M_e = 473 \text{ kNm} \quad (6.102)$$

$$x = \frac{n \cdot A_s}{b} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot d}{n \cdot A_s}} \right) = 30,5 \text{ cm} \quad (6.103)$$

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot M_e}{b \cdot x \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = 10,35 \text{ MPa} \quad (6.104)$$

$$\sigma_s = \frac{M_e}{A_s \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} = 276,73 \text{ MPa} \quad (6.105)$$

$$\sigma_c = 10,35 \text{ MPa} < 16,80 \text{ MPa} = 0,60 \cdot f_{ck} \quad (6.106)$$

$$\sigma_s = 276,73 \text{ MPa} < 360,00 \text{ MPa} = 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.107)$$

Verifica al taglio

$$V_{sd} = 450 \text{ kN} \quad (6.112)$$

$$V_{Rd1} = 0,058 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d = 312 \text{ kN} \quad (6.113)$$

$$V_{Rd2} = 0,31 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d = 1673 \text{ kN} \quad (6.114)$$

$$V_{Rd1} = 312 \text{ kN} < V_{sd} = 450 \text{ kN} < V_{Rd2} = 1673 \text{ kN} \quad (6.115)$$

$$V_{wd} = V_{sd} - V_{Rd1} = 138 \text{ kN} \quad (6.116)$$

$$\frac{V_{Rd1}}{\left(\frac{l_{BC}}{2} - x\right)} = \frac{V_{sd}}{\left(\frac{l_{BC}}{2}\right)} \rightarrow x = 1,90 \text{ m} \quad (6.117)$$

Utilizziamo staffe $\phi 8$ a due braccia con $A_{sw} = 1,01 \text{ cm}^2$. (6.118)

$$n = \frac{V_{wd} \cdot x}{A_{sw} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{yd}} = 8 \text{ staffe} \quad s = \frac{x}{n} = 20 \text{ cm} \quad (6.119)$$

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{yd} = 174 \text{ kN} \quad (6.120)$$

$$V_{Rd3} = V_{Rd1} + V_{wd} = 486 \text{ kN} \quad (6.121)$$

$$V_{sd} = 450 \text{ kN} < V_{Rd3} = 486 \text{ kN} \quad (6.122)$$

Disporremo allora 1 $\phi 8 / 20 \text{ cm}$

Verifica al taglio in corrispondenza della cerniera

$$V_d = 320 \text{ kN} \quad (6.123)$$

Armatura a taglio in corrispondenza della cerniera 4 $\phi 22 \rightarrow A_s = 3,80 \text{ cm}^2$

$$\tau = \frac{V_d}{A_s} = 210,53 \text{ MPa} \quad (6.124)$$

$$\tau = 210,53 \text{ MPa} < 240,00 \text{ MPa} = f_{v,Rd} \quad (6.125)$$

6.2.4. Pilastro appoggio B (h = 5 m)

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10,40 \text{ m} = 115,8 \text{ kN}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \cdot 10,40 \text{ m} = 11,6 \text{ kN}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 278,3 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 8,4 \text{ kN}$$

$$8,4 \text{ kN} \cdot \frac{11,13}{3,20} \cdot 2 = 58,8 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave Gerber

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 6,7 \text{ m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 67,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio pilastro

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 1,20 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 60,0 \text{ kN}$$

$$g_k = 477 \text{ kN} \quad q_k = 116 \text{ kN} \quad (6.126)$$

$$g_d = \gamma_g \cdot g_k = 620 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.127)$$

$$q_d = \gamma_q \cdot q_k = 174 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_q = 1,5 \quad (6.128)$$

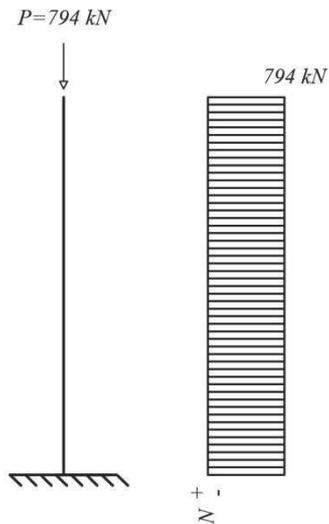


Fig. 6.7 – Schema statico e diagramma del pilastro appoggio B (h = 5 m)

Il pilastro presenta le seguenti caratteristiche:

$$\text{Calcestruzzo} \quad \rightarrow \quad A_c = 4800 \text{ cm}^2 \quad (6.129)$$

$$\text{Armatura } 22 \phi 22 \quad \rightarrow \quad A_s = 83,62 \text{ cm}^2 \quad (6.130)$$

$$d' = c_s + \phi_{\text{staffe}} + \frac{\phi_{\text{ferri}}}{2} = 4,9 \text{ cm} \quad d = \frac{h}{2} - d' = 15,1 \text{ cm} \quad (6.131)$$

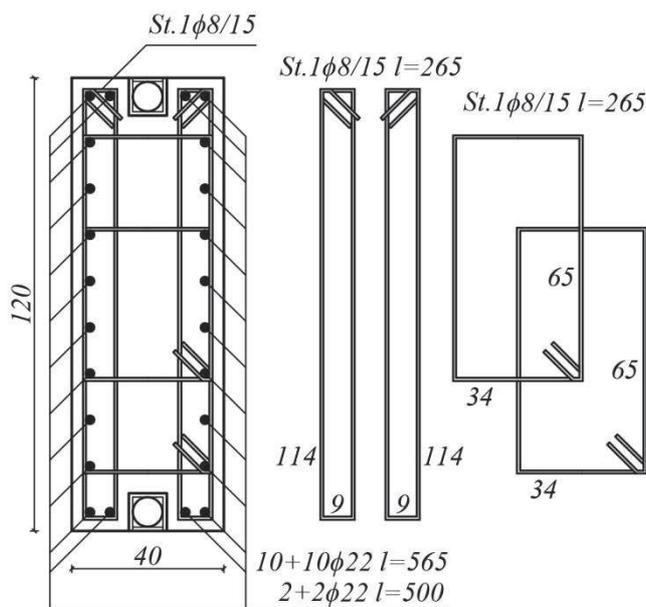


Fig. 6.8 – Sezione trasversale del pilastro appoggio B (h = 5 m)

Verifica allo stato limite ultimo

$$N_d = 794 \text{ kN} \quad (6.132)$$

$$N_{Rd} = 0,8 \cdot A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd} = 9366 \text{ kN} \quad (6.133)$$

$$N_d = 794 \text{ kN} < 9366 \text{ kN} = N_{Rd} \quad (6.134)$$

Verifica allo stato limite di esercizio – combinazione di carico rara

$$N_e = 593 \text{ kN} \quad (6.135)$$

$$\sigma_c = \frac{N_e}{A_0} = \frac{N_e}{A_c + n \cdot A_s} = 0,98 \text{ MPa} \quad (6.136)$$

$$\sigma_s = n \cdot \sigma_c = 14,70 \text{ MPa} \quad (6.137)$$

$$\sigma_c = 0,98 \text{ MPa} < 16,80 \text{ MPa} = 0,60 \cdot f_{ck} \quad (6.138)$$

$$\sigma_s = 14,70 \text{ MPa} < 360,00 \text{ MPa} = 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.139)$$

Verifica al carico di punta (considerando $10 + 10 \phi 22 \quad l = 565 \text{ cm}$)

$$l_0 = 2 \cdot h = 10 \text{ m} \quad (6.140)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_0}{A_0}} = \sqrt{\frac{J_c + n \cdot J_s}{A_c + n \cdot A_s}} = 12,3 \text{ cm} \quad (6.141)$$

$$\text{Dove} \quad J_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = 6,4 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 \quad J_s = A_s \cdot d^2 = 1,7 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 \quad (6.142)$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = 81,23 \quad (6.143)$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad 0,7 \leq c \leq 2,7 \quad \rightarrow \quad c = 1,7 \quad (6.144)$$

$$\lambda_{\text{lim}} = 15,4 \cdot \frac{c}{\sqrt{\nu}} = 81,81 \quad (6.145)$$

$$\lambda = 81,23 < 81,81 = \lambda_{\text{lim}} \quad (6.146)$$

6.2.5. Pilastro appoggio B (h = 4 m)

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10,40 \text{ m} = 115,8 \text{ kN}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \cdot 10,40 \text{ m} = 11,6 \text{ kN}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 278,3 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 8,4 \text{ kN}$$

$$8,4 \text{ kN} \cdot \frac{11,13}{3,20} \cdot 2 = 58,8 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave Gerber

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 6,7 \text{ m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 67,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio pilastro

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,80 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 32,0 \text{ kN}$$

$$g_k = 448 \text{ kN} \quad q_k = 116 \text{ kN} \quad (6.147)$$

$$g_d = \gamma_g \cdot g_k = 582 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_g = 1,3 \quad (6.148)$$

$$q_d = \gamma_q \cdot q_k = 174 \text{ kN/m} \quad \text{dove } \gamma_q = 1,5 \quad (6.149)$$

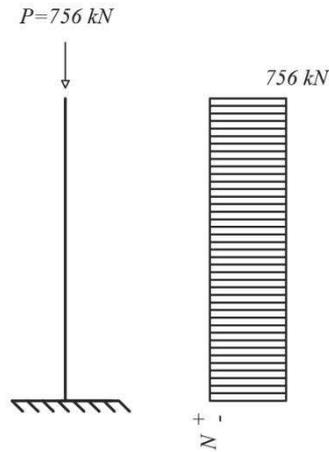


Fig. 6.9 – Schema statico e diagramma del pilastro appoggio B (h = 4 m)

Il pilastro presenta le seguenti caratteristiche:

Calcestruzzo $\rightarrow A_c = 3200 \text{ cm}^2$ (6.150)

Armatura 10 $\phi 22 \rightarrow A_s = 38,01 \text{ cm}^2$ (6.151)

$d' = c_s + \phi_{staffe} + \frac{\phi_{ferri}}{2} = 4,9 \text{ cm}$ $d = \frac{h}{2} - d' = 15,1 \text{ cm}$ (6.152)

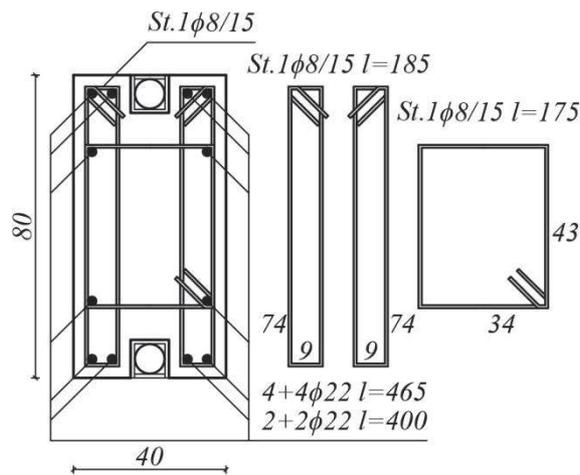


Fig. 6.10 – Sezione trasversale del pilastro appoggio B (h = 4 m)

Verifica allo stato limite ultimo

$$N_d = 756 \text{ kN} \quad (6.153)$$

$$N_{Rd} = 0,8 \cdot A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd} = 5550 \text{ kN} \quad (6.154)$$

$$N_d = 756 \text{ kN} < 5550 \text{ kN} = N_{Rd} \quad (6.155)$$

Verifica allo stato limite di esercizio – combinazione di carico rara

$$N_e = 564 \text{ kN} \quad (6.156)$$

$$\sigma_c = \frac{N_e}{A_0} = \frac{N_e}{A_c + n \cdot A_s} = 1,50 \text{ MPa} \quad (6.157)$$

$$\sigma_s = n \cdot \sigma_c = 22,50 \text{ MPa} \quad (6.158)$$

$$\sigma_c = 1,50 \text{ MPa} < 16,80 \text{ MPa} = 0,60 \cdot f_{ck} \quad (6.159)$$

$$\sigma_s = 22,50 \text{ MPa} < 360,00 \text{ MPa} = 0,80 \cdot f_{yk} \quad (6.160)$$

Verifica al carico di punta (considerando 4 + 4 ϕ 22 $l = 465$ cm)

$$l_0 = 2 \cdot h = 8 \text{ m} \quad (6.161)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_0}{A_0}} = \sqrt{\frac{J_c + n \cdot J_s}{A_c + n \cdot A_s}} = 12,1 \text{ cm} \quad (6.162)$$

$$\text{Dove } J_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 \quad J_s = A_s \cdot d^2 = 7,3 \cdot 10^3 \text{ cm}^4 \quad (6.163)$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = 66,28 \quad (6.164)$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad 0,7 \leq c \leq 2,7 \quad \rightarrow \quad c = 1,7 \quad (6.165)$$

$$\lambda_{\text{lim}} = 15,4 \cdot \frac{c}{\sqrt{\nu}} = 67,85 \quad (6.166)$$

$$\lambda = 66,28 < 67,85 = \lambda_{\text{lim}} \quad (6.167)$$

6.2.6. Plinto di fondazione appoggio B (h = 5 m)

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10,40 \text{ m} = 115,8 \text{ kN}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \cdot 10,40 \text{ m} = 11,6 \text{ kN}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 278,3 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 8,4 \text{ kN}$$

$$8,4 \text{ kN} \cdot \frac{11,13}{3,20} \cdot 2 = 58,8 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave Gerber

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 6,7 \text{ m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 67,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio pilastro

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 1,20 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 60,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio fondazione

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 3,20 \text{ m} \cdot 2,80 \text{ m} \cdot 1,00 \text{ m} = 224,0 \text{ kN}$$

$$g_k = 700 \text{ kN} \quad q_k = 116 \text{ kN} \quad (6.168)$$

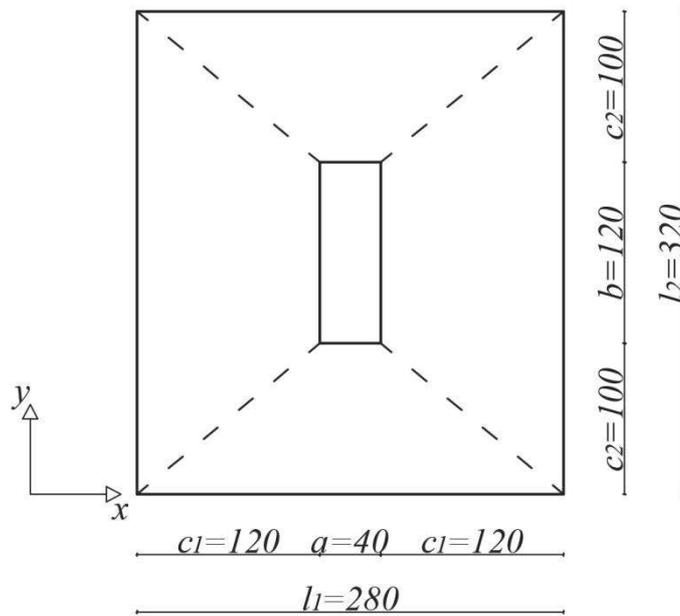


Fig. 6.11 – Pianta del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 5 m)

Verifica alle tensioni ammissibili

$$N_e = 816 \text{ kN} \quad (6.169)$$

$$\sigma = \frac{N_e}{A_f} = 0,090 \text{ MPa} \quad \text{dove } A_f = l_1 \cdot l_2 = 89600 \text{ cm}^2 \quad (6.170)$$

$$\bar{\sigma}_t = 0,100 \text{ MPa} \quad (6.171)$$

$$\sigma = 0,091 \text{ MPa} < 0,100 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_t \quad (6.172)$$

Armatura plinto

Mensole in direzione x:

$$A_x = \frac{b + l_2}{2} \cdot c_1 = 26400 \text{ cm}^2 \quad (6.173)$$

$$Q_x = \frac{N_e}{(l_1 \cdot l_2) - (a \cdot b)} \cdot A_x = 254 \text{ kN} \quad (6.174)$$

$$x_G = \frac{c_1}{3} \cdot \frac{2 \cdot l_2 + b}{l_2 + b} = 69,1 \text{ cm} \quad (6.175)$$

$$M_x = Q_x \cdot x_G = 176 \text{ KNm} \quad (6.176)$$

$$A_s = \frac{M_x}{0,9 \cdot d \cdot \overline{\sigma}_s} = 8,14 \text{ cm}^2 \quad (6.177)$$

Dove

$$\overline{\sigma}_s = 255 \text{ MPa} \quad d' = c_s + \phi_{\text{staffe}} + \frac{\phi_{\text{ferri}}}{2} = 5,8 \text{ cm} \quad d = h - d' = 94,2 \text{ cm} \quad (6.178)$$

Al fine di garantire i quantitativi minimi previsti dalla normativa, ossia un interasse tra le barre minore o uguale a 30 cm e l'utilizzo di barre ϕ 12 quale diametro minimo, disporremo 12 ϕ 12 con $A_s = 13,56 \text{ cm}^2$.

Mensole in direzione y :

$$A_y = \frac{a + l_1}{2} \cdot c_2 = 16000 \text{ cm}^2 \quad (6.179)$$

$$Q_y = \frac{N_e}{(l_1 \cdot l_2) - (a \cdot b)} \cdot A_y = 154 \text{ kN} \quad (6.180)$$

$$y_G = \frac{c_2}{3} \cdot \frac{2 \cdot l_1 + a}{l_1 + a} = 62,5 \text{ cm} \quad (6.181)$$

$$M_y = Q_y \cdot y_G = 96 \text{ KNm} \quad (6.182)$$

$$A_s = \frac{M_y}{0,9 \cdot d \cdot \overline{\sigma}_s} = 4,38 \text{ cm}^2 \quad (6.183)$$

Dove

$$\overline{\sigma}_s = 255 \text{ MPa} \quad d' = c_s + \phi_{\text{staffe}} = 4,6 \text{ cm} \quad d = h - d' = 95,4 \text{ cm} \quad (6.184)$$

Al fine di garantire i quantitativi minimi previsti dalla normativa, ossia un interasse tra le barre minore o uguale a 30 cm e l'utilizzo di barre ϕ 12 quale diametro minimo, disporremo 10 ϕ 12 con $A_s = 11,31 \text{ cm}^2$.

Verifica a punzonamento

$$\tau = \frac{N_e}{2 \cdot (a+b) \cdot h} = 0,26 \text{ MPa} \quad (6.185)$$

$$\overline{\tau}_{c0} = 0,4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} = 0,67 \text{ MPa} \quad (6.186)$$

$$\overline{\tau}_{c1} = 1,4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} = 1,97 \text{ MPa} \quad (6.187)$$

$$\tau = 0,26 \text{ MPa} < 0,67 \text{ MPa} = \overline{\tau}_{c0} \quad (6.188)$$

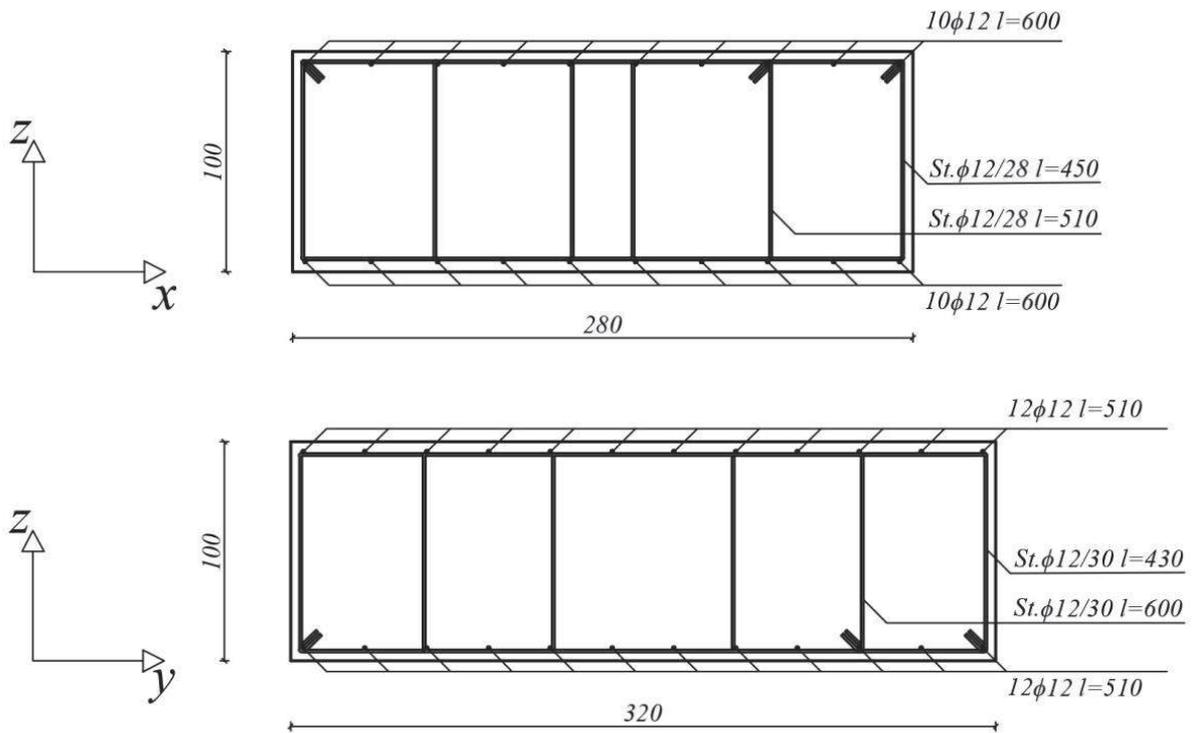


Fig. 6.12 – Sezioni del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 5 m)

6.2.7. Plinto di fondazione appoggio B (h = 4 m)

Analisi dei carichi

- Carico neve – zona II

$$1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10,40 \text{ m} = 115,8 \text{ kN}$$

- Guaina impermeabilizzante - montanti – lamiera grecata – pannelli fotovoltaici

$$0,1 \text{ kN/m}^2 \cdot 11,13 \cdot 10,40 \text{ m} = 11,6 \text{ kN}$$

- Peso proprio soletta in c.a.

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 \text{ m} \cdot 11,13 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 278,3 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave a sbalzo

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 8,4 \text{ kN}$$

$$8,4 \text{ kN} \cdot \frac{11,13}{3,20} \cdot 2 = 58,8 \text{ kN}$$

- Peso proprio trave Gerber

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 6,7 \text{ m}^2 \cdot 0,40 \text{ m} = 67,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio pilastro

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \text{ m} \cdot 0,80 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 32,0 \text{ kN}$$

- Peso proprio fondazione

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 2,80 \text{ m} \cdot 2,80 \text{ m} \cdot 1,00 \text{ m} = 196,0 \text{ kN}$$

$$g_k = 644 \text{ kN} \quad q_k = 116 \text{ kN} \quad (6.189)$$

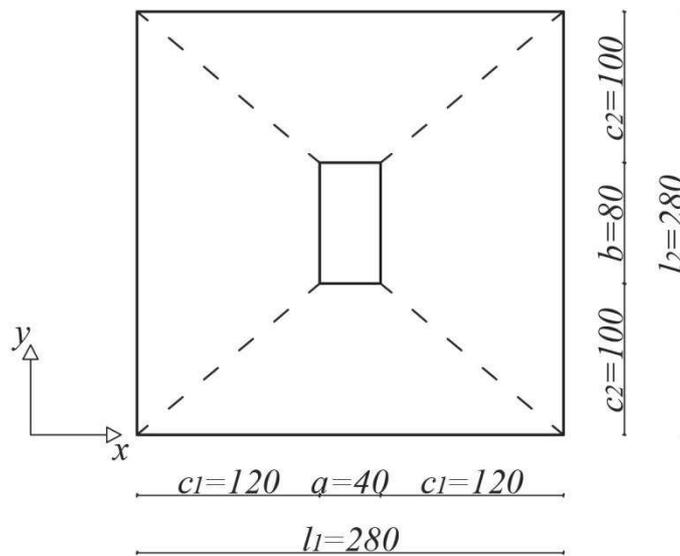


Fig. 6.13 – Pianta del plinto di fondazione del pilastro appoggio B (h = 4 m)

Verifica alle tensioni ammissibili

$$N_e = 760 \text{ kN} \quad (6.190)$$

$$\sigma = \frac{N_e}{A_f} = 0,095 \text{ MPa} \quad \text{dove } A_f = l_1 \cdot l_2 = 78400 \text{ cm}^2 \quad (6.191)$$

$$\bar{\sigma}_t = 0,100 \text{ MPa} \quad (6.192)$$

$$\sigma = 0,097 \text{ MPa} < 0,100 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_t \quad (6.193)$$

Armatura plinto

Mensole in direzione x:

$$A_x = \frac{b + l_2}{2} \cdot c_1 = 21600 \text{ cm}^2 \quad (6.194)$$

$$Q_x = \frac{N_e}{(l_1 \cdot l_2) - (a \cdot b)} \cdot A_x = 218 \text{ kN} \quad (6.195)$$

$$x_G = \frac{c_1}{3} \cdot \frac{2 \cdot l_2 + b}{l_2 + b} = 71,1 \text{ cm} \quad (6.196)$$

$$M_x = Q_x \cdot x_G = 155 \text{ KNm} \quad (6.197)$$

$$A_s = \frac{M_x}{0,9 \cdot d \cdot \overline{\sigma}_s} = 7,17 \text{ cm}^2 \quad (6.198)$$

Dove

$$\overline{\sigma}_s = 255 \text{ MPa} \quad d' = c_s + \phi_{staffe} + \frac{\phi_{ferri}}{2} = 5,8 \text{ cm} \quad d = h - d' = 94,2 \text{ cm} \quad (6.199)$$

Al fine di garantire i quantitativi minimi previsti dalla normativa, ossia un interasse tra le barre minore o uguale a 30 cm e l'utilizzo di barre ϕ 12 quale diametro minimo, disporremo 10 ϕ 12 con $A_s = 11,31 \text{ cm}^2$.

Mensole in direzione y:

$$A_y = \frac{a + l_1}{2} \cdot c_2 = 18000 \text{ cm}^2 \quad (6.200)$$

$$Q_y = \frac{N_e}{(l_1 \cdot l_2) - (a \cdot b)} \cdot A_y = 182 \text{ kN} \quad (6.201)$$

$$y_G = \frac{c_2}{3} \cdot \frac{2 \cdot l_1 + a}{l_1 + a} = 62,5 \text{ cm} \quad (6.202)$$

$$M_y = Q_y \cdot y_G = 114 \text{ KNm} \quad (6.203)$$

$$A_s = \frac{M_y}{0,9 \cdot d \cdot \overline{\sigma}_s} = 5,21 \text{ cm}^2 \quad (6.204)$$

Dove

$$\overline{\sigma}_s = 255 \text{ MPa} \quad d' = c_s + \phi_{staffe} = 4,6 \text{ cm} \quad d = h - d' = 95,4 \text{ cm} \quad (6.205)$$

Al fine di garantire i quantitativi minimi previsti dalla normativa, ossia un interasse tra le barre minore o uguale a 30 cm e l'utilizzo di barre ϕ 12 quale diametro minimo, disporremo 10 ϕ 12 con $A_s = 11,31 \text{ cm}^2$.

Verifica a punzonamento

$$\tau = \frac{N_e}{2 \cdot (a+b) \cdot h} = 0,32 \text{ Mpa} \quad (6.206)$$

$$\overline{\tau}_{c0} = 0,4 + \frac{R_{ck} - 15}{75} = 0,67 \text{ MPa} \quad (6.207)$$

$$\overline{\tau}_{c1} = 1,4 + \frac{R_{ck} - 15}{35} = 1,97 \text{ MPa} \quad (6.208)$$

$$\tau = 0,32 \text{ Mpa} < 0,67 \text{ MPa} = \overline{\tau}_{c0} \quad (6.209)$$

Per la realizzazione dei sottoplinti consideriamo una altezza $h = 40 \text{ cm}$ ed una sporgenza rispetto ai plinti di fondazione $s = 30 \text{ cm}$.

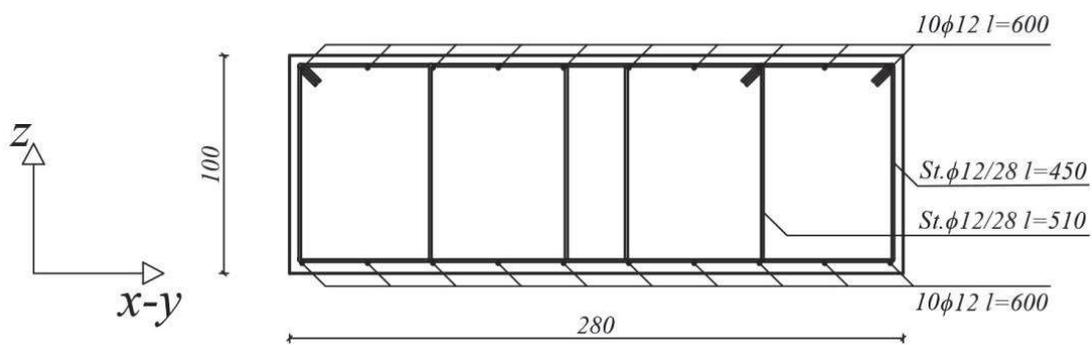


Fig. 6.14 – Sezione del plinto di fondazione del pilastro appoggio B ($h = 4 \text{ m}$)

6.2.8. Impianto fotovoltaico

È prevista l'installazione di un impianto fotovoltaico integrato con il sistema di copertura. Si riportano, al fine di evidenziare l'incidenza della realizzazione del suddetto impianto, i dati riguardanti la quantità di energia prodotta. Per tale calcolo è stato utilizzato il software messo a disposizione dall'Unione Europea e del quale si evidenziano i risultati ottenuti. Sono presenti due differenti tabelle, ciò è dato dal fatto che tali risultati sono stati suddivisi al fine di poter correttamente calcolare l'orientamento di entrambe le ali e quindi relativa esposizione solare.



Sistema informazioni geografiche per il fotovoltaico

European Commission
Joint Research Centre
Ispra, Italy

Rendimento di FV in rete

PVGIS stime di generazione elettricità solare

Luogo: 43°32'52" Nord. 10°18'43" Est. Quota: 10 m.s.l.m..

Database di radiazione solare usato: PVGIS-CMSAF

Potenza nominale del sistema FV: 85.0 kW (silicio cristallino)

Stime di perdite causata da temperatura e irradianza bassa: 13.6% (usando temperatura esterna locale)

Stima di perdita causata da effetti di riflessione: 3.4%

Altre perdite (cavi, inverter, ecc.): 14.0%

Perdite totali del sistema FV: 28.2%

Sistema fisso: inclinazione=10 gradi, orientamento=-45 gradi				
Mese	Ed	Em	Hd	Hm
Gen	111.00	3440	1.70	52.7
Feb	175.00	4890	2.68	75.2
Mar	262.00	8140	4.12	128
Apr	326.00	9790	5.29	159
Mag	386.00	12000	6.42	199
Giu	418.00	12500	7.09	213
Lug	430.00	13300	7.43	230
Ago	379.00	11800	6.48	201
Set	300.00	9000	4.96	149
Ott	203.00	6310	3.27	101
Nov	127.00	3810	1.99	59.7
Dic	100.00	3110	1.56	48.2
Anno	269.00	8170	4.43	135
Totale per l'anno		98100		1620

Ed: Produzione elettrica media giornaliera dal sistema indicata (kWh)

Em: Produzione elettrica media mensile dal sistema indicata (kWh)

Hd: Media dell'irraggiamento giornaliero al metro quadro ricevuto dai pannelli del sistema (kWh/m²)

Hm: Media dell'irraggiamento al metro quadro ricevuto dai pannelli del sistema (kWh/m²)

Tab. 6.1 – Rendimento dell'impianto fotovoltaico in copertura, esposizione sud - est

Rendimento di FV in rete

PVGIS stime di generazione elettricità solare

Luogo: 43°32'52" Nord, 10°18'43" Est, Quota: 10 m.s.l.m.

Database di radiazione solare usato: PVGIS-CMSAF

Potenza nominale del sistema FV: 85.0 kW (silicio cristallino)

Stime di perdite causata da temperatura e irradianza bassa: 12.8% (usando temperatura esterna locale)

Stima di perdita causata da effetti di riflessione: 4.3%

Altre perdite (cavi, inverter, ecc.): 14.0%

Perdite totali del sistema FV: 28.3%

Sistema fisso: inclinazione=10 gradi, orientamento=135 gradi				
Mese	Ed	Em	Hd	Hm
Gen	72.60	2250	1.21	37.5
Feb	129.00	3630	2.05	57.4
Mar	221.00	6860	3.47	107
Apr	299.00	8970	4.78	143
Mag	371.00	11500	6.10	189
Giu	410.00	12300	6.87	206
Lug	418.00	13000	7.12	221
Ago	351.00	10900	5.91	183
Set	258.00	7740	4.24	127
Ott	160.00	4970	2.61	80.9
Nov	87.60	2630	1.46	43.7
Dic	61.00	1890	1.06	32.8
Anno	237.00	7220	3.92	119
Totale per l'anno		86600		1430

Ed: Produzione elettrica media giornaliera dal sistema indicata (kWh)

Em: Produzione elettrica media mensile dal sistema indicata (kWh)

Hd: Media dell'irraggiamento giornaliero al metro quadro ricevuto dai pannelli del sistema (kWh/m²)

Hm: Media dell'irraggiamento al metro quadro ricevuto dai pannelli del sistema (kWh/m²)

Tab. 6.2 – Rendimento dell'impianto fotovoltaico in copertura, esposizione nord - ovest

Dalla somma dei risultati ottenuti abbiamo un totale per anno pari a:

$$Em = 98100 + 86600 = 184700 \text{ kWh} \quad (6.210)$$

Se consideriamo il consumo medio per una famiglia costituita da quattro persone di circa 3000kWh, allora la produzione elettrica sarà tale da poter garantire la copertura di consumo elettrico di circa:

$$\frac{184700}{3000} = 61 \text{ famiglie} \quad (6.211)$$

6.3. Conclusioni

I processi di ottimizzazione strutturale utilizzati ci hanno permesso di definire una composizione architettonica in cui l'elemento trave manifesta apertamente le condizioni di sforzo in atto all'interno di esso. I criteri di ottimizzazione utilizzati per le travi a sbalzo e per la trave Gerber conferiscono leggerezza e coerenza alla struttura tutta e testimoniano l'importanza, anche sotto il profilo formale, dei processi di ottimizzazione trattati. Possiamo notare come l'utilizzo di una trave Gerber ci abbia permesso, dalla lettura del diagramma del momento flettente modificato, di avere lo stesso valore del momento flettente sia in campata che agli appoggi. In questo modo andremo a compensare le difficoltà esecutive nella realizzazione delle staffe con il mantenimento degli stessi ferri di armatura per tutta la lunghezza della trave. Questo significa che la realizzazione di un'opera tramite l'utilizzo dei risultati ottenuti non subirà delle ripercussioni importanti sul processo di realizzazione dell'opera stessa, in quanto vantaggi e svantaggi tenderanno a compensarsi. Risulta opportuno sottolineare infatti che, per la realizzazione dell'intera struttura sono stati utilizzati unicamente dei ferri di armatura ϕ 22 per tutte le travi e per tutti i pilastri, ϕ 8 per staffe e rete elettrosaldata, ϕ 12 per i plinti di fondazione. Un corretto processo di ottimizzazione consente quindi anche un'ottima omogeneizzazione della armatura richiesta.

7. Conclusioni

Gli studi condotti in questa tesi sono stati particolarmente efficaci, in primo luogo le ricerche riguardanti l'approccio al problema del rapporto tra struttura e forma architettonica consente una più ampia comprensione dei principi che regolano un binomio che ha le potenzialità di caratterizzare il mondo dell'architettura. Una corretta comprensione di tale rapporto non può infatti prescindere dai contributi forniti dai grandi progettisti del passato e del presente. Oltre a strutture ed architetture da loro realizzate, ugualmente importante è il contributo teorico che ci hanno lasciato. Esso è fondamentale essendo la metodologia e l'approccio al problema la vera chiave per poter usufruire al meglio degli strumenti operativi dei quali disponiamo. In secondo luogo gli approfondimenti effettuati in tale ambito hanno le potenzialità di permettere una più accurata comprensione dei fenomeni che regolano le leggi riguardanti la scienza delle costruzioni e la sua applicazione. In particolare la ricerca della forma ottimale per le travi a sezione variabile tramite l'utilizzo di calcoli manuali ha consentito l'analisi dei diversi metodi ad oggi utilizzati, la valutazione dei relativi errori dovuti alle ipotesi e restrizioni che tali criteri assumono e la loro quantificazione in termini di rilevanza. Tale procedimento ha permesso di valutare le diverse alternative e, attraverso l'integrazione tra differenti modelli, ha consentito di sviluppare un metodo di prosecuzione sufficientemente preciso, al fine di poter realizzare un progetto in cui il suddetto

elemento costruttivo riveste un ruolo di primo piano e predominante nel rispetto del sistema generale. Il lavoro effettuato si ritiene che possa essere un contributo alla ricerca riguardante un tema, quale il rapporto tra forma e struttura, che ancora oggi non è stato a pieno rivelato e, dato il progresso tecnoscientifico in atto, rischia di passare colpevolmente in secondo piano. Si ritiene quindi che tale percorso possa avere ancora un notevole sviluppo e che potrebbe portare a risultati importanti nel momento in cui riuscissimo a combinare il corretto utilizzo dei materiali ad un altrettanto corretto utilizzo dei modelli di calcolo a nostra disposizione.

Bibliografia

Addis B., Investing a history for structural engineering design, Proceedings of the First International Congress on Construction History, Madrid, 2003, pp. 113 – 122

Alaimo G., Auricchio F., Conti M., Di Paola M., Zingales M., Multi-objective optimization of Nitinol stent design, Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura, Università degli Studi di Pavia, 2014

Balduzzi G., Non-constant Cross-section and Curved Beam: Preliminary Considerations for an Effective Model Development, Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura, Università degli Studi di Pavia, 2014

Belluzzi O., Scienza delle Costruzioni v. 1, Zanichelli, Bologna, 1966

Carpinteri A. Scienza delle Costruzioni v. 1, Pitagora, Bologna, 1992

Charleson A., Structure as Architecture: A Source Book for Architects and Structural Engineers, Elsevier/Architectural, Oxford, 2005

Consolini L. & Lenci S., Percorsi per un metodo progettuale tra forma e struttura, Aracne, Roma, 2007

Fantone C., L'architettura religiosa di Gaudì, Arte del Costruire, numero 50 – 51, 1996, pp. 106 – 115

Frampton K., Studies in Tectonic Culture: The Poetics of Construction in Nineteenth and Twentieth Century Architecture, Massachusetts Institute of Technology, 1995 (trad. it. di Mara De Benedetti, Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel Diciannovesimo e Ventesimo secolo, Skira, Milano, 2005)

Giedion S., Space, Time and Architecture, Harvard University Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1954 (trad. it. di Enrica Labò & Mario Labò, Spazio, Tempo ed Architettura, Hoepli, Milano, 2008)

Jodidio P., Santiago Calatrava, Taschen, Barcellona, 1998

Nervi P. L., Scienza o arte del costruire?, CittàStudi, Novara, 1945

Nicoletti M., Sergio Musmeci Organicità di forme e forze nello spazio, Testo e immagine, Torino, 1999

Nucifora S. & Urso A., L'architettura dei mercati coperti, ed.it, Vicenza, 2012

Paglietti A. & Carta G., La favola del taglio efficace nella teoria delle travi di altezza variabile, Dipartimento di Ingegneria strutturale, Università di Cagliari, 2007

Piaggio J. M., Eladio Dieste L'ingegno e l'architettura, Costruire in laterizio, numero 52 – 53, 1996

Savorra M., La forma e la struttura: Félix Candela, gli scritti, Electa, Milano, 2013

Seckler E., Structure, Construcion, Tectonics, Structure in Art and Science, 1965, pp. 89 - 95

Timoshenko S., Strength of Materials: Elementary theory and problems, R. E. Krieger, New York, 1976

Timoshenko S. & Young D., Theory of Structures, McGraw-Hill, New York, 1965