Università degli Studi di Pavia

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile, Strutturista

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Alternativa al Metodo degli Elementi Finiti nella Meccanica della Frattura: gli X-FEM

Relatore:
Chiar.mo Prof. Ing. Ferdinando Auricchio

Tesi di Laurea di:
Fabio Guarnaschelli

Anno Accademico 2010-2011

Introduzione

Questo lavoro é frutto di oltre un anno di studi e di sperimentazioni durante le quali si é cercato di capire e contestualizzare problemi inerenti alla meccanica della frattura studiati attraverso la metodologia degli Elementi Finiti Estesi (X-FEM) e, attraverso approfondimenti teorici valutare in modo critico i risultati che con il passare del tempo si facevano piú consistenti e di complessitá crescente.

Nel **Capitolo 1** vengono riportate le basi della meccanica della frattura che hanno svolto il compito di immancabile background necessario alla comprensione degli elementi fondamentali per la valutazione della risposta meccanica dei materiali fessurati.

Il **Capitolo 2** si pone l'obiettivo di introdurre la metodologia X-FEM nelle sue parti utili alla soluzione di problemi di meccanica della frattura in elasticitá lineare in condizioni statiche in assenza di coesione sulle labbra della fessura. Particolare attenzione é stata fatta agli algoritmi di calcolo implementati nel software utilizzato.

Nel **Capitolo 3** vengono riportati alcuni esempi presi in considerazione per capire l'efficacia del metodo. Sono stati privilegiati esempi giá presenti in letteratura studiati con metodi differenti da quello qui esposto. Nell'esempio 5 la soluzione presa come riferimento é stata ottenuta attraverso uno studio sperimentale effettuato della *Cornell University*

Vorrei qui ringraziare i miei genitori che hanno permesso, con il loro sostegno, il raggiungimento di questo importante obiettivo. Un ringraziamento particolare lo vorrei rivolgere al mio relatore Prof. Ferdinando Auricchio che con le sue conoscenze i suoi insostituibili consigli ha agevolato gli studi presentati.

Indice

Introduzione **I**

1 Meccanica della frattura **1**

1.1 Introduzione 1
1.2 Elementi base di elasticitá 3
1.2.1 Relazioni sforzi-deformazioni 3
1.2.2 Airy stress function 5
1.2.3 Funzioni tensionali complesse 6
1.3 Basi di LEFM 8
1.3.1 Meccanica della frattura 8
1.3.2 Foro Circolare 9
1.3.3 Foro ellittico 11
1.3.4 Analisi di Westergaard di una fessura a sottile 12
1.4 Stress Intensity Factor, K 14
1.4.1 Definizione di Stress Intensity Factor 14
1.4.2 Esempi di *stress intensity factors* nella LEFM 18
1.4.3 Teorie di Griffith sulla resistenza e sull'energia 20
1.4.4 Materiali Fragili 22
1.4.5 Materiali Quasi-Fragili 24
1.4.6 Stabilitá della fessura 24
1.4.7 Controllo in Spostamento e Controllo di Carico 25
1.4.8 Modo misto della propagazione della Fessura 26
1.4.8.1 Massima tensione di trazione circonferenziale 27
1.4.8.2 Criterio di minima densitá di energia deformativa 28
1.4.8.3 Massima aliquota di energia rilasciata 28
1.4.8.4 Criterio di K_{II} nullo 30
1.4.8.5 Ulteriori modelli empirici 30
1.5 Procedure risolutive per K e G 31
1.5.1 Metodo agli Spostamenti di estrapolazione/correlazione 31
1.5.2 Aliquota di energia rilasciata nel Modo I 32
1.5.3 Modo I: rigidezza derivata e fessura virtuale 33
1.5.4 Due estensioni di fessure virtuali per i casi di modo misto 34

1.5.5 Singola estensione di fessura virtuale basata sulla decomposizione degli spostamenti 35
1.5.6 Punto ad un quarto degli elementi singolari 37
1.6 Esempio 1: Singolo foro circolare in una piastra di dimensioni infinite e finite soggetta a tensione mono-assiale 41
1.6.1 Soluzione analitica 41
1.6.2 Soluzione numerica 44
1.6.2.1 Geometria 44
1.6.2.2 Proprietá dei materiali 44
1.6.2.3 Carichi e vincoli 44
1.6.2.4 Caratteristiche della mesh 44
1.6.2.5 Soluzione del problema 46
1.6.2.6 Risultati ottenuti e confronto 46
1.7 Esempio 2: Singolo foro ellittico in una piastra di dimensioni infinite e finite soggetta a tensione mono-assiale 48
1.7.1 Soluzione analitica 48
1.7.2 Soluzione numerica 50
1.7.2.1 Geometria 50
1.7.2.2 Proprietá dei materiali 50
1.7.2.3 Carichi e vincoli 50
1.7.2.4 Caratteristiche della mesh 53
1.7.2.5 Soluzione del problema 53
1.7.2.6 Risultati ottenuti e confronto 54
1.8 Meccanica della Frattura Elastoplatica (EPFM) 54
1.8.1 Zona plastica 56
1.8.1.1 Criterio del primo ordine con tensione mono-assiale 56
1.8.1.2 Criterio del secondo ordine con tensione mono-assiale 56
1.8.1.3 Criterio di Dugdale 57
1.8.1.4 Criterio di snervamento multi-assiale del primo ordine 58
1.8.2 Crack tip opening displacements (CTOD) 58
1.8.2.1 CTOP del primo ordine 59
1.8.2.2 CTOP del secondo ordine 60
1.8.3 Integrale J 60
1.8.4 Campo plastico nel fondo della fessura 63
1.8.5 Generalizzazione di J 64
1.8.5.1 Effetto della trazione superficiale della fessura 64
1.8.5.2 Effetto delle forze di volume 65
1.9 Metodi Numerici sul *J integral* 65
1.9.1 Soluzione nodale 65
1.9.2 Soluzione generale agli elementi finiti 67

2 Alternativa al metodo degli elementi finiti 69
2.1 Introduzione 69
2.2 Le alternative al MEF: la scelta degli X-FEM 70
2.2.1 I metodi Meshless 70
2.2.2 I metodi Mesh-based 71
2.3 Sull'utilizzo dei level sets 72
2.3.1 Level sets per la fessurazione 72
2.3.2 Level sets vettoriali 75
2.4 La metodologia X-FEM 75
2.4.1 Problema generale 75
2.4.2 Arricchimento dell'approssimazione degli spostamenti . 76
2.4.2.1 Arricchimento con la funzione di Heaviside (2° termine) 77
2.4.2.2 Arricchimento con le funzioni singolari (3° termine) 78
2.4.2.3 Base locale sul fondo della fessura 80
2.4.2.4 Arricchimento geometrico e velocitá di convergenza 80
2.4.3 Integrazione numerica 83
2.4.3.1 Discretizzazione 84
2.4.3.2 Integrazione per sotto-divisione 85
2.4.3.3 Integrazione singolare 85
2.4.4 Il campo θ (in Code-Aster) 86
2.4.4.1 Requisiti 86
2.4.4.2 Scelta del campo θ in 3 dimensioni 87
2.4.4.3 Scelta del campo θ in 2 dimensioni 88
2.4.5 Calcolo energetico degli *stress intensity factors* 88
2.4.5.1 Metodo $G - Theta$ per il calcolo di G 90
2.4.5.2 Metodo $G - Theta$ per il calcolo di K_I, K_{II} e K_{III} con i *level sets* 91
2.4.5.3 Metodo $G - Theta$ con gli X-FEM 92
2.4.6 Propagazione della fessura attraverso gli X-FEM . . . 92
2.4.6.1 Calcolo del campo delle velocitá di propagazione 92
2.4.6.2 Messa a giorno dei *level sets* 94
2.4.6.3 reinizializzazione e riortogonalizzazione dei *level sets* 95

3 Esempi di elementi fessurati studianti con la metodologia X-FEM 98
Introduzione a Code-Aster 98
3.1 Esempio 3: Piastra con una fessura emergente centrale 99
3.1.1 Problema di riferimento 99
3.1.2 Modellazione: trazione uniforme 99

3.1.3 Soluzione analitica 101
3.1.4 Risultati ottenuti e Conclusioni 102
3.2 Esempio 4: Elemento 3D con fessura sollecitata in modo I puro 102
3.2.1 Geometria 102
3.2.2 Propietá del materiale 102
3.2.3 Carico imposto 105
3.2.4 Soluzione analitica del problema 105
3.2.5 Modellazione della struttura 105
3.2.6 Grandezze misurate e risultati ottenuti 106
3.2.7 Propagazione della fessura 107
3.2.8 Conclusioni 107
3.3 Esempio 5: Propagazione di una fessura attraverso gli X-FEM in una piastra in flessione con tre fori 109
3.3.1 Problema di riferimento 109
3.3.1.1 Geometria 109
3.3.1.2 Proprietá del materiale 109
3.3.1.3 Carichi e condizioni ai limiti 110
3.3.1.4 Soluzione di riferimento 110
3.3.2 Modellazione e risultati ottenuti 112
3.3.3 Sintesi dei risultati e Conclusioni 112

A Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems 118
A.1 Introduction 118
A.2 Solution strategy 119
A.3 Methodology for quasi-automatic crack propagation 120
A.4 Examples of application 122
A.4.1 Results for Example 1 122
A.4.2 Results for Example 2 123
A.4.3 Effects of method for computing stress intensities and trajectory 123
A.5 Discussion of results 124
A.6 Conclusions 127

Capitolo 1

Meccanica della frattura

1.1 Introduzione

Osservazioni sperimentali hanno mostrato che materiali fragili tendono a fratturarsi quando si supera il livello di tensione critica. Quindi é comunemente accettato che la resistenza di un materiale a resistere alla frattura é una sua proprietá intrinseca. Questo fatto é visibile in una serie di criteri presenti in parecchi codici di calcolo per assicurare che le massima tensione di una struttura é non eccedente la sua resistenza alla frattura (Bazant e Planes 1997).

Comunque osservazioni sperimentali hanno provato che la resistenza all frattura dipende da un numero di altri fattori, come ad esempio da come é strutturata la prova, dalle condizioni ambientali e dalle dimensioni del provino. Per esempio, Evans e Marathe (1968) dimostrarono che la resistenza a trazione di un provino di carbone, oltre ad essere una proprietá del materiale, era inversamente proporzionale allo spessore t del provino; $t^{-\alpha}$, dove $\alpha = 0.23$.

Anche il caso della previsione della resistenza dei materiali varia tra aspetto teorico e pratico: la resistenza teorica di un materiale ideale fragile é stimata essere $E/10$, sebbene le prove sperimentali mostrino un orine variabile tra $E/1000$ e $E/100$. La resistenza alla frattura é relazionata alla energia superficiale specifica piuttosto che alla resistenza a trazione del materiale.

Da un punto di vista storico, Griffith (1921, 1924) fu il primo ha realizzare che la presenza di crepe e fessure interne aveva un ruolo significativo nell'innesco e nella propagazione della fessura e chiarí le ragioni per molte leggi di resistenza a trazione di materiali fragili. Egli riusí nello stabilire una relazione tra la resistenza alla frattura e le dimensioni della fessura; segnando l'inizio della moderna meccanica della frattura. Egli derivó un criterio per la frattura in termini di cambiamento totale di energia durante in cracking.

La teoria de Griffith era basata su un lavoro precedente di Kirsch e Ko-

losoff (Meguid 1989) e Inglis (1913) che risolsero il problema di una piastra di dimensioni infinite soggetta a trazione con un foro circolare ed ellittico al centro. Kirish mostró che la massima tensioni intorno al foro é pari a 3 volte la tensione applicata, cioé uno stress concentration factor pari a 3. Una soluzione per un problema di frattura a taglio puó poi essere ottenuta dalla degenerazione del foro ellittico in linee rette di frattura. Un approccio differente fu utilizzato da Westergaard (1939) per derivare soluzioni per il campo tensionale vicino al fondo della fessura.

Un'altra piú importante estensione fu includere effetti non lineari. Irwin (1957, 1958, 1960) e Irwin *at al.* (1958) estero la teoria di Griffith per includere lo snervamento sul fondo della fessura, e introdussero il concetto di *stress intensity factor* (SIF) e di *aliquota di energia rilasciata, G.* Il *concept of crack opening displacement* (COD) fu utilizzato da Wells (1963) come un parametro di resistenza alla fessurazione per analisi elasto-plastiche.

L'introduzione del concetto di *J integral* da parte di Rice (1968, 1988), Rice e Rosengren (1968) e Rice e Levu (1972) aprí la strada per una soluzione generale agli elementi finiti di un problema complesso di meccanica della frattura decenni dopo. Il *J integral* fu definito come un percorso indipendente di un integrale al contorno uguale all'aliquota del cambiamento dell'energia potenziale per un solido elastico non lineare durante un'estensione unitaria della fessura.

La metodologia degli elementi finiti (FEM) é stata largamente utilizzata in diversi problemi di meccanica della frattura. I FEM furono originariamente utilizzati come un semplice strumento analitico per ottenere gli spostamenti e il campo di tensioni nel continuo. Successivamente, elementi singoli sofisticati furono proposti da Barsoum (1974, 1975, 1976, 1977, 1981) a Henshell e Shaw (1975) ed assieme ad efficienti implementazioni da parte di Fawkes *et al.* (1979) e Owen e Fawkes (1983) servirono per simulare le condizioni di singolaritá sul fondo della fessura. Successivamente essi vennero adottati come il piú importante miglioramento per la giá esistente tecnica numerica *linear elastic fracture mechanics* (LEFM).

La metodologia FEM ha il vantaggio di includere vari modelli di platicitá e grandi deformazioni, mentre la classica meccanica della frattura non puó fare ció. Il maggiore intoppo, comunque, viene mostrato da Bazant in una serie di studi che mostrano che la classica meccanica del continuo a la resistenza dei materiali condurrebbero a risultati *mesh dipendent* a meno che i concetti della meccanica della frattura vengano inglobati nella soluzione nella soluzione (Bezant a Planes 1997).

Lo sviluppo dei metodi *meshless* come l' *element-free Galerkin method* (EFG) (Belytschko *et al.* 1994), *meshless local Petrov-Galerkin* (MLPG) (Alturi e Shen 2002), *smooth particle hydrodynamics* (SPH) (Belytschko *et al.* 1996) e gli eXtended Finite Element Method (XFEM) (Dolbow *et al.* 2066) hanno fornito nuovi e vantaggiosi strumenti analitici, ed un nuovo slancio per rivisitare i problemi di meccanica della frattura.

Nel seguito di questo capitolo verranno brevemente i concetti di base della meccanica della frattura lineare e non. Verranno quindi introdotti i concetti teorici di base che sono stati necessari per affrontare lo studio degli XFEM per l'analisi della meccanica della frattura.

1.2 Elementi base di elasticitá

1.2.1 Relazioni sforzi-deformazioni

Nel diciassettesimo secolo, Hooke propose la relazione fondamentale sforzi-deformazioni in una dimensione per un materiale elastico lineare:

$$\sigma = E\epsilon \tag{1.1}$$

Dove σ ed ϵ sono le tensioni e le deformazioni, rispettivamente, ed E é il modulo di elasticitá (o di Young). La legge di Hooke generalizzata puó essere scritta come:

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \tag{1.2}$$

oppure in forma indiciale:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{1.3}$$

Le proprietá di simmetria di σ e ϵ riducono il numero di costanti del tensore elastico del quarto ordine, D_{ijkl}, da 81 componenti a soli 36 termini indipendenti.

La legge di Hooke per un materiale puó essere scritta come:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\epsilon_{kk}\right) \tag{1.4}$$

e mettendo in relazione sforzi e deformazioni:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{1.5}$$

dove δ_{ij} é la funzione delta di Kronecker.

In forma estesa per un materiale isotropo in 3D puó essere scritta come:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

oppure

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

dove λ e ω sono rispettivamente il modulo di Lame e il modulo a taglio, definiti come:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.8}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1.9}$$

Le equazioni (1.6) e (1.7) sono ulteriormente semplificate per lo stato piano di sforzo, di deformazione nel caso bidimensionale assial-simmetrico. Nel caso di tensione piana, la dimensione nella direzione dello spessore é trascurabile rispetto alle altre due, e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.10}$$

dove $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ é la componente della deformazione a taglio. La componente di deformazione lungo lo spessore, ϵ_{zz}, puó anche essere derivata dall'effetto di Poisson:

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \tag{1.11}$$

Lo stato piano di deformazione si puó assoggettare ad un corpo lungo sotto l'ipotesi di non variazione della geometria e dei carichi nel senso longitudinale. Come risultato si ha,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

Altre definizioni utili nel seguito, sono riportato qui sotto. Come primo, l'effettivo modulo di Young é definito come:

$$E' = \begin{cases} E & \text{tensione piana} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{deformazione piana} \end{cases} \tag{1.13}$$

un'altro parametro frequentemente utilizzato é:

$$k = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{tensione piana} \\ 3-4\nu & \text{deformazione piana} \end{cases} \tag{1.14}$$

Per un solido di rivoluzione assial-simmetrico, una forma molto simile a quella del caso piano di deformazione é stata derivata in termini di coordinate polari:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

Quando un corpo elastico é soggetto ad un carico, il corpo é sottoposto a spostamenti i quali sono linearmente relazionati al carico applicato. Come risultato, una certa quantitá di lavoro é immagazzinata nel corpo nella forma di energia potenziale deformativa. La densitá di energia deformativa puó essere definita come:

$$U_s = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sigma^T \epsilon \tag{1.16}$$

L'energia deformativa verrá direttamente utilizzata nella definizione di un numero di concetti fondamentali della meccanica della frattura, come ad esempio il giá citato*J integral*.

1.2.2 Airy stress function

Airy sviluppó l'idea di una *stress function* che potesse soddisfare entrambe le condizioni di equilibrio e di congruenza (Sharifabadi 1990). Egli mostró che in assenza di forze di volume, la funzione Φ deve soddisfare l'equazione di Laplace:

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi) = 0 \tag{1.17}$$

dove

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.18}$$

e

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{1.19}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \tag{1.20}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{1.21}$$

l'equazione (1.17) puó allora essere scritta come:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) = 0 \tag{1.22}$$

oppure in coordinate polari:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0 \tag{1.23}$$

La funzione di Airy deve anche soddisfare le naturali condizioni al bordo (tensioni), le quali ulteriormente limitano le sue applicazioni per problemi complessi. L'*Airy stress function* sará utilizzata piú avanti per il campo tensionale attorno ad un foro circolare.

1.2.3 Funzioni tensionali complesse

Kolov e Muskhoshvili (1953) svilupparono l'idea delle *complex stress functions*, le quali permettono di trovare soluzioni per problemi piú generali, incluso il taglio agli spigoli e l'apertura della fessura. Assumendo che $\psi(z)$ e $\chi(z)$ siano delle funzioni armoniche analitiche di x e y,

$$\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0 \tag{1.24}$$

$$z = x + iy = re^{i\theta} \tag{1.25}$$

Ogni funzioni tensionale Φ puó essere espressa come:

$$\Phi = Re[(x - iy)\psi(z) + \chi(z)] \tag{1.26}$$

oppure in termini della funzione coniugata $\overline{z} = x - iy$,

$$\Phi = Re[\overline{z}\psi(z) + \chi(z)] \tag{1.27}$$

Sostituendo l'equazione (1.27) nelle equazioni (1.19)-(1.21) risulta:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\,Re\,[\psi'(z)] \tag{1.28}$$

$$-\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy} = 2[\overline{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \tag{1.29}$$

le quali possono essere risolte per le tre componenti tensionali σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy}. Le espressioni f' e f'' denotano la prima e la seconda derivata della funzione f.

Gli spostamenti cartesiani u_x e u_y possono anche essere espressi in termini delle funzioni complesse:

$$u_x + iu_y = \frac{3-\nu}{E}\psi(z) - \frac{1+\nu}{E}[\overline{z}\psi'(\overline{z}) + \chi'(\overline{z})] \tag{1.30}$$

In un sistema generale di coordinate curvilinee ogni punto puó essere rappresentato da (α , β), dove α e β sono funzioni delle coordinate (x, y). Le componenti tensionali in termini di coordinate curvilinee possono poi essere espresse come:

$$\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} = 4\,Re\,[\psi'(z)] \tag{1.31}$$

$$-\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = [\overline{z}\psi''(z) + \chi''(z)]e^{2i\theta} \tag{1.32}$$

e per gli spostamenti

$$2\mu(u_\alpha - iu_\beta) = \left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\psi(z) - z\psi'(\overline{z}) - \chi'(\overline{z})\right]e^{-i\theta} \tag{1.33}$$

Il caso particolare delle coordinate polari si ottiene impostando:

$$\alpha \to r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.34}$$

$$\beta \to \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.35}$$

Da notare che la presente forma della funzione tensionale (Eq. 1.27) puó essere generalizzata come:

$$\Phi = \overline{z}\psi(z) + \chi(z) \tag{1.36}$$

1.3 Basi di LEFM

1.3.1 Meccanica della frattura

Una dettagliata investigazione su di un ampio numero di fallimenti strutturali catastrofici indica che la principale sorgente del fallimento puó essere attribuita a diversi tipi di discontinuitá o concentrazione di tensioni. Queste forme di discontinuitá possono presentarsi nei cambi repentini della geometria, aperture, fori, fessure, ecc.

Per esplicare le fondamentali differenze fra la meccanica della frattura e la teoria classica della resistenza dei materiali, si puó considerare un semplice esempio cosí come mostrato in Figura (1.1). Una piastra di dimensioni infinite é considerata nei due casi: nel primo caso senza fessure, nel secondo invece viene considerata con un foro molto piccolo.

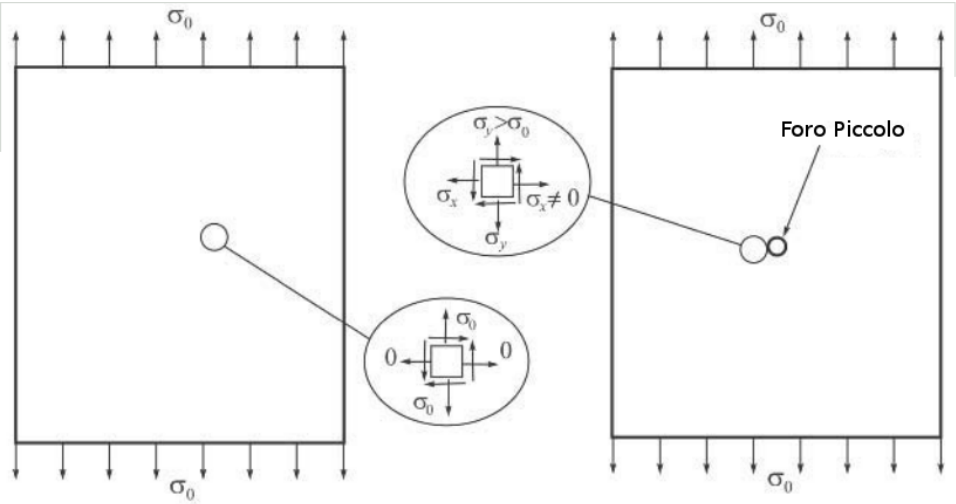


Figura 1.1: **Piastra infinita in trazione con e senza foro.**

Al centro della piastra integra, il campo di tensioni rimane uguale alla tensione applicata, σ_0. Quindi, la massima trazione puó essere determinata

dalla condizione che il campo interno delle tensioni dovrebbe essere limitato alla tensione a snervamento del materiale, come misura della resistenza del materiale

$$\sigma_0 = \sigma_{yld} \tag{1.37}$$

Diversamente, la soluzione elastica per una piastra infinita con un foro circolare (come verrá mostrato nella sezione seguente) prevede un campo di tensioni bi-assiali non uniformi, con uno *stress concentration factor* pari a 3 al centro della piastra, indipendentemente dalle dimensione del foro. Nei casi di fessure assottigliate, la soluzione proveniente dalla degenerazione del foro ellittico, mostra uno stato infinito di tensioni presenti sul fondo della fessura.

Quindi, al posto di comparare il campo di tensioni esistenti con un criterio di resistenza, la meccanica della frattura adotta degli *stress intensity factor* locali oppure *global fractur energy release* e compara questi valori con i rispettivi valori critici.

Nel seguito sono stati riportati alcuni problemi classici della meccanica della frattura.

1.3.2 Foro Circolare

Nel 1898, Kirsh analizzó il problema di una piastra infinita con foro soggetta a trazione uniforme, come mostrato in Figura 1.2.

Il problema é complesso da analizzare in un singolo sistema di coordinate. Le condizioni al bordo intorno al foro circolare possono essere espresse in modo naturale in coordinate polari, mentre le condizioni al bordo del campo lontano sarebbero meglio espresse in coordinate cartesiane xy.

Richiamando la definizione di tensione, σ_{yy}, in termini di *Airy stress function* $\sigma_{yy} = \partial^2\Phi/\partial x^2$ si giunge ad una funzione della tensione nella forma $\Phi = \sigma_0 x^2$ per rappresentare le condizioni al bordo del campo lontano $\sigma_{yy} = \sigma_0$. Alternativamente, una rappresentazione polare di Φ é sarebbe adatta a rappresentare il foro circolare con $x = r\cos\theta$.

$$\Phi = \sigma_0 r^2 \cos^2\theta \quad \textit{oppure} \quad \Phi = \sigma_0 f(r)\cos 2\theta \tag{1.38}$$

Dopo alcuni rimaneggiamenti, le seguenti soluzioni sano state ottenute (Meguid 1989):

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left[1 - \left(1 - 3\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \tag{1.39}$$

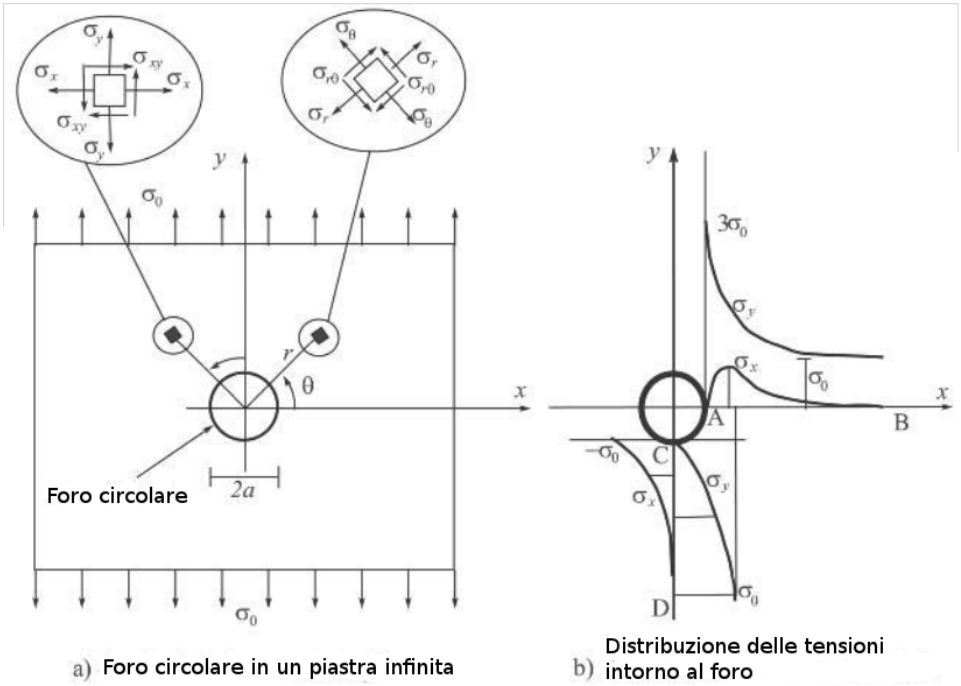


Figura 1.2: **Piastra infinita in trazione con foro circolare. a) geometria, b) distribuzione delle componenti di tensione.**

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{2}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \tag{1.40}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_0}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1+3\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta\right] \tag{1.41}$$

É interessante esaminare i valori delle tensioni sul bordo del foro, $r = a$:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_0(1+2\cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \end{cases} \tag{1.42}$$

le quali mostrano che nonostante l'applicazione di una tensione di trazione uniforme, una tensione bi-assiale non uniforme si genera intorno al foro, la quale puó anche divenire di compressione a $\theta = \pi/2\,,\, 3/2\pi$ ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} = -\sigma_0$). Lo *stress concentration factor* per $\sigma_{\theta\theta}$ é 3 a $\theta = 0\,,\,\pi$ ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} = 3\sigma_0$). La Figura 1.2b mostra la distribuzione delle componenti di tensione lungo l'asse maggiore della piastra.

1.3.3 Foro ellittico

Inglis (1913), professore di architettura navale, indipendentemente da un lavoro precedente di Kolosov, risolse il problema della concentrazione delle tensioni intorno ad un foro ellittico presente in una piastra infinita soggetta ad un carico uniformemente ripartito costante, come mostrato in Figura 1.3.

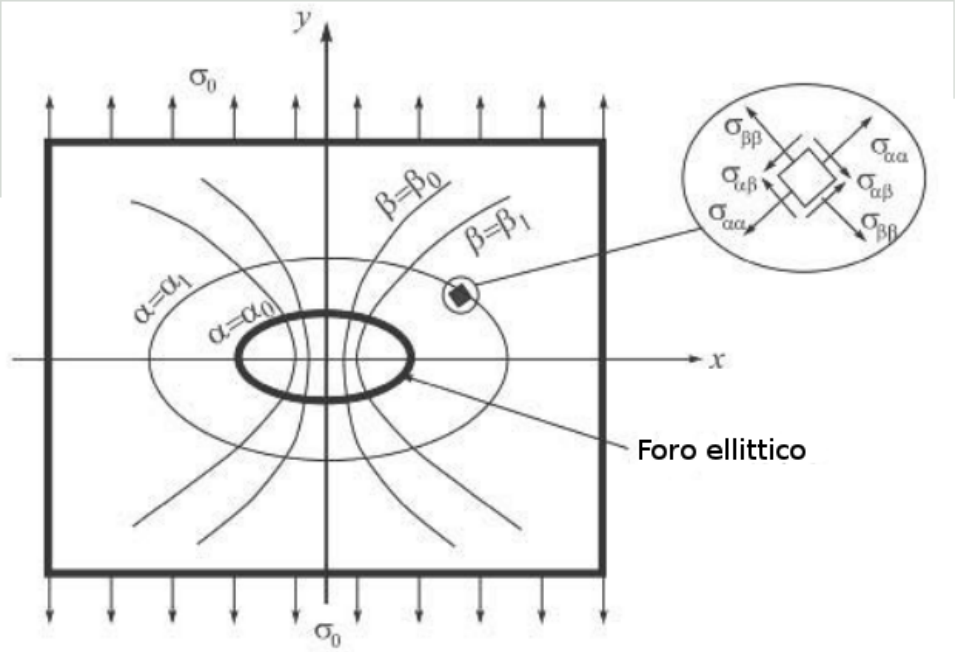


Figura 1.3: **Piastra infinita in trazione con foro ellittico.**

Le seguenti funzioni tensionali complesse, proposte da Inglis nel sistema di coordinate curvilinee α e β, soddisfano le condizioni al bordo e sono periodiche in β:

$$\psi(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 c \left[\left(1 + e^{2\alpha_0}\right)\sinh p - e^{2\alpha_0}\cosh p\right] \tag{1.43}$$

$$\chi(z) = \frac{1}{4}\sigma_0 c^2 \left[\left(\cosh 2\alpha_0 - \cosh \pi\right) p + \frac{1}{2}e^{2\alpha_0} - \cosh 2\left(p - \alpha_0 - i\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1.44}$$

dove $p = \alpha + i\beta$. La soluzione a $\alpha = \alpha_0$ é:

$$\left(\sigma_{\beta\beta}\right)_{\alpha=\alpha_0} = \sigma_0 e^{2\alpha_0}\left[\frac{\sinh 2\alpha_0\left(1 + e^{-2\alpha_0}\right)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} - 1\right] \tag{1.45}$$

e per i punti in fondo all'ellisse in termini di a e b,

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=0,\pi}} = \sigma_0 \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) \tag{1.46}$$

L'equazione (1.46) mostra che per un foro circolare ($a = b$) lo *stress concentration factor* diventa 3, cioé la soluzione trovata per il problema con il foro circolare. Un'altro caso estremo si ha quando l'ellisse degenera in una fessura ($b = 0$) generando una tensione infinita. Per il caso di fessura diretta in egual modo alla tensione di trazione ($a = 0$), la tensione sull'estremitá della fessura rimane pari al valore σ_0.

É stato dimostrato che l'equazione (1.46) puó essere riscritta in termini della curvatura radiale ρ:

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=0,\pi}} = \sigma_0 \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \tag{1.47}$$

la quale mostra che lo *stress concentration factor* é proporzionale a $\rho^{-1/2}$.

1.3.4 Analisi di Westergaard di una fessura a sottile

Si considera una piastra infinita con un fessura sottile di lunghezza $2a$ soggetta ad una tensione bi-assiale σ_0, come mostrato in Figura 1.4a.

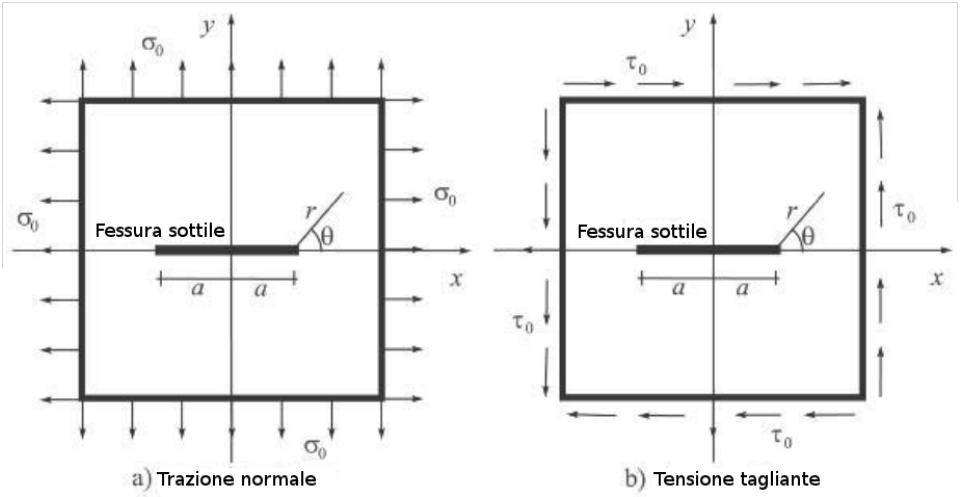


Figura 1.4: **Piastra infinita soggetta a trazione uniforme e azione tagliane con fessura sottile.**

Una soluzione sarebbe sovrapporre le soluzioni proposte da Inglis nei due casi, con $a = 0$ e $b = 0$. Un approccio alternativo fu proposto da Westergaard

(1939) attraverso la funzione bi-armonica Φ rappresentante le tensioni,0 come soluzione del problema della fessura, come riportata di seguito:

$$\Phi = Re\,\overline{\overline{\phi}}(z) + Im\,\overline{\phi}(z) \tag{1.48}$$

dove $\overline{\phi}$ e $\overline{\overline{\phi}}$ sono l'integrale primo e secondo di $\phi(z)$, rispettivamente. Le componenti delle tensioni diventano allora:

$$\sigma_{xx} = Re\,\phi(z) - y\,Im\,\phi'(z) \tag{1.49}$$

$$\sigma_{yy} = Re\,\phi(z) + y\,Im\,\phi'(z) \tag{1.50}$$

$$\sigma_{xy} = -y\,Re\,\phi'(z) \tag{1.51}$$

La funzione complessa ϕ é determinata cosí che le condizioni al bordo sono soddisfatte lungo la fessura e all'infinito (σ_0):

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}} \tag{1.52}$$

Quindi, vengono ottenute le soluzioni vicino alla punta della fessura ($r << a$)(Meguid 1989):

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \tag{1.53}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots \tag{1.54}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots \tag{1.55}$$

É accettabile trascurare i termini di ordine superiore nelle Equazioni (1.53)-(1.55) solo per valori molto piccoli di r intorno all'estremitá della fessura. Un confronto con la soluzione esatta:

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} \tag{1.56}$$

mostra che aumentando (r/a) da un valore di 0.5 a un valore piú grande come 15, l'errore relativo aumenta da 0.37 a circa il 10%.

Usando un approccio del tutto simile, il campo di tensioni attorno all'estremitá della fessura in una piastra infinita soggetta a tensioni da taglio τ_0 (Figura 1.4b) puó essere espressa come:

$$\phi_s(z) = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}} \tag{1.57}$$

e

$$\Phi_s(z) = -y\, Re\, \overline{\phi}_s(z) \tag{1.58}$$

1.4 Stress Intensity Factor, K

1.4.1 Definizione di Stress Intensity Factor

Irwin (1957) introdusse il concetto di *Stress Intensity factor K* (SIF), come una misura della resistenza della singolaritá. Egli illustró che tutti i campi tensionali elastici intorno all' estremitá della fessura sono distribuiti in modo simile, e $K \propto \sigma\sqrt{\pi r}$ controlla la quantitá di tensioni locali.

Ricordando le equazioni (1.53)-(1.55), lo stato tensionale elastico intorno alla fessura puó essere rappresentato da:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \cdots = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{r}} f(\theta) + \cdots \tag{1.59}$$

oppure in forma piú generale:

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2}\left\{K_I f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)\right\} + \text{ordini maggiori} \tag{1.60}$$

dove σ_{ij} sono le tensioni vicino alla punta della fessura, e K_I, K_{II}, K_{III} sono gli *stress intensity factors* associati ai tre modi indipendenti del movimento delle superfici della fessura,

$$K_I = \lim_{r\to 0,\, \theta=0} \sigma_{yy}\sqrt{2\pi r} \tag{1.61}$$

$$K_{II} = \lim_{r\to 0,\, \theta=0} \sigma_{xy}\sqrt{2\pi r} \tag{1.62}$$

$$K_{III} = \lim_{r \to 0,\, \theta = 0} \sigma_{yz} \sqrt{2\pi r} \tag{1.63}$$

Il primo modo basato sullo *stress intensity factor* di equazione (1.61) puó essere semplificato come:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \to 0,\, \theta = 0} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = \\ &= \lim_{r \to 0,\, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_0 \frac{a}{2r} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) = \\ &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} \end{aligned} \tag{1.64}$$

La Figura 1.5 illustra questi modi indipendenti dell'apertura della della fessura. In modo I, le superfici della fessura sono tirate in modo da essere separate nelle direzioni normali (y) ma restano simmetriche rispetto ai piani xz e xy. Il modo II (tagliante) rappresenta lo scorrimento delle superfici della fessura nella direzione x, la fessura resta simmetrica rispetto a xy e antisimmetrica rispetto al piano xz. In ultimo, nel modo piú complesso, III, le superfici della fessura scorrono in direzioni opposte rispetto all'asse z, e si presentano antisimmetriche rispetto ai piani xy e xz.

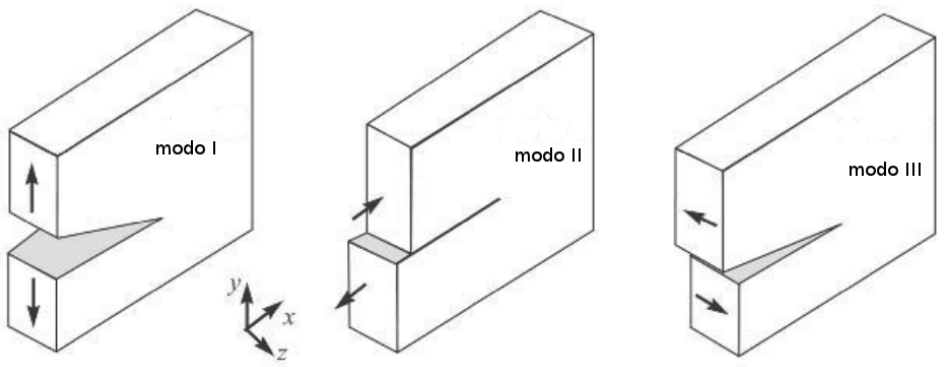


Figura 1.5: **Differenti modi di apertura della fessura.**

In modo analogo a quanto accade nella teoria convenzionale della resistenza dei materiali, dove le tensioni esistenti sono comparate con la resistenza offerta dal materiale, la meccanica della frattura afferma che una frattura instabile si presenta quando uno degli *stress intensity factor*, K_i, o un modo misto degli stessi raggiunge il valore critico, K_{ic}. Questo valore critico é chiamato resistenza alla frattura e rappresenta la capacitá di un materiale a resistere ad un dato campo di tensioni sul fondo della fessura e a resistere

alla progressiva estensione della fessura per trazione.

Sostituendo le equazioni (1.61)-(1.63) nelle equazioni (1.53)-(1.55) considerate in fondo alla fessura a $\theta = 0$, si trova il campo di tensioni e spostamenti descritti in termini degli *stress intensity factors*. Essi sono catalogati in tre modi puri inerenti alla frattura (Saouma 2000).

Per il modo I puro, lo *stress intensity factor* é dato da:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.65}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.66}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{1.67}$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{deformazione piana} \\ 0 & \text{tensione piana} \end{cases} \tag{1.68}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{1.69}$$

e il campo di spostamenti:

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.70}$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.71}$$

$$u_z = 0 \tag{1.72}$$

Il modo II puro é governato dai seguenti campi di tensioni:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.73}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \tag{1.74}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.75}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{1.76}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \tag{1.77}$$

con i campi di spostamenti u_x e u_y,

$$u_x = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.78}$$

$$u_y = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.79}$$

$$u_z = 0 \tag{1.80}$$

Il modo III, ha solo due componenti di tensioni diverse da zero e una solo componente di spostamento diversa da zero:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \tag{1.81}$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \tag{1.82}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \tag{1.83}$$

$$u_x = u_y = 0 \tag{1.84}$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.85}$$

In fine, le equazioni (1.65)-(1.80) possono essere espresse in coordinate polari σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ e $\sigma_{r\theta}$. Nel modo I puro:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.86}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.87}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{1.88}$$

e per il modo a taglio II:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(-\frac{5}{4}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.89}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(-\frac{3}{4}\sin\frac{\theta}{2}-\frac{3}{4}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.90}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.91}$$

1.4.2 Esempi di *stress intensity factors* nella LEFM

Vengono di seguito presentati alcuni esempi basilari della meccanica della frattura con le rispettive soluzioni analitiche ricavate con i rispettivi SIF. Come primo é stata considerata una piastra i trazione con una fessura centrale, come mostra la Figura 1.6a. Lo *stress intensity factor* del modo I puó essere definito come:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{\sec\frac{\pi a}{b}}\sigma\sqrt{\pi a} = \\ &= \left[1+0.256\left(\frac{a}{b}\right)-1.152\left(\frac{a}{b}\right)^2+12.2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]\sigma_0\sqrt{\pi a} \end{aligned} \tag{1.92}$$

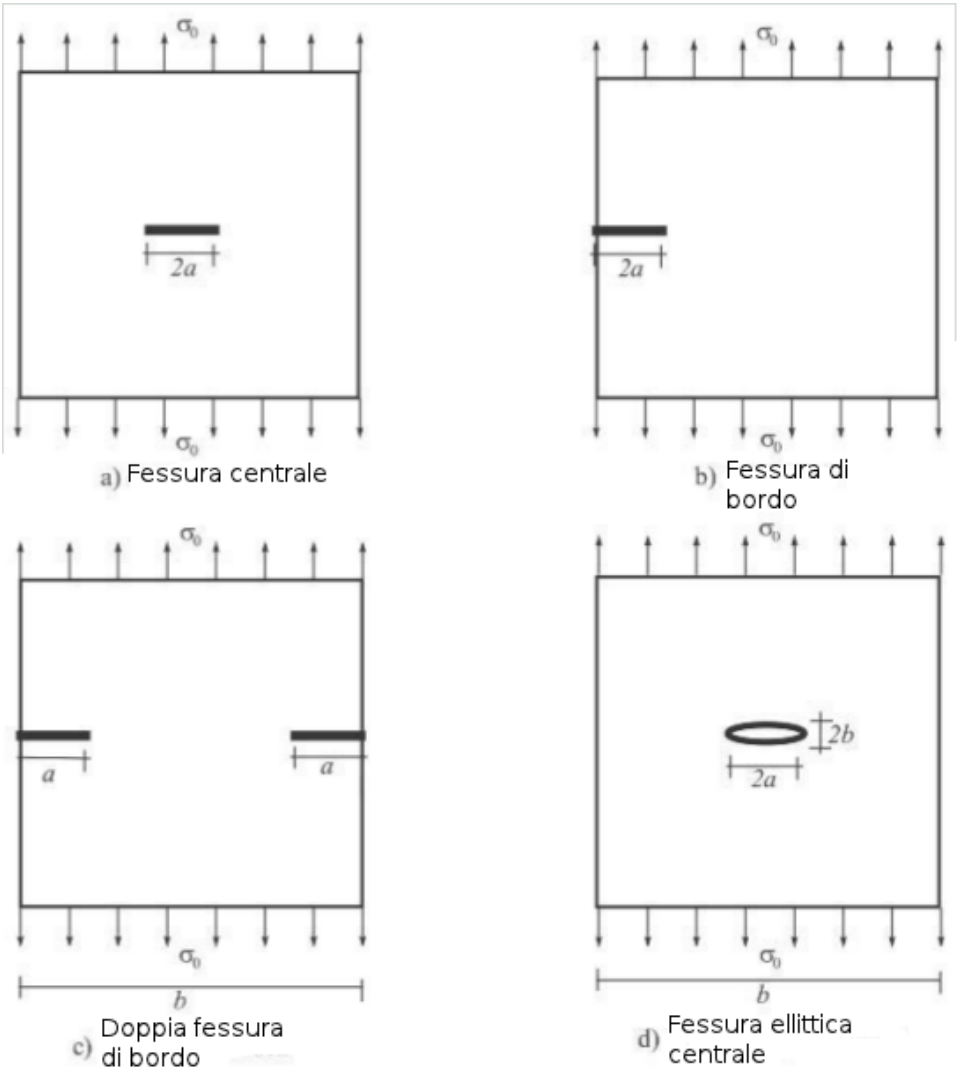


Figura 1.6: **Problemi classici di meccanica della frattura.**

Il secondo problema é simile al primo eccetto che la fessura é posizionata sul bordo, come mostra la Figura 1.6b. Lo *stress intensity factor* per il modo I puó essere ottenuto come:

$$K_I = \left[1.12 - 0.23\left(\frac{a}{b}\right) + 10.56\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.74\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.42\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]\sigma_0\sqrt{\pi a} \tag{1.93}$$

Se ora si considera il caso in cui le fessure lungo il bordo siano due, come mostra la Figura 1.6c, lo *stress intensity factor* deve essere modificato in accordo con la seguente:

$$K_I = \left[1.12 + 0.43\left(\frac{a}{b}\right) - 4.79\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 15.46\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]\sigma_0\sqrt{\pi a} \tag{1.94}$$

L'ultimo caso preso in considerazione descrive lo *stress intensity factor* per una fessura ellittica posta internamente ad una piastra finita soggetta a trazione, come mostra la Figura 1.6d.

$$K_I(\theta) = \left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\theta d\theta}\right)^{-1}\left(\sin^2\theta + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{4}}\sigma_0\sqrt{\pi b} \tag{1.95}$$

Per approssimare il processo di determinazione dello SIF, una soluzione approssimata puó essere considerata omettendo il primo termine:

$$K_I = \left(\sin^2\theta + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{4}}\sigma_0\sqrt{\pi b} \qquad 0 \leq \frac{b}{a} \leq 1 \tag{1.96}$$

Questi sono solo alcuni dei problemi piú importati della meccanica della frattura. Molte soluzioni analitiche o approssimate e gli *stress intensity factor* di altri classici problemi della meccanica della frattura si trovano nei numerosi manuali presenti in letteratura.

1.4.3 Teorie di Griffith sulla resistenza e sull'energia

Mentre studiava la resistenza teorica dei solidi attraverso una serie di esperimenti su delle bacchette di vetro di differenti diametro, Griffith osservó che la resistenza a trazione del vetro diminuiva incrementando il diametro. Egli realizzó che qualcosa di differente dalle semplici proprietá intrinseche del materiale era la causa della dipendenza della resistenza a trazione del

materiale dalle proprie dimensioni.

Mentre studiava la soluzione del problema della piastra con foro ellittico, Inglis introdusse l'idea che la resistenza teorica di un solido é ridotta dalla presenza di fessure interne. In altri termini, egli assunse che la resistenza teorica di un materiale deve essere comparata con la concentrazione dei campi tensionali, i quali sono piú elevati rispetto alle tensioni medie.

Invece di usare un criterio basato sulle tensioni, Griffith derivó un criterio termodinamico per la frattura attraverso considerazioni sullo scambio totale di energia in un corpo fessurato in termini di incremento della lunghezza della fessura. Il suo modello descrive il cedimento di un materiale solido in termini di soddisfacimento di un criterio energetico piuttosto che un controllo basato sulle tensioni critiche massime.

Si consideri una fessura in un oggetto deformabile soggetto ad un carico arbitrario. La prima legge della termodinamica afferma che la variazione di energia totale é proporzionale all'ammontare del lavoro compiuto e alla variazione del calore contenuto:

$$\frac{d}{dt}(U_k + U_s + U_\Gamma) = \frac{d}{dt}(W + Q) \tag{1.97}$$

dove U_k é l'energia cinetica, U_s é l'energia deformativa totale interna, U_Γ é l'energia superficiale, W é il lavoro esterno e Q é il calore immesso nel sistema.

Per un sistema adiabatico quasi-statico, Q e K sono uguali a zero:

$$\frac{d}{dt}(U_s + U_\Gamma) = \frac{d}{dt}(W) \tag{1.98}$$

Riscrivendo l'equazione (1.98) in termini della semi-lunghezza della fessura, a,

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial U_s}{\partial a} + \frac{\partial U_\Gamma}{\partial a} \tag{1.99}$$

Questa equazione rappresenta il bilanciamento dell'energia durante la propagazione della fessura, ed indica che l'aliquota di energia fornita al continuo dall'applicazione del carico esterno é uguale all'energia superficiale dissipata durante la propagazione della fessura, U_Γ, piú un'aliquota dell'energia deformativa, U_s, decomposta in una parte elastica U_s^e e una parte plastica U_s^p

$$U_s = U_s^e + U_s^p \tag{1.100}$$

L'equazione (1.99) pió essere espressa in termini di energia potenziale, Π:

$$\Pi = U_s^e - W \tag{1.101}$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{\partial U_s^e}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{\partial U_s^e}{\partial a} + \frac{\partial U_s}{\partial a} + \frac{\partial U_\Gamma}{\partial a} = \frac{\partial U_s^p}{\partial a} + \frac{\partial U_\Gamma}{\partial a} \tag{1.102}$$

Inoltre l'energia disponibile per l'espansione della fessura é comparata con la resistenza del materiale che deve essere superata per l'espansione della fessura. Si nota anche che il decremento di energia potenziale durante l'espansione della fessura é uguale alla quantitá di energia dissipata nelle deformazioni plastiche e nell'espansione della fessura.

1.4.4 Materiali Fragili

Per un materiale perfettamente fragile, U_s^p si elimina a le equazioni (1.101)-(1.102) si riducono a:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{\partial U_s^e}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial U_\Gamma}{\partial a} = 2\gamma_s \tag{1.103}$$

dove γ_s é l'energia superficiale e il numero 2 rappresenta la coesistenza di due superfici materiali sulla frattura. Il valore di γ_s é misurato sperimentalmente per differenti materiali. L'acqua ha un valore di $\gamma_s = 0.077$, mentre per molti metalli si ha $\gamma_s = 1.0$ (Saouma 2000). L'equazione (1.103) é definita come l'energia di propagazione della fessura di Griffith, G

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 2\gamma_s \tag{1.104}$$

In questo modo un criterio per la propagazione della fessura puó essere espresso attraverso una disuguaglianza tra l'aliquota di energia rilasciata per una propagazione unitaria della fessura e l'energia superficiale:

$$\frac{d\Pi}{da} \geq 2\gamma_s \tag{1.105}$$

oppure

$$d\Pi \geq 2\gamma_s da \tag{1.106}$$

Griffith ha mostrato che per una piastra di dimensioni infinite con una fessura al centro di dimensioni $2a$ e spessore unitario, soggetta ad uno stato

tensionale piano di trazione, l'energia deformativa richiesta per dare inizio alla fessura é uguale alla grandezza del lavoro richiesto per chiudere la fessura attraverso l'applicazione di una tensione agente su essa,

$$\Pi = 4\int_0^a \frac{1}{2}\sigma u_y(x)dx \tag{1.107}$$

In accordo con la soluzione di Mushkelishvili o Westergaard, gli spostamenti per una superficie libera di una faccia della fessura puó essere espressa come:

$$u_x(x) = -\frac{2\sigma x}{E'} \tag{1.108}$$

$$u_y(x) = \frac{2\sigma\sqrt{a^2 - x^2}}{E'} \tag{1.109}$$

L'equazione (1.107) puó ulteriormente essere semplificata:

$$\Pi = \frac{\pi\sigma^2 a^2}{2E'} \tag{1.110}$$

Perció, tornando all'equazione (1.104) fornisce,

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = \frac{\pi a\sigma^2}{E'} \tag{1.111}$$

Inoltre, l'energia totale consumata durante l'estensione della fessura, da, puó essere determinata come:

$$d\Pi = \int_0^{da} G dx = \int_0^{da} \frac{\sigma^2\pi a}{E'}dx = \frac{\sigma^2\pi a}{E'}da \tag{1.112}$$

La tensione critica per la fessurazione che soddisfa l'equazione (1.110) é conosciuta come σ_{cr}:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2E'\gamma_s}{\pi a}} \tag{1.113}$$

Il valore critico dello *stress intensity factor* K_C puó poi essere definito come:

$$K_C = \sigma_{cr}\sqrt{\pi a} \tag{1.114}$$

e si avrá un'estensione instabile della fessura se:

$$K = K_C \tag{1.115}$$

1.4.5 Materiali Quasi-Fragili

Per estendere il modello di Griffith anche ai materiali quasi-fragili, é possibile fare una modifica all'equazione (1.103) come:

$$\frac{\partial U_\Gamma}{\partial a} = 2(\gamma_s^e + \gamma_s^p) \tag{1.116}$$

dove γ_s^e e γ_s^p sono le parti elastiche e plastiche del lavoro associato all'estensione della fessura, rispettivamente. Per metalli duttili, $\gamma_s^p >> \gamma_s^e$. Alternativamente é anche possibile fare una semplice modifica all'equazione (1.113) come segue:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2E'\alpha_p\gamma}{\pi a}} \tag{1.117}$$

dove α_p é un fattore di correzione.

É importante notare che l'energia potenziale e l'energia superficiale sono funzione di termini differenti, la prima é funzione di a^2 ($U_s = \pm\pi\sigma^2 a^2/E$), mentre la seconda é funzione di a ($U_\Gamma = 4a\gamma_s$). Questo fatto puó ulteriormente complicare la soluzione e potrebbe avere serie implicazioni sulla sabilitá della fessura e sulle dimensione.

1.4.6 Stabilitá della fessura

L'equazione (1.102) puó essere riscritta come:

$$\frac{\partial}{\partial a}(\Pi + U_\Gamma) = 0 \tag{1.118}$$

Perció, la crescita della fessura puó essere considerata instabile oppure stabile quando l'energia all'equilibrio é un massimo o un minimo, rispettivamente. Dunque, una condizione sufficiente per la stabilitá della fessura é ottenuta dalla derivata seconda di $(\Pi + U_\Gamma)$ (Gtoudos 1993):

$$\frac{\partial^2(\Pi + U_\Gamma)}{\partial a^2} \begin{cases} < 0 & \textit{frattura instabile} \\ = 0 & \textit{frattura stabile} \\ > 0 & \textit{equilibrio neutro} \end{cases} \tag{1.119}$$

Per concludere la discussione sui criteri dei propagazione della fessura, per una fessura che si estende in una struttura fessurata con comportamento elastico lineare, due criteri possono essere considerati:

1. **Un criterio locale basato sulla comparazione dello *stress intensity factor*, K, determinato dal campo tensionale presente nelle vicinanze del fondo della fessura, con la proprietá del materiale K_C (*stress intensity factor* critico o resistenza alla frattura).**

2. **Un approccio globale per comparare l'aliquota di energia rilasciata, G, determinata dal trasferimento globale di energia della frattura, con la proprietá del materiale, G_C (aliquota critica di rilascio di energia).**

1.4.7 Controllo in Spostamento e Controllo di Carico

Sará ora considerata una piastra infinita con una fessura centrale di lunghezza $2a$ soggetta al carico P.
Il cambio di energia potenziale é determinato quando la lunghezza della fessura é incrementata a $2(a + da)$.
Sono stati analizzati i due casi limite in controllo di spostamento e in controllo di tensione come mostra la Figura 1.7.

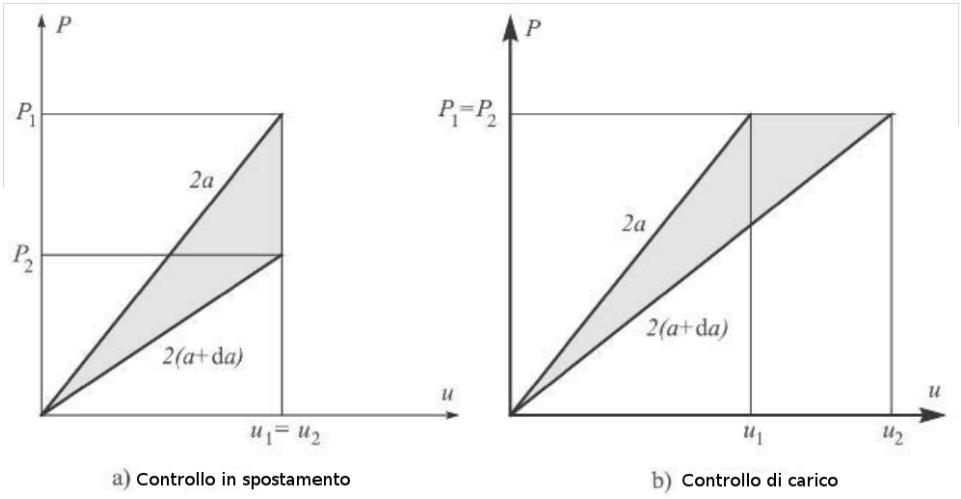


Figura 1.7: **Curve Forza-Spostamento per i problemi in controllo di spostamento e in controllo di carico.**

Nel primo caso ($u_2 = u_1$), il lavoro esterno é zero ($\Delta W = 0$) ed ogni aumento della lunghezza della fessura é associato ad un decremento dell'energia elastica di deformazione immagazzinata:

$$\Delta U = \frac{1}{2} P_2 u_1 - \frac{1}{2} P_1 u_1 < 0 \tag{1.120}$$

e

$$\Pi_2 - \Pi_1 = \Delta W - \Delta U = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)u_1 \tag{1.121}$$

Questo rilascio di energia in eccesso é consumato sotto forma di energia superficiale.

Sotto la condizione di carico fissato ($P_2 = P_1$), né il lavoro esterno né il rilascio di energia interna deformativa é zero,

$$\Delta W = P_1(u_2 - u_1) \tag{1.122}$$

e il cambiamento in energia potenziale:

$$\Pi_2 - \Pi_1 = \Delta W - \Delta U = P_1(u_2 - u_1) - \frac{1}{2}P_1(u_2 - u_1) = \frac{1}{2}P_1(u_2 - u_1) \tag{1.123}$$

La metá del lavoro esterno prodotto é consumato in energia deformativa, a l'altra metá é rilasciata sotto forma di energia superficiale.

1.4.8 Modo misto della propagazione della Fessura

I problemi discussi fino a qui sono principalmente in modo I. I problemi pratici dell'ingegneria, comunque, raramente cadono in questa categoria. Essi solitamente includono propagazioni inclinate o curvilinee e sono soggetti a carichi multi-assiali (Figura 1.8), creando degli *stress intensity factors* K_I e K_{II} diversi da zero. Nel seguito di questa sezione si é deciso di tralasciare il modo III.

La soluzione analitica per una fessura inclinata in una piastra infinita puó essere scritta come:

$$K_I = \sigma \sin^2 \theta_0 \sqrt{\pi a} \tag{1.124}$$

$$K_{II} = \sigma \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sqrt{\pi a} \tag{1.125}$$

La generalizzazione del criterio collineare originale di propagazione basato sui SIF ($K_I > K_{Ic}$) per includere gli effetti del modo misto puó essere definito in termini degli *stress intensity factor* K_I e K_{II}, e dei parametri di resistenza alla frattura K_{Ic} e K_{IIc}:

$$f(K_I\,,\, K_{Ic}\,,\, K_{II}\,,\, K_{IIc}) = 0 \tag{1.126}$$

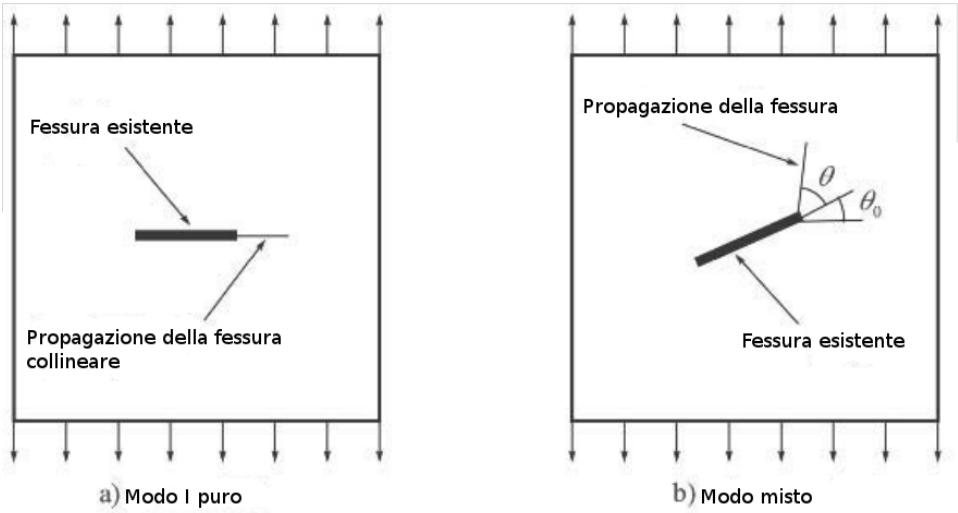


Figura 1.8: **Propagazione della fessura in modo misto.**

L'equazione (1.126) é ulteriormente semplificabile perché solitamente solo il coefficiente K_{Ic} di resistenza alla frattura é misurato sperimentalmente:

$$f(K_I\,,\,K_{Ic}\,,\,K_{II}) = 0 \tag{1.127}$$

Nelle quattro sezioni che seguono verranno brevemente riportati alcuni dei criteri tra i piú usati nel modo misto.

1.4.8.1 Massima tensione di trazione circonferenziale

Erdogan e Sih (1963) svilupparono la prima teoria del modo misto con gli *stress intensity factor* basata sulla soluzione dello stato tensionale vicino al fondo della fessura. Essi assunsero che la fessura propagasse sul fondo in una direzione radiale in un piano perpendicolare alla direzione di massima tensione dove la tensione massima di trazione, $(\sigma_\theta)_{max}$, raggiunge una costante critica del materiale.

Il criterio per il modo misto per una fessura inclinata di θ puó poi essere definita come (Figura 1.8b):

$$\frac{K_I}{K_{Ic}}\cos^3\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta = 1 \tag{1.128}$$

oppure

$$K_{eq} = K_I\cos^3\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{II}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \tag{1.129}$$

1.4.8.2 Criterio di minima densitá di energia deformativa

Il criterio di minima densitá di energia deformativa é basato sull'idea che una fessura si propaga lungo il percorso di minima resistenza. Esso determina la propagazione della fessura dal fondo in una direzione θ, lungo la quale la densitá di energia deformativa ad una distanza critica é minima. Il verificarsi della propagazione della fessura é controllato verificando che la suddetta resistenza minima raggiunga un valore critico.

La forma finale di suddetto criterio in accordo con Sih (1973, 1974) puó essere definita come:

$$\frac{8\mu}{\kappa - 1}\left[a_{11}\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{K_I K_{II}}{K_{Ic}^2}\right) + a_{22}\left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2\right] = 1 \tag{1.130}$$

dove

$$\begin{cases} a_{11} = & \frac{1}{16\mu}[(1+\cos\theta)(\kappa - \cos\theta)] \\ a_{12} = & \frac{\sin\theta}{16\mu}[2\cos\theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} = & \frac{1}{16\mu}[(\kappa+1)(1-\cos\theta) + (1+\cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \end{cases} \tag{1.131}$$

1.4.8.3 Massima aliquota di energia rilasciata

Un'altro modello alternativo, la massima aliquota di energia rilasciata, é basato sul lavoro di Hussain *et al.* (1974) che risolse valutando gli *stress intensity factors* $K_I(\theta)$ e $K_{II}(\theta)$, di una fessura principale esistente con una deviazione infinitesimale sull'estremitá inclinata di un angolo θ (Figura 1.9), in termini degli *stress intensity factors* della fessura della fessura originale K_I e K_{II}:

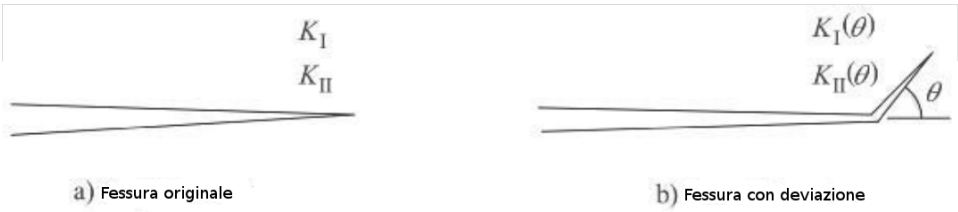


Figura 1.9: **Fessura con una deviazione infinitesima.**

$$K_I(\theta) = g(\theta)\left(K_I\cos\theta + \frac{3}{2}K_{II}\sin\theta\right) \tag{1.132}$$

$$K_{II}(\theta) = g(\theta)\left(K_{II}\cos\theta - \frac{3}{2}K_I\sin\theta\right) \tag{1.133}$$

con

$$g(\theta) = \left(\frac{4}{3+\cos^2\theta}\right)\left(\frac{1-\theta/\pi}{1+\theta/\pi}\right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \tag{1.134}$$

Adottando l'espressione di Irwin generalizzata per l'aliquota del rilascio di energia,

$$G(\theta) = \frac{1}{E'}\left(K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)\right) \tag{1.135}$$

la valutazione di $G(\theta)$ per la frattura piegata diventa:

$$\begin{aligned} G(\theta) = \frac{1}{4E'}g^2(\theta)[(1+3\cos^2\theta K_I^2) + 8\sin\theta\cos\theta K_I K_{II} + \\ + (9-5\cos^2\theta K_{II}^2)] \end{aligned} \tag{1.136}$$

e l'angolo dei propagazione della fessura viene trovato minimizzando $G(\theta)$:

$$\frac{\partial G(\theta)}{\partial\theta} = 0 \tag{1.137}$$

e soddisfacendo le condizioni di instabilitá,

$$\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial\theta^2} < 0 \tag{1.138}$$

La forma generale dell'equazione (1.136) prende la forma seguente,

$$G(\theta) = \frac{1}{E'}\left[A_{11}K_I^2(\theta) + 2A_{12}K_I(\theta)K_{II}(\theta) + A_{22}K_{II}^2(\theta)\right] \tag{1.139}$$

dove

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = g^2(\theta)\begin{bmatrix} 4-3\sin^2\theta \\ -2\sin 2\theta \\ 4+5\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{1.140}$$

1.4.8.4 Criterio di K_{II} nullo

In questo modello, il criterio é quello di porre nel piano lo *stress intensity factor* K_{II} in modo che si azzeri nel modo a taglio per l'estensione infinitesima dell'estensione della fessura. Come hanno mostrato Whittaker e Singh (1992).

1.4.8.5 Ulteriori modelli empirici

Le seguenti formule definiscono un certo numero di criteri validi per il modo misto basati sugli *stress intensity criteria.* Le formule sono sviluppate a partire da osservazioni sperimentali piuttosto che da basi teoriche. Molte di queste sono valide solo per problemi specifici del calcestruzzo, delle rocce, e dei materiali compositi, per i quali i modelli sono stati sperimentalmente ottenuti e calibrati.

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right) + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right) = 1 \qquad \textit{modello lineare} \tag{1.141}$$

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \qquad \textit{modello ellittico} \tag{1.142}$$

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + c\left(\frac{K_I K_{II}}{K_{Ic} K_{IIc}}\right) + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1\,,\ c \neq 2 \quad \textit{modello quadratico} \tag{1.143}$$

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right) + \left(\frac{K_{II}}{2K_{Ic}}\right)^2 = 1 \qquad \textit{modello di Lee/Advani} \tag{1.144}$$

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^c + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^c = 1\,,\ c \cong 1.6 \qquad \textit{modello di Stato/Awaji} \tag{1.145}$$

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right) + 1.5\left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2 = 1 \qquad \textit{modello di Knauss} \tag{1.146}$$

1.5 Procedure risolutive per K e G

Per molti problemi pratici non é possibile adottare delle soluzioni analitiche, quindi tecniche numeriche come il metodo agli elementi finiti, il metodo degli elementi di bordo e piú recentemente i metodi *meshless* dovrebbero essere usate. In questa sezione si riportano brevemente le soluzioni relazionate agli elementi finiti. Queste includono:

1. Metodi classici usando gli elementi finiti esclusivamente come strumento analitico basato sul continuo.
2. Tecniche nelle quali gli SIFs sono direttamente valutati come parte della matrice globale delle rigidezze
3. Tecniche attraverso le quali lo SIF puó essere valutato da un'analisi standard agli elementi finiti attraverso una speciale tecnica di post-processamento.
4. Metodi nei quali la singolaritá del campo di tensioni sull'estremitá della fessura viene modellato.

1.5.1 Metodo agli Spostamenti di estrapolazione/correlazione

Il campo tensionale sulla punta della fessura é singolare e l'analisi convenzionale agli elementi finiti non puó rappresentarlo nella sua raffinatezza. Nondimeno, venne mostrato giá nelle prime simulazioni di LEFM che una mesh molto fine era necessaria sul fondo della fessura se la si voleva utilizzare per approssimare il campo di tensioni per la valutazione dello *stress intensity factor* (Chan *et al.* 1970).

Gli *stress intensity factors* posso essere determinati al differenti distanze radiali dal fondo della fessura uguagliando gli spostamenti ottenuti numericamente con le proprie espressioni analitiche in termini di SIF. Per un problema di tensione piana nel piano xy (Figura 1.10):

$$K_I = \mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\frac{u_y^b - u_y^a}{2(1-\nu)} \tag{1.147}$$

$$K_{II} = \mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\frac{u_x^b - u_x^a}{2(1-\nu)} \tag{1.148}$$

$$K_{III} = \mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\left(u_z^b - u_z^a\right) \tag{1.149}$$

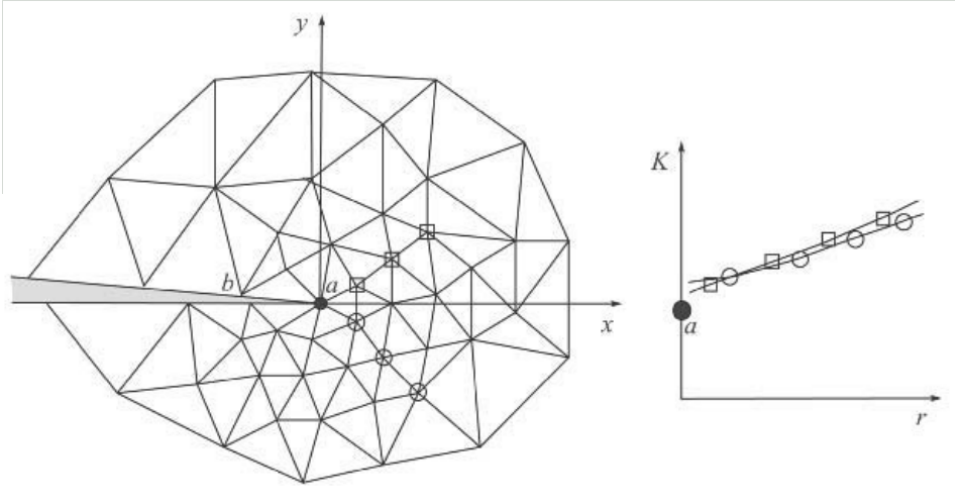


Figura 1.10: **Estrapolazione dello *stress intensity factor*.**

e per problemi piani di tensione, la seguente sostituzione é richiesta:

$$\nu \to \frac{\nu}{1+\nu} \tag{1.150}$$

Una semplice tecnica di estrapolazione, come mostrata in Figura 1.10, puó poi essere usata per approssimare il valore del SIF sulla punta della fessura.

1.5.2 Aliquota di energia rilasciata nel Modo I

Un metodo diretto per la valutazione dello *stress intensity factor* del modo I e dell'aliquota di energia rilasciata é basato direttamente sulla definizione di G:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \cong \frac{\Delta \Pi}{\Delta a} \tag{1.151}$$

e trovando la differenza nell'energia deformativa totale, $\Delta\Pi$, del sistema per la lunghezza iniziale e dopo l'estensione della fessura a e $a + \Delta a$, rispettivamente. Perció l'algoritmo richiede due analisi completamente separate, e quindi é computazionalmente molto oneroso. L'energia deformativa puó essere determinata da entrambi $\Pi = u^T K u$ in termini di spostamenti nodali u e di matrice globale delle rigidezze K, oppure $\Pi = u^T P$ in termini dei carico esterno P e di spostamenti u.

1.5.3 Modo I: rigidezza derivata e fessura virtuale

Il problema principale con il metodo precedente é la necessitá di due analisi complete per la valutazione di G. Andrebbe comunque notato che la matrice di rigidezza della seconda analisi (associata a $a + \Delta a$) é solo lievemente alterata rispetto alla prima (associata a a). Un rimedio, perció, é di utilizzare un metodo di attenuazione per ridurre il costo computazionale per la seconda analisi, come proposero indipendentemente Parks (1974) e Hellen e Blackburn (1975), che chiamarono il metodo rigidezza derivata e modello della fessura virtuale, rispettivamente.

Iniziando con la definizione di energia potenziale:

$$\Pi = \frac{1}{2} u^T K u - u^T P \tag{1.152}$$

e

$$-G = \frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial u^T}{\partial a} K u + \frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial a} P - u^T \frac{\partial P}{\partial a} \tag{1.153}$$

e imponendo le condizioni le condizioni di equilibrio, risulta:

$$G = -\frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial a} u + u^T \frac{\partial P}{\partial a} \tag{1.154}$$

Il metodo puó essere ulteriormente semplificato se si assume che il carico resta inalterato durante l'estensione della fessura, $\partial P / \partial a = 0$:

$$G = -\frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial a} u \tag{1.155}$$

Dunque, la derivata della matrice di rigidezza é richiesta per la valutazione di G. Al posto di una scomoda differenziazione numerica, questa é solitamente computata perturbando gli elementi attorno al fondo della fessura (Figura 1.11) e valutando le parti modificate della matrice di rigidezza associata ai nodi degli elementi lungo l'estensione della fessura.

Nel caso di fessure multiple, G puó essere essere valutato numericamente attraverso:

$$G = -\frac{1}{2} u^T \left\{ \sum_{i=1}^{nc} \left(\frac{\partial K}{\partial a} \right)_i \right\} u \tag{1.156}$$

dove nc é il numero di fessure discrete.

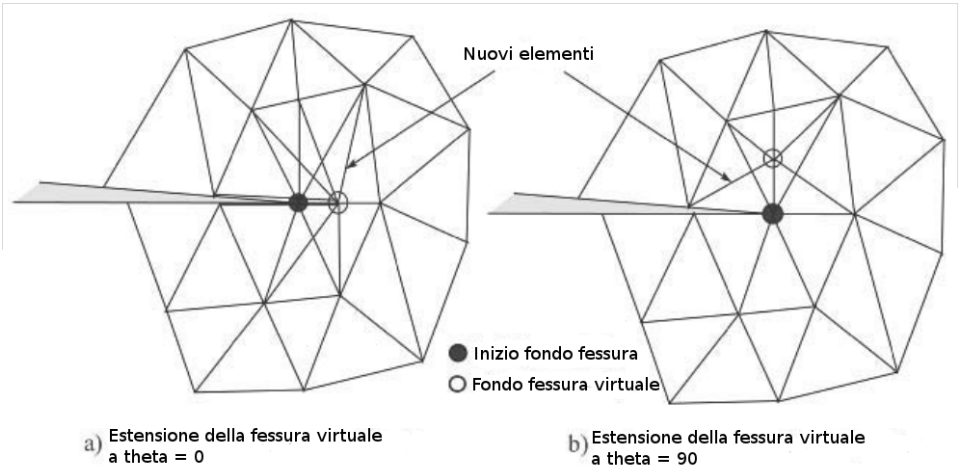


Figura 1.11: **Modello della fessura virtuale.**

1.5.4 Due estensioni di fessure virtuali per i casi di modo misto

Un'estensione naturale del modello della fessura virtuale per includere gli effetti della frattura in modo misto é di utilizzare i due modelli dell'estensione della fessura virtuale. Questo é ottenuto applicando il modello della fessura virtuale a due estensioni di fessure indipendenti, θ_1 e θ_2:

$$G(\theta) = f\left(G_1(\theta_1) + G_2(\theta_2)\right) \tag{1.157}$$

Alternativamente, a partire da due valori conosciuti di G_1 e G_2 a due valori distinti di θ, i quali non devono necessariamente essere 0 o $\pi/2$, il valore di $G(\theta)$ misto puó essere definito come:

$$G(\theta) = G_1 \cos\theta + G_2 \sin\theta \tag{1.158}$$

Un caso piuttosto semplice con una soluzione in forma chiusa fu proposto da Hellen e Blackburn (1975) basato sulla seguente espressione delle aliquote di energia rilasciata per l'estensione della fessura virtuale a $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$:

$$G_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}2}{2\mu} \tag{1.159}$$

$$G_2 = \frac{-2K_I K_{II}}{E'} \tag{1.160}$$

La procedura puó cominciare computando l'energia totale deformativa U_s per una fessura di lunghezza iniziale a. Poi per la lunghezza della fessura estesa a $a+\Delta a$ lungo $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ si determina G_1 e G_2, rispettivamente. Gli *stress intensity factors* vengono calcolati risolvendo simultaneamente le equazioni (1.159) e (1.160):

$$K_I = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 + \frac{8G_2}{\kappa'}}\right) \tag{1.161}$$

$$K_{II} = \frac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{s^2 + \frac{8G_2}{\kappa'}}\right) \tag{1.162}$$

dove

$$s = 2\sqrt{\frac{G_1 - G_2}{\alpha}} \tag{1.163}$$

$$\kappa' = \frac{(1+\nu)(1+\kappa)}{E} \tag{1.164}$$

1.5.5 Singola estensione di fessura virtuale basata sulla decomposizione degli spostamenti

Le tecniche esposte precedentemente sono computazionalmente onerose ed inefficienti perché esse richiedono almeno un'analisi agli elementi finiti completa, seguite da due analisi separate o da due estensioni delle fessure virtuali. L'approccio presente, proposto da Ishikawa (1980) e Sha (1984), richiede solo un'analisi (o una estensione della fessura virtuale) ma é limitata a elementi locali simmetrici attorno al fondo della fessura.

Con riferimento alla Figura 1.12, gli spostamenti nodali per una mesh locale simmetrica attorno al fondo della fessura puó essere decomposta in due componenti locali, nel piano della fessura, simmetrica U^1 ed antisimmetrica U^2:

$$U = U^1 + U^2 \tag{1.165}$$

dove

$$U^1 = \left\{ \begin{array}{c} u_x^1 \\ u_y^1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{c} u_x + \hat{u}_x \\ u_y - \hat{u}_y \end{array} \right\} \tag{1.166}$$

$$U^2 = \left\{ \begin{array}{c} u_x^2 \\ u_y^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} u_x - \hat{u}_x \\ u_y + \hat{u}_y \end{array} \right\} \tag{1.167}$$

e

$$\hat{u}(x, y) = u(x, -y) \tag{1.168}$$

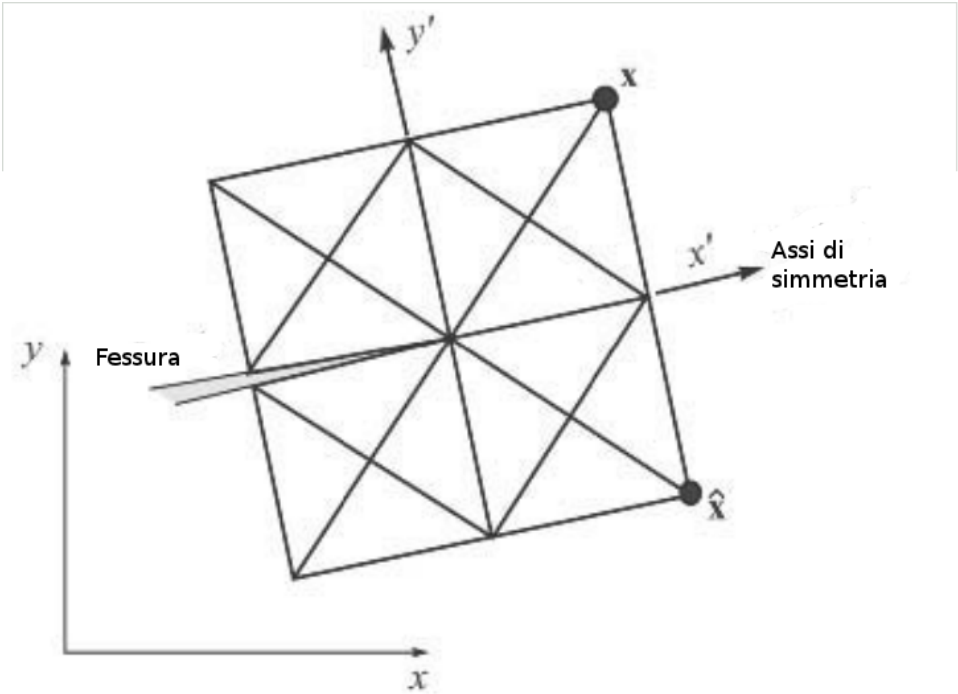


Figura 1.12: **Decomposizione degli spostamenti per una mesh locale simmetrica intorno al fondo della fessura.**

L'aliquota di energia della frattura rilasciata puó anche essere decomposta in:

$$G_i = G_i(U^i) \qquad i = 1, 2 \tag{1.169}$$

La seguente soluzione basata su due coniugati locali (U^1, P^1) e (U^2, P^2) puó essere ottenuta:

$$G_i = -\frac{1}{2} U^i \frac{\partial K}{\partial a} U^i + U^i \frac{\partial P_i}{\partial a} \qquad i = 1, 2 \tag{1.170}$$

I due *stress intensity factors* possono poi essere semplicemente determinati:

$$K_i = \sqrt{E'G_i} \qquad i = 1, 2 \tag{1.171}$$

1.5.6 Punto ad un quarto degli elementi singolari

Lo sviluppo di sofisticati elementi singolari per simulare le condizioni di singolaritá sul fondo della fessura ha avuto un impatto enorme sull'accrescimento dell'accuratezza di svariate analisi numeriche in LEFM. Fu prima proposto da Barsoum (1974, 1975, 1976, 1977, 1981) ed indipendentemente da Hansell e Shaw (1975), che la caratteristica singolare $r^{-1/2}$ in LEFM puó essere ottenuta da elementi isoparametrici bidimensionali a 8 nodi quando la metá dei nodi vicino al fondo della fessura sono posti nel quarto. Una conseguenza diretta fu una maggiore e performante capacitá dei codici di calcolo agli elementi finiti basati sul continuo di modellare le singolaritá delle tensioni solamente spostando la metá dei nodi degli elementi adiacenti al fondo della fessura nelle loro *quarter point position*. Ció fornisce una delle tecniche piú semplici e performanti per modellare le singolaritá delle tensioni.

Hibbit (1977) e Ying (1982) studiarono la singolaritá dei punti posti ad un quarto degli elementi rettangolari e triangolari e conclusero che la singolaritá di un punto posto ad un quarto dell'elemento rettangolare é solo lungo il confine e la diagonale, mentre in un elemento triangolare la singolaritá si presenta in tutte le direzioni radiali uscenti dal fondo della fessura.

Owen e Fawkes (1983) implementarono e confrontarono differenti elementi sul fondo della fessura. Essi illustrarono come questi elementi potevano essere implementati nei codici agli elementi finiti e discussero i vari problemi numerici.

Al fine di dimostrare il modo in cui si implementa un elemento singolare, verrá considerato un semplice elemento monodimensionale con tre nodi, come mostrato nella Figura 1.13. La posizione fisica del nodo interno x_2 potrebbe essere qualsiasi purché rispetti la condizione $-1 < x_2 < 1$, mentre la sua posizione nella mappa dello spazio parametrico é sempre $\xi_2 = 0$. Assumendo una funzione di base del secondo ordine, conduce al seguente vettore posizione x (Macneal 1994),

$$x = \xi + (1 - \xi^2)x_2 \tag{1.172}$$

L'equazione (1.172) mostra che per valoridi $x_2 > 1/2$, il valore di x puó giacere fuori dall'insieme $[-1, +1]$. Fisicamente, il nodo centrale attraversa i nodi dello spigolo e l'elemento si espande oltre la frontiera.

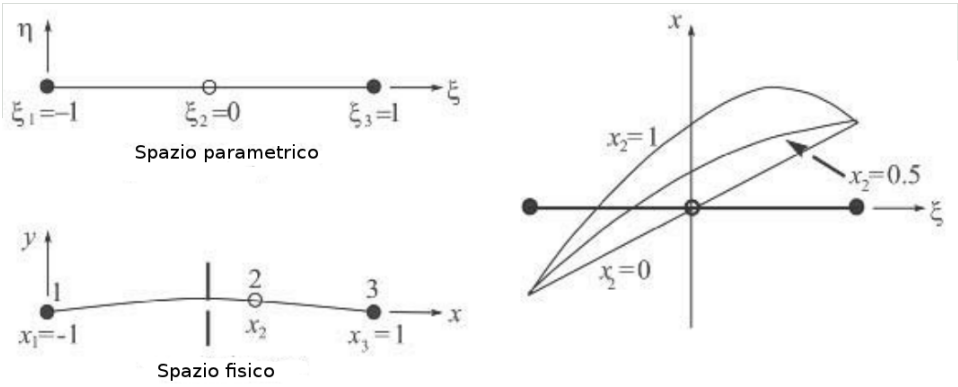


Figura 1.13: **Elemento monodimensionale con tre nodi.**

Si puó anche osservare che posizionare l'elemento centrale ad un quarto ($x_2 = \pm 1/2$) permette all'elemento di simulare la singolaritá tensionale nello spigolo. La deformazione puó essere determinata attraverso:

$$\epsilon_x = u_{,x} = u_{,\xi}\xi_{,x} \tag{1.173}$$

la quale diventa infinita nel punto di spigolo $\xi = 1$, purché il punto centrale x_2 é ad un quarto $x_2 = 1/2$:

$$x_{,\xi} = 0\,,\ \xi_{,x} = \infty \tag{1.174}$$

La stessa conclusione puó essere ottenuta per elementi bi- e tridimensionali. Il tensore delle tensioni in un elemento finito isoparametrico é dato da:

$$\sigma = \mathbf{DB}\overline{\mathbf{u_i}} \tag{1.175}$$

dove la componente della matrice **B** é valutata dalle componenti dello Jacobiano **J**. Per simulare il campo singolare delle tensioni, l'equazione (1.175) richiede che **B** debba essere singolare, e che le altre due componenti siano costanti. Il determinante di **J** deve annullarsi sul fondo della fessura. Questo é possibile solamente se uno dei due termini della diagonale diventa zero.

$$\mathbf{J} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right\}, \mathbf{J^{-1}} = \frac{1}{det\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right\} \tag{1.176}$$

Facendo riferimento all'equazione (1.176), si nota che questo é realizzato solo se il nodo centrale dell'elemento si trova a $x_2 = 1/2$ $(l/4)$ invece di

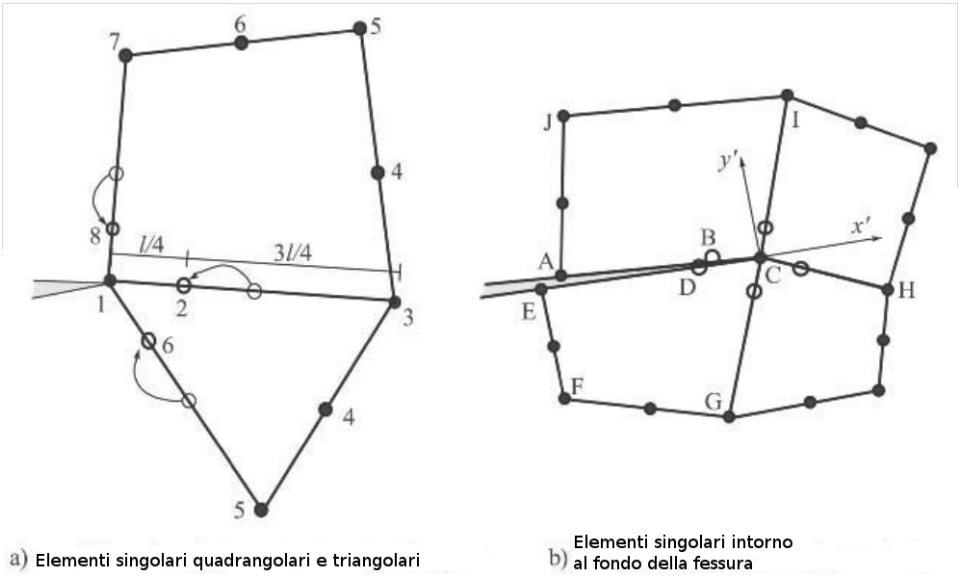


Figura 1.14: **a) Punto nel quarto (singolare) di un elemento finito triangolare e quadrangolare e b) quattro punti posizionati nel quarto dell'elemento intorno all'estremitá della fessura.**

$x_2 = 0$ $(l/2)$. Come risultato si ha che le tensioni e le deformazioni nelle vicinanze del nodo d'angolo diventano singolari (Figura 1.14).

Si puó dimostrare che il punto nel quarto dell'elemento si approssima al campo dello spostamento lungo $\eta = -1$ nella forma generale di:

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.177}$$

la quale é un'indicazione dell'ordine della singolaritá di $r^{-1/2}$ per la deformazione (derivata dello spostamento) e cosí del campo delle tensioni.

Viene sottolineato che il punto nel quarto dell'elemento quadrangolare singolare fornisce singolaritá radiali nel campo delle tensioni e delle deformazioni lungo il corrispondente confine e lungo la diagonale solamente, e che il campo delle tensioni e delle deformazioni resta finito (non singolare) nelle altre direzioni. Quindi utilizzando quattro elementi singolari intorno al nodo C in Figura 1.14b si genera quattro campi deformativi radiali indipendenti lungo i confini CA, CI, CH, CG e CE e campi deformativi non singolari altrove.

In contrasto, i punti nel quarto di elementi triangolari creano singolaritá in tutte le direzioni radiali (dentro l'elemento) emanate dalla punta della fessura. Essi alzano anche il numero di raggi radiali attorno all'estremitá

della fessura rappresentando campi deformativi singolari.

Elementi finiti singolari permettono un approccio efficiente e veloce per la valutazione degli *stress intensity factor* (Shih *et al.* 1976). Riferendosi alla Figura 1.14b, l'idea basilare é di eguagliare il campo di spostamenti locali del punto nel quarto dell'elemento singolare con la soluzione teorica:

$$\begin{aligned} u_i =& u_{iC} + (-3u_{iC} + 4u_{iB} - u_{iA})\sqrt{\frac{r}{l}} + \\ &+ (2u_{iC} - 4u_{iB} + 2u_{iA})\frac{r}{l} \qquad\qquad i = x', y' \end{aligned} \tag{1.178}$$

$$\begin{aligned} u_i =& u_{iC} + (-3u_{iC} + 4u_{iD} - u_{iE})\sqrt{\frac{r}{l}} + \\ &+ (2u_{iC} - 4u_{iD} + 2u_{iE})\frac{r}{l} \qquad\qquad i = x', y' \end{aligned} \tag{1.179}$$

dove $u_{x'}$ e $u_{y'}$ sono gli spostamenti locali dei nodi lungo la fessura nell'elemento singolare, con x' allineato con l'asse della fessura, come mostra la Figura 1.14b.

In un altro modo, la soluzione analitica per u_y puó essere ottenuta dall'equazione (1.71) lungo l'asse della fessura:

$$u_y = K_I \frac{\kappa + 1}{2\mu}\sqrt{\frac{2}{2\pi}} \tag{1.180}$$

Uguagliando $u_{y'} = u_y$, risulta:

$$K_I = \frac{1}{2}\frac{2\mu}{\kappa + 1}\sqrt{\frac{2\pi}{l}}(-3u_{y'C} + 4u_{y'B} - u_{y'A}) \tag{1.181}$$

la quale puó essere generalizzata per il problema in modo misto,

$$K_I = \frac{1}{2}\frac{2\mu}{\kappa + 1}\sqrt{\frac{2\pi}{l}}[-3u_{y'C} + 4(u_{y'B} - u_{y'D}) - (u_{y'A} - u_{y'E})] \tag{1.182}$$

$$K_{II} = \frac{1}{2}\frac{2G}{\kappa + 1}\sqrt{\frac{2\pi}{l}}[-3u_{x'C} + 4(u_{x'B} - u_{x'D}) - (u_{x'A} - u_{x'E})] \tag{1.183}$$

Teoricamente, la stessa procedura puó essere seguita per le componenti delle tensioni. Il problema é che il campo delle tensioni é discontinuo lungo i bordi dell'elemento. In ogni caso, l'estensione del metodo al caso di piú di un elemento singolare e delle possibili discrepanze dei risultati ottenuti da elementi singolari differenti, rimane irrisolta.

1.6 Esempio 1: Singolo foro circolare in una piastra di dimensioni infinite e finite soggetta a tensione mono-assiale

1.6.1 Soluzione analitica

Le tensioni nell'intorno di un foro circolare interno ad una piastra di dimensioni infinite soggetta ad una tensione σ mono-assiale sono mostrate in figura (1.15). In coordinate polari la distribuzione delle tensioni puó essere scritta come segue:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{2}\sigma\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\sigma\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{2}\sigma\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\sigma\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}\sigma\left(1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{1.184}$$

Dove a é il raggio del foro, r e θ sono le coordinate polari dei punti interni all' elemento come mostra la figura (1.15). Sul bordo del foro con $r = a$,

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 0 \\
\sigma_\theta &= \sigma\left(1-2\cos 2\theta\right) \\
\tau_{r\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{1.185}$$

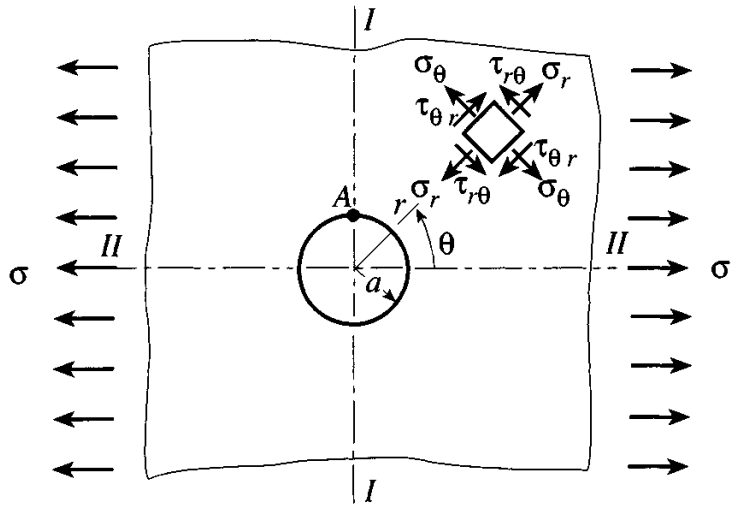


Figura 1.15: Piastra di dimensione infinita con foro circolare soggetta ad una tensione mono-assiale di trazione

Nel punto A, dove si ha $\theta = \pi/2$ ($\theta = 3/2\pi$)

$$\sigma_{\theta A} = 3\sigma \tag{1.186}$$

Questa é la massima tensione intorno al foro, quindi lo *stress consentration factor* per questo caso é pari a 3.

La distribuzione delle σ_θ lungo il bordo del foro é mostrata nella figura (1.16), nel punto B con il valore di $\theta = 0$, l'equazione (1.185) mostra

$$\sigma_{\theta B} = -\sigma \tag{1.187}$$

Quando $\theta = \pm\pi/6$ oppure $\theta = \pm 5/6\pi$

$$\sigma_\theta = 0 \tag{1.188}$$

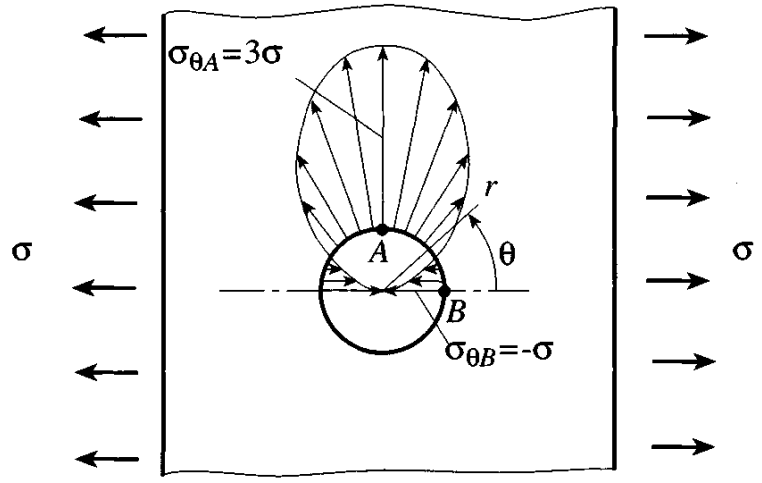


Figura 1.16: Tensioni circonferenziali distribuite lungo il bordo del foro circolare in una piastra di dimensioni infinite

Consideriamo la sezione $I - I$ che attraversa la piastra passando attraverso il centro del foro e per il punto A (vedi fig. 1.15). Per i punti della sezione $I - I$, $\theta = \pi/2$ (oppure $\theta = 3/2\pi$) l'equazione (1.184) diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3}{2}\sigma\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}\sigma\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.189}$$

Dall'equazione (1.189) si puó osservare che lungo la sezione$I - I$ quando $r = a$, $\sigma_\theta = 3\sigma$, e che incrementando r, σ_θ decresce. Si avrá quindi per un valore di r abbastanza elevato la tendenza dello stato tensionale ad uniformarsi. Dall'equazione (1.189) si puó dedurre che per un singolo foro lo stato tensionale é abbastanza localizzato. Infatti, per esempio, ponendo $r = 5a$, σ_θ decrescerá al valore di 1.02σ. Quindi a distanze superiori di $5a$ dal centro il campo di tensioni si potrebbe considerare quasi uniformemente distribuito.

Allo stesso modo considerando la sezione $II - II$ di figura (1.15) e effettuando un ragionamento del tutto analogo a quello appena fatto é possibile ricavare lo stato di sforzo. Quindi dall' equazione (1.184) con $\theta = 0$ (oppure $\theta = \pi$),

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2}\sigma\left(2 - \frac{5a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.190}$$

La figura (1.17) mostra la distribuzione di σ_θ lungo la sezione $I - I$ e la distribuzione di σ_r lungo la sezione $II - II$. Si nota che lungo la sezione $II - II$, $\sigma_r \leq \sigma$ e tende a asintoticamente a tale valore. Si nota anche che il gradiente delle tensioni lungo la sezione $II - II$ é piú basso rispetto alla sezione $I - I$. Per esempio nella sezione $II - II$ quando $r = 11a$,

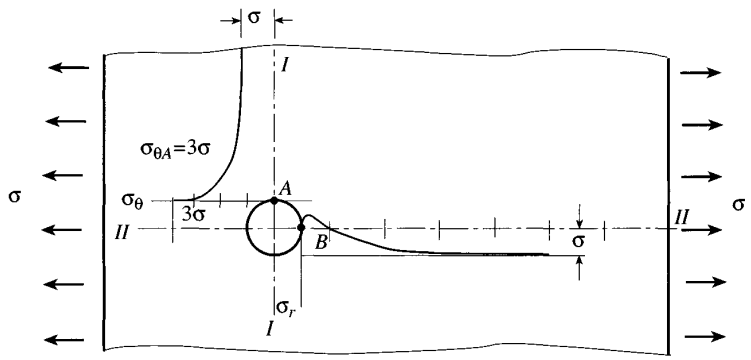


Figura 1.17: Distribuzioni di σ_θ lungo la sezione $I - I$ e di σ_r lungo la sezione $II - II$

$\sigma_r = 0.98\sigma$ oppure $\sigma - \sigma_r = 2\%$. Per contro é stato visto che lungo la sezione $I - I$ quando $r = 5a$, σ_θ raggiunge σ con uno scarto del 2%.

Per la valutazione dello *Stress concentration factor* in un piastra di dimensione finita bisogna fare riferimento alla figura (1.18) per $d/h \leq 0.5$

(Holland 1929-30). Da tale grafico é possibile riscrivere la formula di K_{tg} ("stress concentration factor with the nominal stress based on gross area") utilizzata per i calcoli successivi:

$$K_{tg} = 0.284 + \frac{2}{1 - \frac{d}{H}} - 0.600\left(1 - \frac{d}{H}\right) + 1.32\left(1 - \frac{d}{H}\right)^2 \tag{1.191}$$

Si nota che quando $d/H \longrightarrow 0$, $K_{tg} \longrightarrow 3$, ovvero il caso di piastra di dimensione infinita descritta sopra.

1.6.2 Soluzione numerica

1.6.2.1 Geometria

La struttura studiata é una piastra 2D con un foro circolare al centro di raggio $r = 50\,mm$, la base e l'altezza della piastra sono $H = 1000\,mm$ come mostra la figura (1.19),

1.6.2.2 Proprietá dei materiali

Modulo di Young: $E = 1\ MPa$
Coefficiente di Poisson: $\nu = 0$

1.6.2.3 Carichi e vincoli

Si applicherá sui lati paralleli all'asse y una tensione di trazione mono-assiale uniformemente distribuita (vedi fig. 1.19),

$$\sigma = 1\ N/mm$$

I moti rigidi sono stati bloccati attraverso i punti pt_1, pt_2 e pt_3 (vedi fig. 1.19),

$$\begin{array}{lcl} pt_1 & \longrightarrow & dy = 0 \\ pt_2 & \longrightarrow & dx = 0 \\ pt_3 & \longrightarrow & dy = 0 \end{array}$$

1.6.2.4 Caratteristiche della mesh

Per la struttura é stata creata una mesh composta da elementi triangolari per un totale di 1743148 elementi con un infittimento nella zona intorno al foro di diametro pari a $300\,mm$.

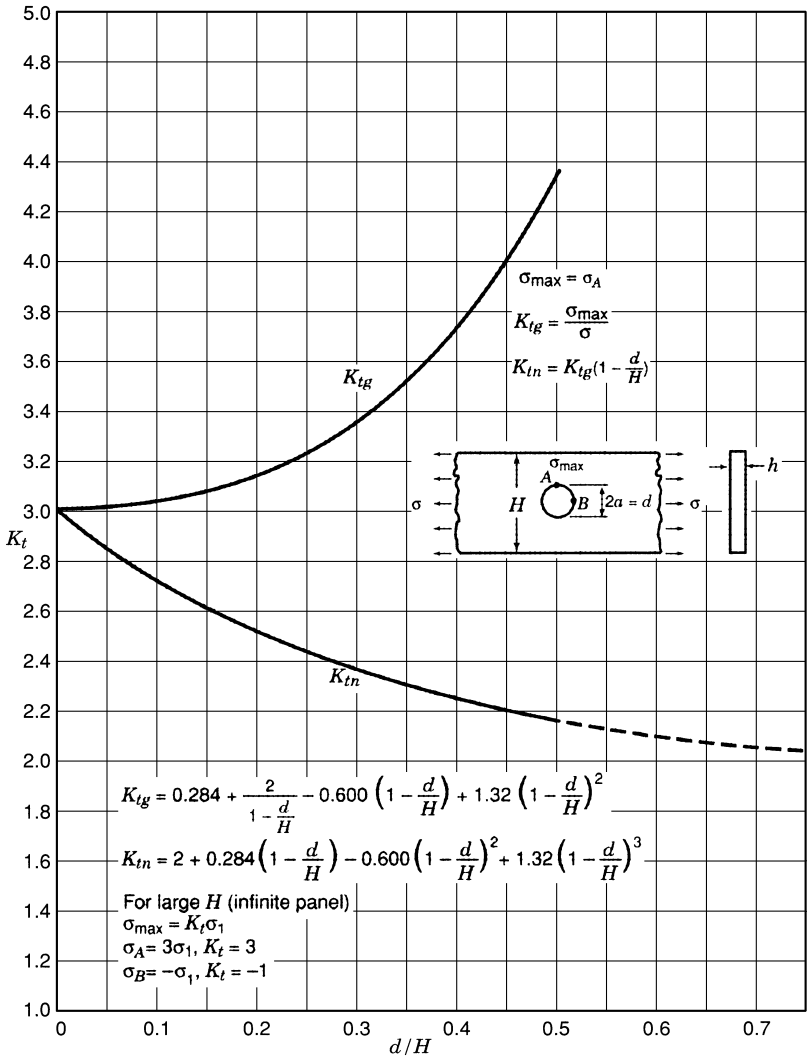


Figura 1.18: Stress concentration factors K_{tg} e K_{tn} per una piastra di dimensioni finite soggetta ad una tensione σ di trazione con foro circolare (Howland 1929-30)

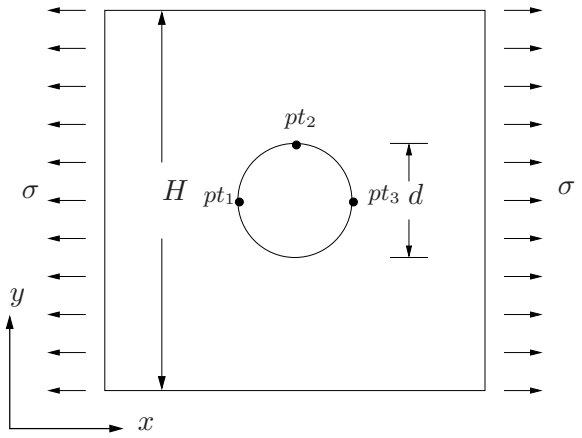


Figura 1.19: Piastra con foro circolare al centro

1.6.2.5 Soluzione del problema

Con riferimento alla figura (1.18) e all'equazione (1.191) qui di seguito riportata é stato trovato lo *stress concentration factor* nel punto A di figura (1.18),

$$\begin{aligned} K_{tg} &= 0.284 + \frac{2}{1-\frac{d}{H}} - 0.600\left(1-\frac{d}{H}\right) + 1.32\left(1-\frac{d}{H}\right)^2 \\ &= 0.284 + \frac{2}{1-0.1} - 0.600\,(1-0.1) + 1.32\,(1-0.1)^2 \\ &= 3.03542 \end{aligned} \tag{1.192}$$

Essendo $d/h = 100/1000 = 0.1$.

1.6.2.6 Risultati ottenuti e confronto

I risultati ottenuti con il software Code Aster sono mostrati nelle figure (1.20,1.21). Il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica é mostrato nella seguente tabella,

Analitico	Numerico	Differenza [%]
3.03542	3.08625	1.675

Tabella 1.1: Confronto della soluzione numerica rispetto alla soluzione analitica

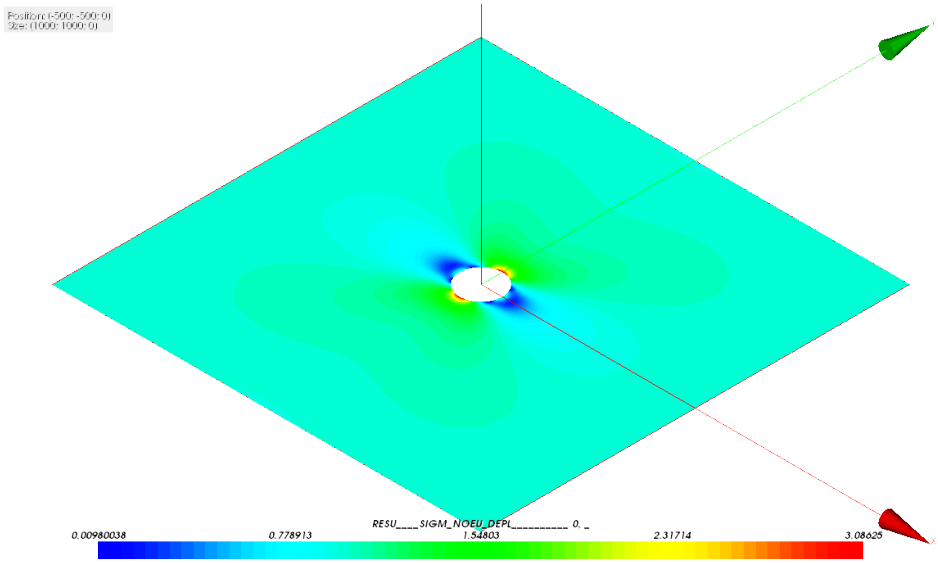


Figura 1.20: Scalar map ottenuta attraverso il codice di calcolo Code Aster

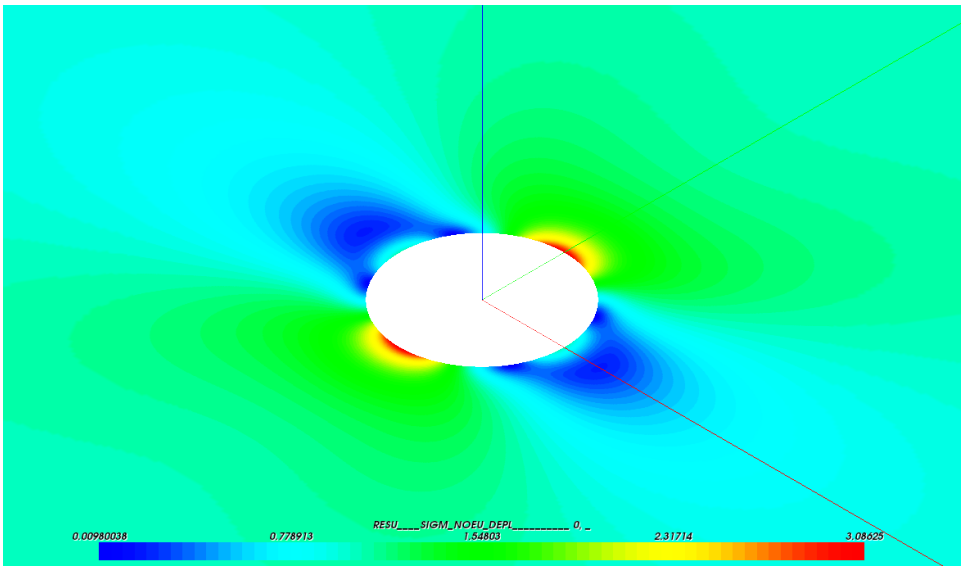


Figura 1.21: Scalar map ottenuta attraverso il codice di calcolo Code Aster

1.7 Esempio 2: Singolo foro ellittico in una piastra di dimensioni infinite e finite soggetta a tensione mono-assiale

1.7.1 Soluzione analitica

Verranno definite le componenti di tensione in coordinate ellittiche σ_α e σ_β come mostrate nella figura (1.22). La distribuzione elastica delle tensioni nel caso di una piastra di dimensioni infinite con foro ellittico al centro soggetta ad una tensione mono-assiale é stata determinata da Inglis (1913) e Kolosoff (1910). Sul contorno del foro ellittico, la somma delle componenti σ_α e σ_β é data dalla formula (Inglis 1913)

$$(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)_{\alpha_0} = \sigma \frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 + e^{2\alpha_0} \cos 2\beta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \tag{1.193}$$

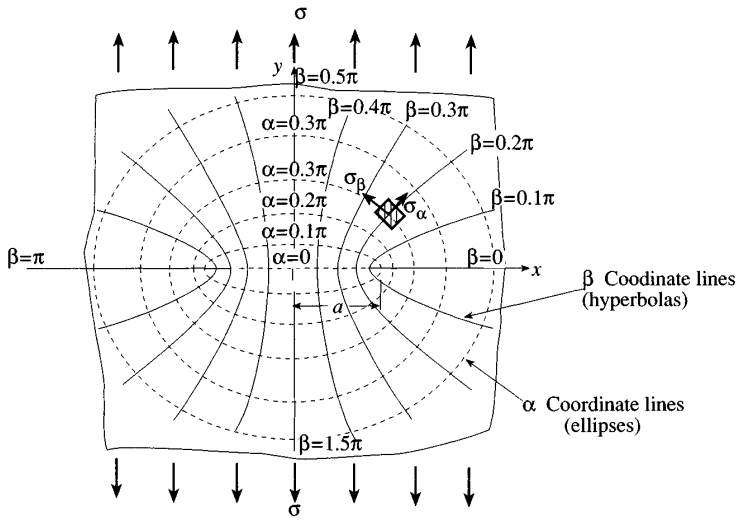


Figura 1.22: Piastra di dimensioni infinite soggetta ad uno stato di tensione mono-assiale σ: coordinate ellittiche e componenti di tensione

Dal momento che la tensione σ_α é uguale a zero lungo il bordo del foro ($\alpha = \alpha_0$), l'equazione (1.193) diventa

$$(\sigma_\beta)_{\alpha_0} = \sigma \frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 + e^{2\alpha_0} \cos 2\beta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \tag{1.194}$$

Il massimo valore di $(\sigma_\beta)_{\alpha_0}$ si ha per $\beta = 0\,,\,\pi$, ovvero all'estremitá dell'asse maggiore dell'ellisse (punto A, figura 1.23),

$$\begin{aligned}(\sigma_\beta)_{\alpha_0,\beta=0} &= \sigma\frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 + e^{2\alpha_0}}{\cosh 2\alpha_0 - 1} \\ &= \sigma(1 + 2\coth 2\alpha_0) = \sigma\left(1 + \frac{2a}{b}\right)\end{aligned} \tag{1.195}$$

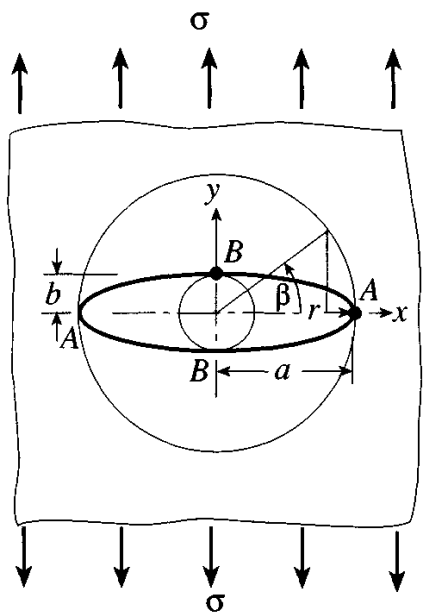


Figura 1.23: Piastra di dimensioni infinite soggetta ad uno stato di tensione mono-assiale σ: notazione

Dall'equazione (1.194) nel punto B si avrá, figura (1.23),

$$\begin{aligned}(\sigma_\beta)_{\alpha_0,\beta=\pi/2} &= \sigma\frac{\sinh 2\alpha_0 - 1 - e^{2\alpha_0}}{\cosh 2\alpha_0 + 1} \\ &= \sigma\frac{-(\cosh 2\alpha_0 + 1)}{\cosh 2\alpha_0 + 1} = -\sigma\end{aligned} \tag{1.196}$$

Lo stress concentration factor per il caso di piastra infinitamente estesa é

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{(\sigma_\beta)_{\alpha_0,\beta=0}}{\sigma} = \frac{\sigma[1 + (2a/b)]}{\sigma} = 1 + \frac{2a}{b} \tag{1.197}$$

oppure

$$K_{tg} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}} \tag{1.198}$$

Dove r é il raggio di curvatura dell'ellisse al punto A (figura 1.23).
Si nota che se $b = a$, $K_{tg} = 3$ e l'equazione (1.197) mostra lo stesso risultato ottenuto per il caso di foro circolare in una piastra infinitamente estesa.
La figura (1.24) mostra l'andamento della K_{tg} facendo uso della (1.197).

Per una piastra di dimensioni finite con foro ellittico soggetta ad una tensione mono-assiale di trazione perpendicolare all'asse maggiore dell'ellisse, il valore della concentrazione delle tensioni K_t e lo *stress concentration factor* K_{tg} sono mostrati dalla figura (1.25).
Nello stesso grafico sono presenti le formule che verranno utilizzate in seguito per calcolare i risultati analitici del problema studiato.

1.7.2 Soluzione numerica

1.7.2.1 Geometria

La struttura studiata é una piastra 2D con un foro ellittico al centro di raggio maggiore, parallelo all'asse y, $a = 80\,mm$, raggio minore $b = 10\,mm$. La base e altezza della piastra sono pari a $H = 800\,mm$ come mostra la figura (1.26),

1.7.2.2 Proprietá dei materiali

Modulo di Young: $E = 1\ MPa$
Coefficiente di Poisson: $\nu = 0$

1.7.2.3 Carichi e vincoli

Si applicherá sui lati paralleli all'asse y, i quali sono anche paralleli al raggio maggiore del foro a, una tensione di trazione uniformemente distribuita (vedi fig. 1.26),

$$\sigma = 1\ N/mm$$

I moti rigidi sono stati bloccati attraverso i punti pt_1, pt_2 e pt_3 (vedi fig. 1.26),

$$\begin{array}{lcl} pt_1 & \longrightarrow & dy = 0 \\ pt_2 & \longrightarrow & dx = 0 \\ pt_3 & \longrightarrow & dy = 0 \end{array}$$

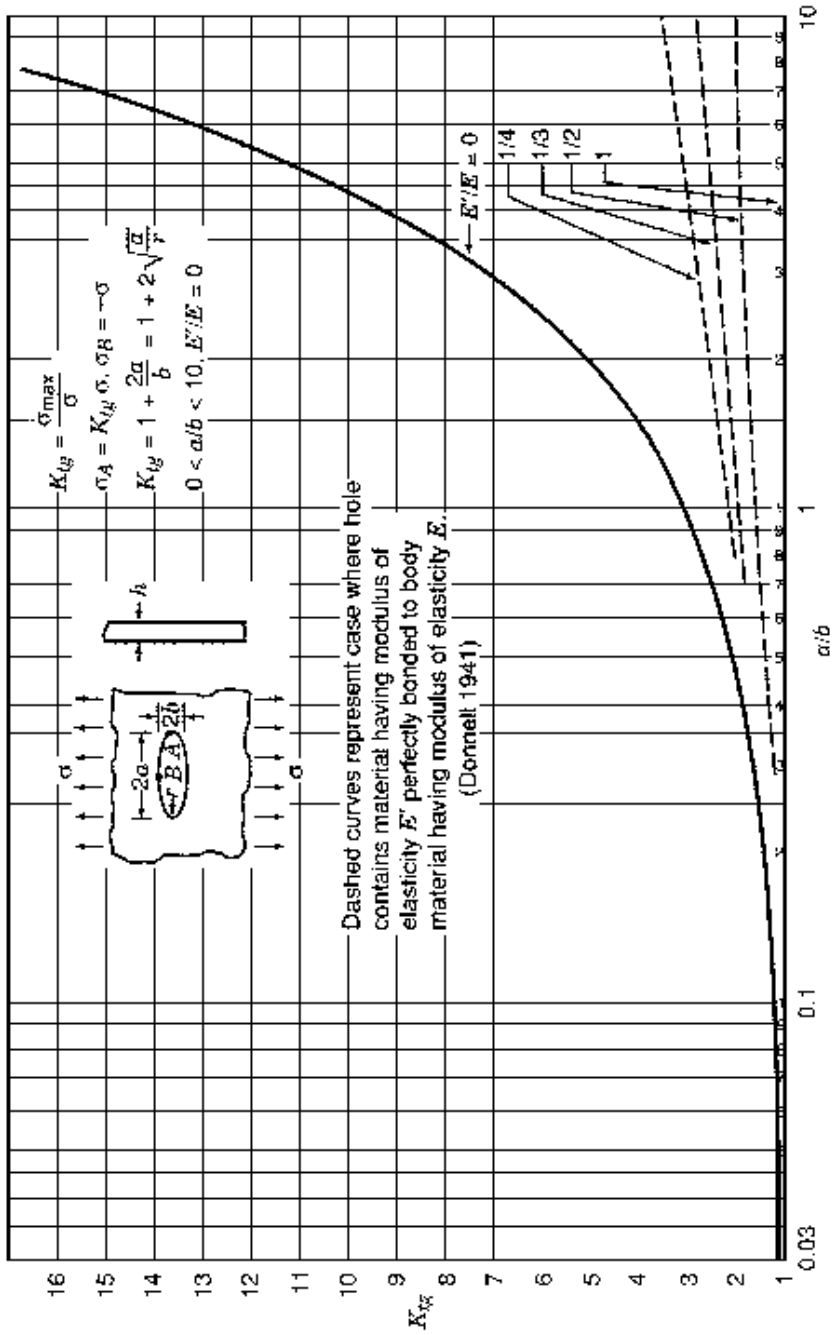


Figura 1.24: Stress concentration factor K_{tg} per una piastra di dimensioni infinite con foro ellittico al centro soggetta ad una tensione mono-assiale σ (Kolosoff 1910; Inglis 1913)

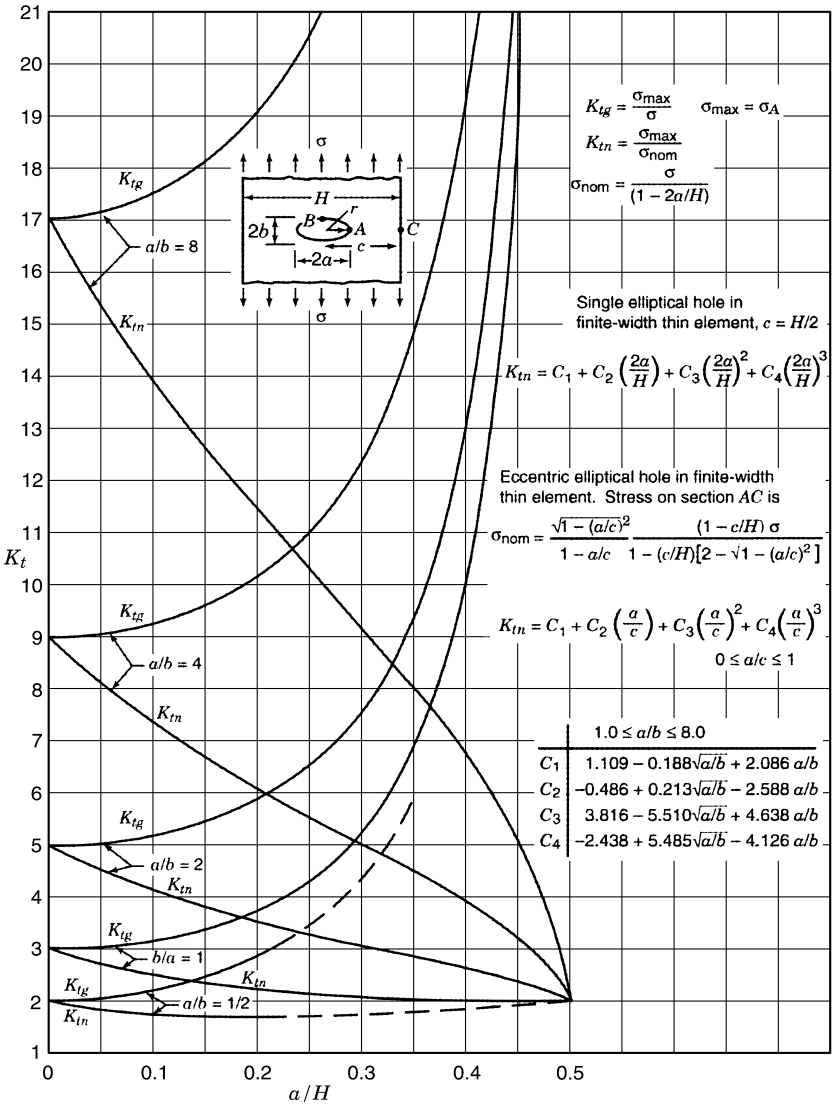


Figura 1.25: Stress concentration factors K_{tg} e K_{tn} per una piastra di dimensioni finite con foro ellittico al centro soggetta ad una tensione mono-assiale σ (Isida 1953, 1955b)

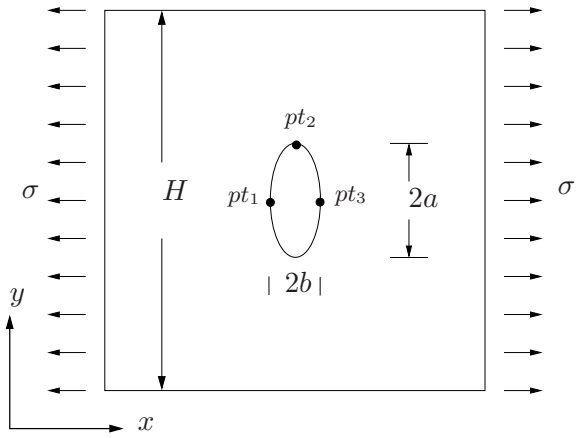


Figura 1.26: Piastra con foro ellittico al centro

1.7.2.4 Caratteristiche della mesh

Per la struttura é stata creata una mesh composta da elementi triangolari per un totale di 1142542 elementi con un infittimento nella zona intorno al foro di raggio maggiore pari a $300\,mm$ e raggio minore pari a $100\,mm$.

1.7.2.5 Soluzione del problema

Con riferimento alla figura (1.25) e alle equazioni qui di seguito riportate é stato trovato lo *stress concentration factor* K_{tg} nel punto A di figura (1.25),

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} \qquad \sigma_{max} = \sigma_a \tag{1.199}$$

$$\begin{aligned} K_{tn} &= \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \\ K_{tn} &= C_1 + C_2\left(\frac{2a}{H}\right) + C_3\left(\frac{2a}{H}\right)^2 + C_4\left(\frac{2a}{H}\right)^3 \end{aligned} \tag{1.200}$$

e per $1 \leq a/b \leq 8$ sono valide le seguenti formule, ricordando che nel caso studiato $a/b = 80/10 = 8$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.109 - 0.188\sqrt{a/b} + 2.086\,a/b = 17.26526 \\ C_2 &= -0.486 + 0.213\sqrt{a/b} - 2.588\,a/b = -20.58755 \\ C_3 &= 3.816 - 5.510\sqrt{a/b} + 4.368\,a/b = 23.17537 \\ C_4 &= -2.438 + 5.485\sqrt{a/b} - 4.126\,a/b = -19.93208 \end{aligned} \tag{1.201}$$

Dalla seconda delle (1.200) e ricordando che per il caso in esame si ha $a/H = 80/800 = 0.1$, si trova che $K_{tn} = 13.91530$. Ed essendo

$$\sigma_{nom} = \frac{\sigma}{1 - 2(a/H)} = \frac{1}{1 - 0.2} = 1.25 \ N/mm \tag{1.202}$$

Dalla prima delle (1.200) si trova che

$$\sigma_{max} = K_{tn}\sigma_{nom} = 13.91530 \cdot 1.25 = 17.39413 \ N/mm \tag{1.203}$$

da cui

$$K_{tg} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{17.39413}{1} = 17.39413 \tag{1.204}$$

1.7.2.6 Risultati ottenuti e confronto

I risultati ottenuti attraverso il software Code Aster sono mostrati nelle figure (1.27,1.28). Il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica é mostrato nella seguente tabella,

Analitico	Numerico	Differenza [%]
17.39413	17.12422	-1.552

Tabella 1.2: Confronto della soluzione numerica rispetto alla soluzione analitica

1.8 Meccanica della Frattura Elastoplatica (EPFM)

Sotto le assunzioni fatte nella meccanica della frattura lineare elastica (LEFM), le tensioni all'estremitá della fessura sono teoricamente infinite. Conseguentemente, essa usualmente conduce a soluzioni conservative e dispendiose che non tengono in conto della plastificazione all'estremitá della fessura. Da un punto di vista fisico, comunque, nessun materiale é in grado di resistere a delle tensioni infinite e una zona plastica dovrá formarsi intorno all'estremitá della fessura. Come risultato sará richiesta un'estensione alla frattura duttile o alla meccanica della frattura elastoplastica (EPFM).

In questo capito verrá discusso prima il problema riguardante le dimensioni della zona plastica, utilizzando vari livelli di approssimazione. Dopo verranno discussi i concetti del *crack opening displacement* (COD) e del *J integral*. Teoricamente, i modelli possono essere estesi a modelli plastici piú sofisticati per la simulazione del comportamento non lineare del materiale attorno all'estremitá della fessura.

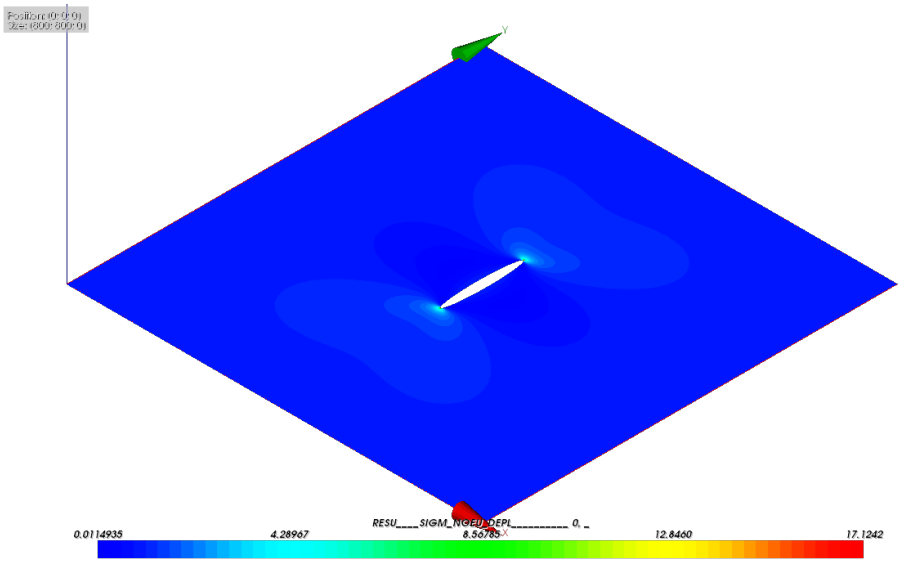


Figura 1.27: Scalar map ottenuta attraverso il codice di calcolo Code Aster

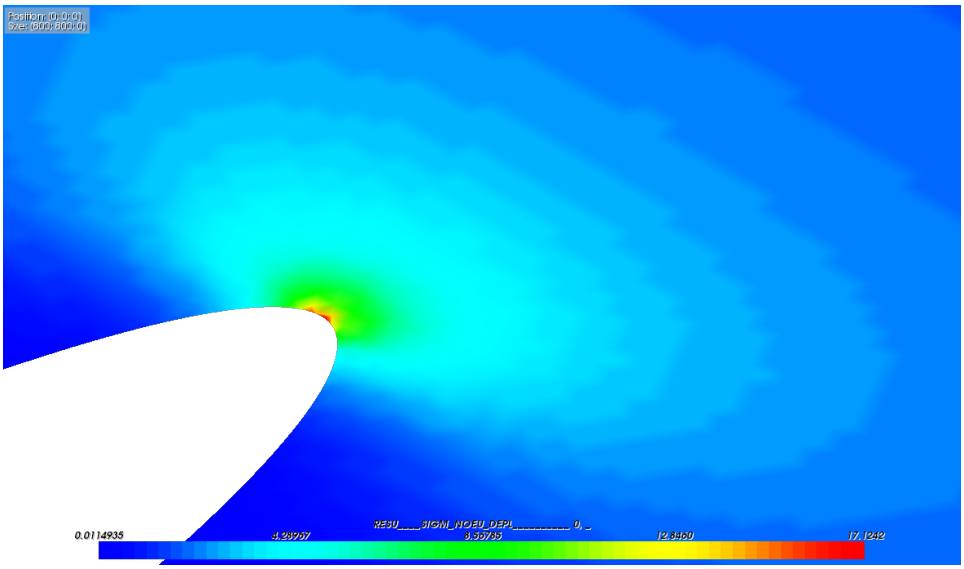


Figura 1.28: Scalar map ottenuta attraverso il codice di calcolo Code Aster

1.8.1 Zona plastica

1.8.1.1 Criterio del primo ordine con tensione mono-assiale

Qui verrá considerato solamente lo stato di tensione mono-assiale normale all'asse della fessura. La piú semplice stima della dimensione della zona plastica é ottenuta uguagliando la tensione mono-assiale σ_{yy} alla tensione di snervamento σ_{yld}. Ricordando l'equazione (1.66) (per un problema piano di sforzo),

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.205}$$

la dimensione della zona plastica, $r = r_p$, puó essere ottenuta a $\theta = 0$,

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p}} = \sigma_{yld} \tag{1.206}$$

oppure in termini di *stress intensity factor*, $K_I = \sigma_0\sqrt{\pi a}$

$$r_p = \frac{1}{2\pi}\frac{K_I^2}{\sigma_{yld}^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{yld}}\right)^2 \tag{1.207}$$

Similmente, la dimensione per la zona plastica per il modo II per i problemi di tensione piana e deformazione piana puó essere ottenuta da:

$$r_p = \frac{3}{2\pi}\frac{K_{II}^2}{\sigma_{yld}^2} \tag{1.208}$$

Il problema principale con questa approssimazione é che vengono ignorati tutti gli sforzi maggiori di σ_{yld} (Figura 1.29a). Di conseguenza, l'equilibrio non é piú soddisfatto.

1.8.1.2 Criterio del secondo ordine con tensione mono-assiale

In un approccio alternativo per evitare di violare le equazioni di equilibrio, Irwin (1960) sviluppó un'approssimazione del secondo ordine per la zona plastica basato sulla ridistribuzione che si verifica all'estremitá della fessura. In questo modello, l'area sotto la curva delle tensioni che veniva eliminata nell'approccio di primo ordine, é ridistribuita per soddisfare l'equilibrio richiesto (Figura 1.29b),

$$\int_0^{r_p} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = (r_p + \delta)\sigma_{yld} \tag{1.209}$$

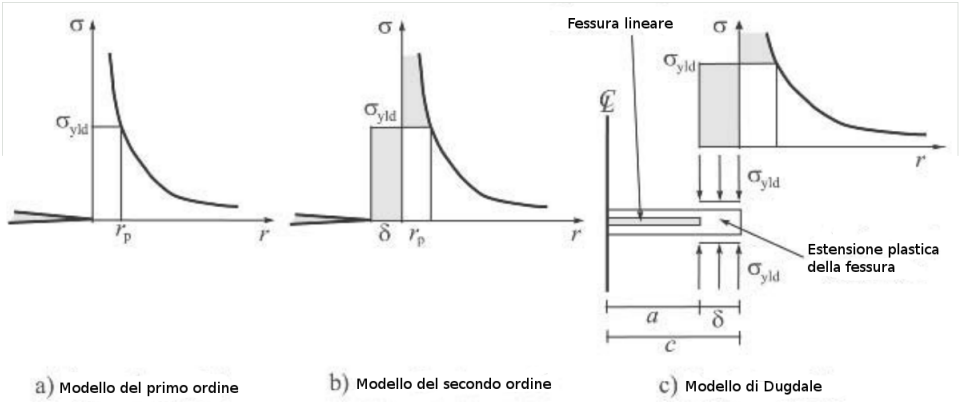


Figura 1.29: **Approssimazione del primo e del secondo ordine della zona plastica e modello di Dugdale.**

La soluzione finale é poi ottenuta come:

$$\delta = r_p = \frac{1}{\pi}\frac{K_I^2}{\sigma_{yld}^2} = a\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{yld}}\right)^2 \tag{1.210}$$

implicando che che la dimensione del secondo ordine é due volte la dimensione del primo ordine. Cosí, la soluzione del primo ordine r_p (equazione 1.208) puó ancora essere usata con una lunghezza effettiva della fessura di $a + r_p$ estendendo al centro della zona plastica. Cosí

$$K_I = \sigma_0\sqrt{\pi(a + r_p)} \tag{1.211}$$

1.8.1.3 Criterio di Dugdale

Un'altra alternativa per soddisfare le equazioni di equilibrio fu proposta da Dugdale (1960) basata sull'assunzione di sostituire la lunghezza fisica attuale ($2a$) da una lunghezza effettiva totale della fessura $2c$, dove $c = a + \delta$ (Figura 1.29c). Dugdale assunse che una costante chiusa di tensione σ_{yld} é applicata sopra la lunghezza δ, causando un K_{yld} negativo. Come risultato, il modello combinato richiede allo *stress intensity factor* totale di annullarsi: $K_{combinato} = K + K_{yld} = 0$, determinando la lunghezza c o δ.

Utilizzando l'approccio di Westergaard, la soluzione per c si ottiene da:

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_0}{\sigma_{yld}}\right) \tag{1.212}$$

Poi, applicando l'espansione di Taylor e trascurando i termini di ordine superiore si trova (per tensione piana):

$$r_p = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{yld}}\right)^2 a = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I}{\sigma_{yld}}\right)^2 \tag{1.213}$$

e per deformazione piana,

$$r_p = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_I}{\sqrt{3}\sigma_{yld}}\right)^2 \tag{1.214}$$

1.8.1.4 Criterio di snervamento multi-assiale del primo ordine

In questa sezione l'idea della zona plastica é estesa alle condizioni multi-assiali del primo ordine che includono altri punti oltre $\theta = 0$. L'idea é di assumere che lo snervamento dovrebbe verificarsi quando la tensione effettiva σ_{eff} calcolata da ogni criterio di snervamento raggiunge σ_{yld}.

Per fornire una semplice soluzione esplicita, il criterio di snervamento di Von Mises é considerato:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \tag{1.215}$$

dove le tensioni principali σ_1, σ_2 e σ_3 sono relazionate a K_I attraverso le equazioni (1.65)-(1.67). La dimensione della zona plastica $r_p(\theta)$ puó essere valutata per i problemi di deformazione piana come:

$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{K_I}{\sigma_{yld}^2}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta + (1-2\nu)^2(1+\cos\theta)\right] \tag{1.216}$$

e una dimensione molto piú larga per le condizioni di tensione piana:

$$r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{K_I}{\sigma_{yld}^2}\left[1 + \frac{3}{2}\sin^2\theta + \cos\theta\right] \tag{1.217}$$

1.8.2 Crack tip opening displacements (CTOD)

Con un approccio totalmente differente, un criterio locale basato sul concetto di crack tip opening displacements (CTOD) é stato proposto per considerare il comportamento elastoplastico intorno al fondo della fessura (Cottrell 1961, Wells 1963). In LEFM e fratture fragili, sono considerate fessure sottili e il

CTOP é sempre pari a zero. In contrasto, CTOD non é trascurabile nelle fratture duttili e nella meccanica della frattura elastoplastica dovuto questo alle grandi deformazioni e allo smussarsi della fessura (Figura 1.30).

Similmente al metodo per determinare la dimensione della zona plastica, sono disponibili due approcci: del primo e del secondo ordine.

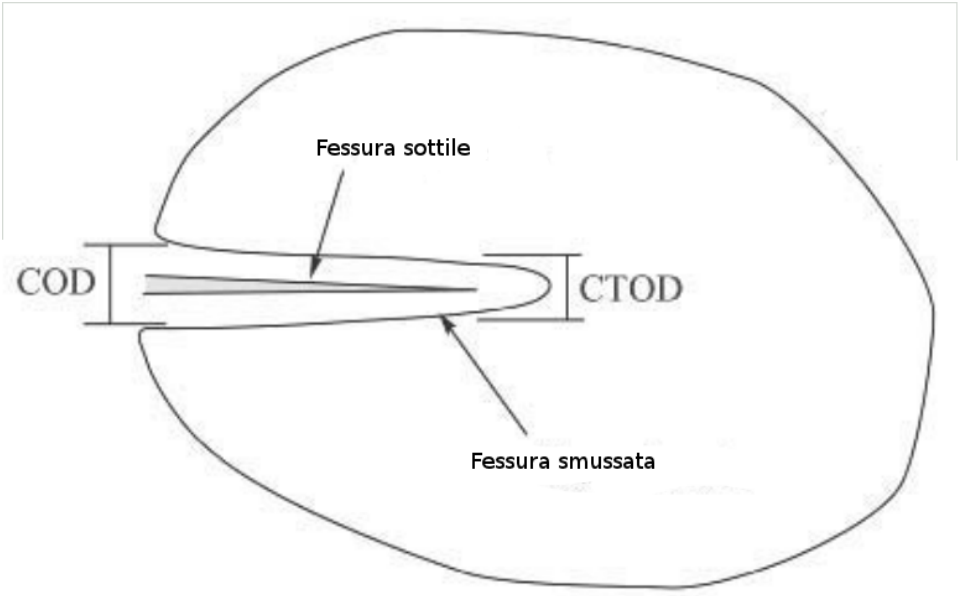


Figura 1.30: **Stima del CTOP.**

1.8.2.1 CTOP del primo ordine

La soluzione del primo ordine per il CTOP é basata sulla soluzione di Irwin per lo spostamento verticale in modo I di un punto successivo alla punta della fessura, come mostra la Figura 1.30.

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu}\left[\frac{r}{2\pi}\right]^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\left[\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{1.218}$$

Sostituendo $\theta = \pm\pi$ si ha la valutazione dell'apertura del fondo della fessura (COD) ad una distanza r:

$$COD = 2u_y = \frac{\kappa+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tag{1.219}$$

Per $r = r_p$, dove r_p é la zona plastica di Irwin, l'apertura finale del fondo della fessura (CTOP) stimata é:

$$CTOP = \frac{4}{\pi}\frac{K_I^2}{E\sigma_{yld}} \tag{1.220}$$

1.8.2.2 CTOP del secondo ordine

La formulazione del CTOP del secondo ordine é basata sull'applicazione del modello del secondo ordine di Dugdale lungo la fessura per la determinazione di COD (Kanninen 1984):

$$u_y(x) = \frac{2}{\pi}\frac{a\sigma_{yld}}{E}\left\{\log\left\|\frac{e+\sqrt{c^2-x^2}}{e-\sqrt{c^2-x^2}}\right\| + \frac{x}{a}\log\left\|\frac{xe+a\sqrt{c^2-x^2}}{xe-a\sqrt{c^2-x^2}}\right\|\right\} \tag{1.221}$$

con $e^2 = c^2 - a^2$. L'equazione (1.221) é ulteriormente semplificabile per $x = a$

$$u_y(a) = \frac{4}{\pi}\frac{a\sigma_{yld}}{E}\log\frac{c}{a} \tag{1.222}$$

Usando l'equazione (1.212) si trova che:

$$CTOD = 2u_y = \frac{8}{\pi}\frac{a\sigma_{yld}}{E}\log\left[\sec\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}\right] \tag{1.223}$$

e l'adozione di uno sviluppo in serie porta a:

$$CTOD = \frac{K^2}{E\sigma_{yld}}\left[1 + \frac{\pi^2}{24}\frac{\sigma^2}{\sigma_2^{yld}} + \cdots\right] \tag{1.224}$$

Richiamando la definizione di aliquota di energia rilasciata come $G = K^2/E'$, puó essere fatta la seguente approssimazione:

$$CTOD = \frac{G}{\sigma_{yld}} \tag{1.225}$$

1.8.3 Integrale J

In un lavoro pionieristico, Eshelby (1956, 1974) definí vari integrali al contorno i quali erano indipendenti dal percorso in base al teorema di conservazione dell'energia. Questo fu realizzato mentre egli stava studiando le dislocazioni

nel dominio elastico, ed egli non realizzó la loro importanza o applicazione nella meccanica della frattura. Furono Rice e Rosengren (1968) a notare l'importanza del *J integral* come un criterio per la propagazione della fessura in meccanica della frattura. L'indipendenza del percorso del *J integral* permette anche la valutazione dell'aliquota del rilascio lineare e non lineare dell'energia e il lavoro lontano dal fondo della fessura.

Viene prima considerato il problema senza forze di volume e trazione della fessura ($f^b = f^c = 0$). La forma bidimensionale di uno di questi integrali puó essere scritta come:

$$J = \oint_{\Gamma} \left(W_s dy - t \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right) \tag{1.226}$$

$$W_s = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \tag{1.227}$$

é la densitá di energia deformativa, Γ é un contorno chiuso preso in senso antiorario, $d\Gamma$ é l'elemento differenziale dell'arco lungo il percorso Γ, $t = \sigma n$ é il vettore di trazione su di un piano definito dal vettore normale alla superficie n, e u é il vettore spostamento (Figura 1.31a).

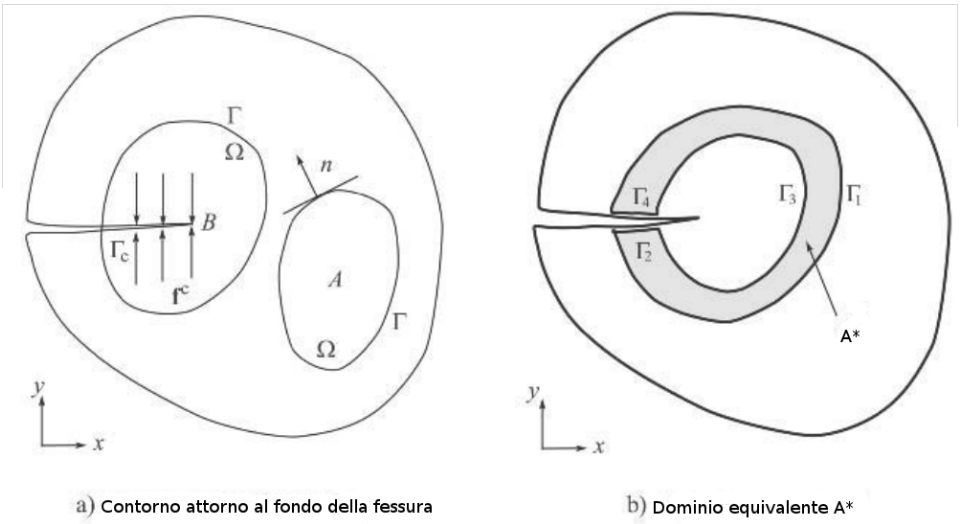


Figura 1.31: **Definizione del *J integral* nell'intorno della fessura e dominio equivalente A*.**

Per elaborare l'indipendenza del *J inegral* per i problemi della fessura, si puó considerare un corpo nello stato di equilibrio con un gradiente continuo di tensioni e spostamenti, come mostrato in Figura 1.31. Per questo corpo,

l'equazione (1.226) é uguale a zero per ogni contorno chiuso: $J = 0$. Con riferimento alla Figura 1.31b, un percorso chiuso $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ é stato costruito, dove Γ_1 e Γ_3 sono contorni arbitrari, e Γ_2 e Γ_4 sono posizionati sulle facce opposte della fessura libera in trazione:

$$J = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_3} + J_{\Gamma_4} = 0 \tag{1.228}$$

I contributi a J da Γ_2 e Γ_4 spariscono perché sia dy che t_i sono zero su Γ_2 e Γ_4.

$$J = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_3} = 0 \tag{1.229}$$

Si puó concludere che il valore assoluto del J *integral* valutato su di un percorso arbitrario Γ_1 e Γ_3 resta identico. Come risultato, se un contorno inizia da una superficie della fessura e termina nell'altra faccia, esso puó essere usato per determinare il J *integral*.

Selezionare la forma e la dimensione di un appropriata curva di contorno per un problema specifico richiede studi numerici complementari. Praticamente, essi dovrebbero essere relazionati alla geometria della fessura e al modello agli elementi finiti, come verrá discusso nella seguente sezione.

Puó essere mostrato che quando J é applicato lungo un contorno intorno al fondo della fessura, esso rappresenta il cambio in energia potenziale per un'estensione di una fessura virtuale da. L'energia potenziale totale di un dominio bidimensionale includendo una fessura libera in trazione che é circondata da una curva di contorno Γ sotto condizioni quasi-statiche e in assenza di forze di corpo puó essere definita come:

$$\Pi = \int_\Omega W_s d\Omega - \int_\Gamma t_i u_i d\Gamma \tag{1.230}$$

Per un'estensione virtuale della fessura da, il cambio in energia potenziale é:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_\Omega \frac{dW_s}{da} d\Omega - \oint_\Gamma \left[t_i \frac{du_i}{da} + \frac{dt_i}{da} u_i \right] d\Gamma \tag{1.231}$$

Applicando il teorema della divergenza ed ottimizzando i termini in zero, risulta

$$-\frac{d\Pi}{da} = \oint \left(W_s dy - t \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right) \tag{1.232}$$

la quale é simile all'equazione (1.226), di qui

$$J = -\frac{d\Pi}{da} \tag{1.233}$$

Questo é equivalente alla definizione di energia della frattura rilasciata per un materiale lineare elastico, $-\partial\Pi/\partial a = G$,

$$J = G \tag{1.234}$$

L'equazione (1.233) puó anche essere utilizzata per definire l'aliquota di energia rilasciata per un'estensione unitaria della fessura in un materiale elastico non lineare.

1.8.4 Campo plastico nel fondo della fessura

Per illustrare come il concetto di J *integral* puó essere utilizzato nelle analisi non lineari, un tipico problema elasto-plastico basato sulla legge di Ramberg-Osgood é stato considerato (Hutchinson 1968,1990),

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{yld}} = \frac{\sigma}{\sigma_{yld}} + k_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}\right)^n \tag{1.235}$$

dove n é l'esponente di indurimento, k_0 é una costante adimensionale. Trascurando la deformazione elastica nelle vicinanze del fondo della fessura,

$$\epsilon(r) = \frac{k_1}{r^{\frac{n}{n+1}}} \qquad \sigma(r) = \frac{k_2}{r^{\frac{1}{n+1}}} \tag{1.236}$$

o

$$\epsilon_{ij} = k_3 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{1.237}$$

$$\sigma_{ij} = k_4 \left(\frac{J}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{1.238}$$

dove i coefficienti K_i sono costanti. La relazione tra J e lo spostamento del fondo della fessura, i campi di deformazioni e di tensioni puó essere espressa come:

$$u_i = k_0 \epsilon_{yld} r \left(\frac{J}{k_0 \sigma_{yld} \epsilon_{yld} I_n r}\right)^{\frac{n}{n+1}} \overline{u}_i(\theta, n) \tag{1.239}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{yld} \left(\frac{EJ}{k_0 \sigma_{yld}^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \overline{\sigma}_{ij}(\theta, n) \tag{1.240}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{k_0 \sigma_{yld}}{E} \left(\frac{EJ}{k_0 \sigma_{yld}^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \overline{\epsilon}_{ij}(\theta, n) \tag{1.241}$$

dove I_n é un'integrazione costante la quale dipende dalla curva sforzi-deformazioni e $\overline{\sigma}$ e $\overline{\epsilon}$ sono funzioni geometriche adimensionali di n e θ.

1.8.5 Generalizzazione di J

La definizione originale di J puó essere rivista come la prima componente di un vettore piú generale indipendente dal percorso:

$$J_k = \int_\Gamma \left\{ W_s n_k - t \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\} d\Gamma \tag{1.242}$$

o semplicemente

$$J_1 = \int_\Gamma \left\{ W_s dy - t \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right\} \tag{1.243}$$

$$J_2 = \int_\Gamma \left\{ W_s dx - t \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma \right\} \tag{1.244}$$

La generalizzazione di J deve anche soddisfare la seguente relazione per l'estensione della fessura parallela e perpendicolare alla fessura (Hellen e Blackburn 1975)

$$J = J_1 - iJ_2 = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2 + 2iK_I K_{II}) \tag{1.245}$$

1.8.5.1 Effetto della trazione superficiale della fessura

Karlsson e Backlund (1978) estesero il concetto di J *integral* per tenere in conto gli effetti della trazione superficiale semplicemente estendendo la definizione del percorso di contorno per includere le superfici della fessura:

$$J = \int_\Gamma \left\{ W_s dy - t \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right\} - \int_{\Gamma_c} f^c \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \tag{1.246}$$

dove Γ_c é la porzione delle superfici tra i punti tra i due estremi di Γ e f^c é il vettore superficiale di trazione della fessura, come mostra la Figura 1.31a.

1.8.5.2 Effetto delle forze di volume

Nel caso di presenza di forze di volume, f^b, l'equazione di equilibrio puó essere scritta come:

$$\sigma_{ij,j} + f_i^b = 0 \tag{1.247}$$

e deve essere fatta una modifica al *J integral* (Atluri 1982):

$$J = \int_\Gamma \left\{ W_s dy - t\frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right\} - \int_\Omega f^b \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \tag{1.248}$$

1.9 Metodi Numerici sul *J integral*

L'equivalenza del *J integral* e di G nel contesto di LEMF permette permette di valutare J in accordo agli approcci discussi in precedenza sull'aliquota di energia rilasciata. Nel seguito di questa sezione, comunque, saranno presentati degli algoritmi diretti per la valutazione di J.

Molte simulazioni sono basate sulla diretta valutazione del *J integral*, le quali sono molto compatibili con la struttura del metodo agli elementi finiti. I risultati saranno poi utilizzati per determinare lo *stress intensity factor* e l'aliquota di energia rilasciata provenienti dai classici concetti di meccanica della frattura.

1.9.1 Soluzione nodale

Per primo si considera un caso piuttosto semplice dove le tensioni sono conosciute ai nodi, quindi la valutazione di J dovrebbe essere relativamente semplice (Figura 1.32a).

Si comincia con una modifica dell'equazione (1.243) per una fessura lungo la ξ in un problema di tensione piana:

$$J = \int_\Gamma W_s d\eta - \int_\Gamma t\frac{\partial u}{\partial \xi} d\Gamma \tag{1.249}$$

oppure

$$J = \int_\Gamma W_s d\eta - \int_\Gamma (\sigma_n, \sigma_t) \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_t}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\Gamma \tag{1.250}$$

dove

$$W_s = \frac{1}{2E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + \frac{1+2\nu}{E}(\sigma_{xy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}) \tag{1.251}$$

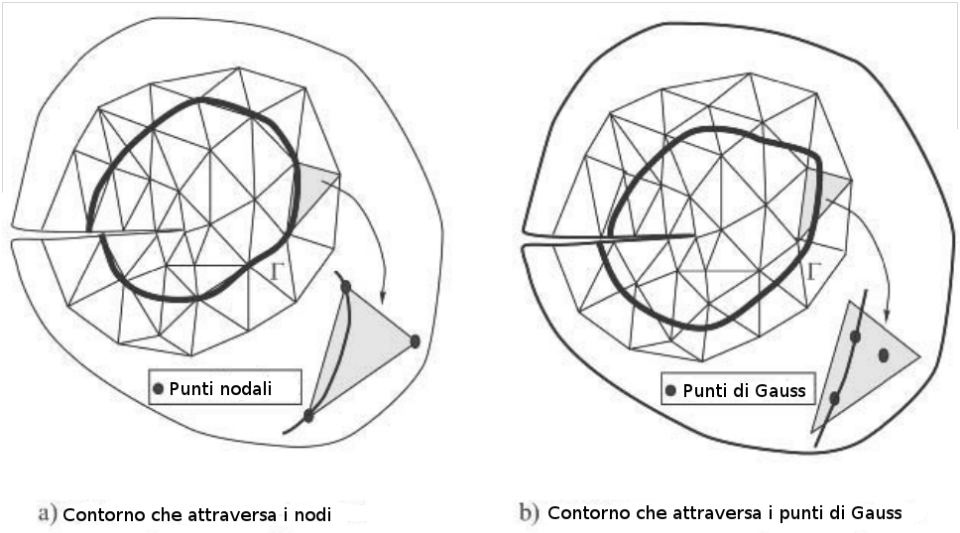


Figura 1.32: **Contorno del *J integral* passante attraverso i nodi degli elementi finiti o i punti di Gauss.**

$$\sigma_n = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta \tag{1.252}$$

$$\tau_t = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{1.253}$$

$$u_n = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta \tag{1.254}$$

$$u_t = -u_x\sin\theta + u_y\sin\theta\cos\theta \tag{1.255}$$

Il *J integral* puó essere calcolato dalla valutazione dei valori delle seguenti espressioni tra nodi adiacenti e conteggiando la somma totale attorno al contorno,

$$\begin{aligned} J = &\int w(\sin\theta dx + \cos\theta dy) \\ &- \int [\sigma_{xx}\epsilon_{xx}\cos\theta dy + \sigma_{xy}\epsilon_{yy}\sin\theta dy - \sigma_{xy}\epsilon_{xx}\cos\theta dx \\ &- \sigma_{yy}\epsilon_{yy}\sin\theta dy + \sigma_{xy}\epsilon_{xy}\cos\theta dy - \sigma_{xy}\epsilon_{xy}\sin\theta dx \\ &+ (\sigma_{xx}\sin\theta - \sigma_{xy}\cos\theta)du_n - (\sigma_{yy}\sin\theta + \sigma_{xy}\sin\theta)du_t] \end{aligned} \tag{1.256}$$

dove θ é l'angolo tra la normale al contorno e la direzione x ad ogni nodo.

1.9.2 Soluzione generale agli elementi finiti

Molti codici standard agli elementi finiti, comunque, forniscono solamente le tensioni ai punti di Gauss, quindi é necessaria molta cura per determinare il *J integral* lungo un percorso che passi attraverso a essi. Si consideri una fessura che sia posta lungo l'asse x come mostra la Figura 1.32b. Dalla definizione di J,

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_\Gamma \left(W_s dy - t \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right) \tag{1.257}$$

Definendo i vettori di spostamento e di trazione, la densitá dell'energia deformativa e la lunghezza dell'arco in termini delle specifiche del problema,

$$W_s = \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \tag{1.258}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \tag{1.259}$$

$$t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left[(\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] \tag{1.260}$$

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} d\eta \qquad (a\ d\xi = costante) \tag{1.261}$$

J risulta in

$$\begin{aligned} J = \int_\Gamma \Bigg\{ & \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & - \left[(\sigma_{xx} n_1 + \sigma_{xy} n_2) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_{yy} n_2) \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] \\ & \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2} \Bigg\} d\eta \end{aligned} \tag{1.262}$$

La valutazione dell'equazione (1.262) é fornita dalla regola di integrazione di Gauss lungo il contorno del percorso Γ:

$$J = \sum_{g=1}^{ng} W_g I_g(\xi_g, \eta_g) \tag{1.263}$$

dove W_g é il fattore peso di Gauss, ng é il numero di punti di integrazione e I_g é la funzione integranda valutata ad ogni punto di Gauss g:

$$\begin{aligned} I_g = \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left[\sigma_{xx}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & - \left[(\sigma_{xx}n_1 + \sigma_{xy}n_2)\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\sigma_{xy}n_1 + \sigma_{yy}n_2)\frac{\partial u_y}{\partial x}\right] \\ & \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \Bigg\}_g \end{aligned} \tag{1.264}$$

Il percorso é intenzionalmente progettato cosí gli stessi punti di integrazione associati con gli elementi della matrice di rigidezza possono essere usati. Quindi, il contorno del percorso deve passare attraverso i punti di Gauss degli elementi finiti, come mostra la Figura 1.32b. Conseguentemente, tutti i termini dell'equazione (1.264) sono conosciuti: le componenti di tensione si ricavano ai punti di Gauss, le deformazioni possono essere determinate dalla derivazione delle funzioni di forma (matrice B), e $\partial y/\partial \eta$ é una componente della matrice Jacobiana J.

Vanno inoltre menzionati altri due metodi per la valutazione di J:

- Il metodo del dominio equivalente di integrazione (EDI).
- Metodo dell'integrale di interazione.

Capitolo 2

Alternativa al metodo degli elementi finiti

Il presente capitolo é dedicato alla presentazione di un metodo utilizzato a modellare delle discontinuitá indipendentemente della mesh. La posizione degli X-FEM in tale ambito ne giustifica la scelta di tale metodo.

2.1 Introduzione

La simulazione numerica in meccanica della frattura é essenzialmente basata sull'utilizzo del metodo agli elementi finiti. Classicamente per un problema di propagazione della fessura, un calcolo preliminare é realizzato su una maglia iniziale, piú una nuova maglia é determinata per prendere in conto l'avanzamento della fessura in concomitanza alla legge di propagazione scelta. Viene poi fatto un nuovo calcolo iterando il procedimento per un determinato passo di propagazione.

Il maggior inconveniente é la necessitá di dover infittire la maglia creata ad ogni passo dell' iterazione. Il processo di reinfittimento puó essere agevolmente automatizzato in 2D, e in alcuni casi 3D, ma un reinfittimento di qualitá in 3D ha necessitá di essere supervisionato da un essere umano arrecando perdite di tempo e denaro. Infatti con la creazione automatica della maglia, un raffinamento locale appropriato all'altezza della zona fessurata comporta spesso un numero eccessivo di elementi per l'intera struttura. Un processo di raffinamento per ogni strato é generalmente utile, come ad esempio l'introduzione di un toro in fondo alla fessura (2.1) , soluzione performante ma che necessita un intervento umano; che diviene tanto piú difficile tanto piú la geometria é complessa (esempio fessura elicoidale). Il problema della realizzazione di una maglia diviene quasi inconcepibile quando piú fessure 3D coesistono nella stessa mesh. In piú oltre a queste difficoltá pratiche, la proiezione delle grandezze (vincoli, variabili interne) di una maglia ad

un'altra pone dei problemi teorici di fondamentale importanza (verifica delle equazioni di conservazione dell'energia, della quantitá di moto, della massa). Parallelamente alle difficontá legate alla propagazione, i metodi basati sulle mesh si dimostrano poco efficaci per gli studi parametrici o se si ha interesse all'influenza della posizione e della forma della fessura.

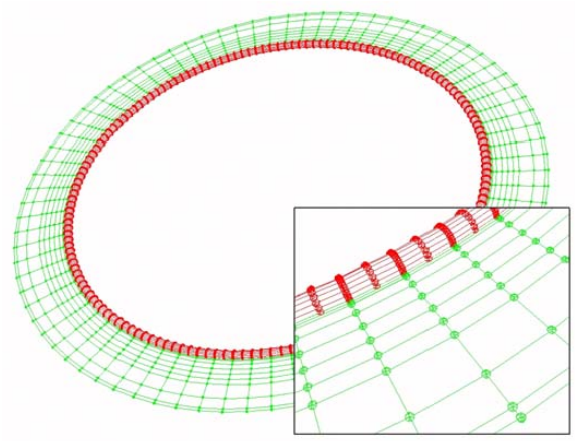


Figura 2.1: **Fessura circolare con maglia e toro in fondo alla fessura.**

2.2 Le alternative al MEF: la scelta degli X-FEM

2.2.1 I metodi Meshless

I metodi detti Meshless [8] sono stati proposti per evitare i vincoli legati alla maglia. I metodi Meshless sono basati su di una discretizzazione unicamente nodale, senza connessioni, e le funzioni di forma sono costruite a partire dalla configurazione nodale. Inizialmente introdotti alla fine degli anni 70 per i problemi privi di frontiere (metodo Smoothed Particle Hydrodynamics), i metodi Meshless sono stati estesi ad una serie di altre problematiche meccaniche e si trovano oggi in diverse varianti: metodi Moving Least Square (MLS), Diffuse Element Method (DEM), Element Free Galerkin (EFG), Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), ed altri ancora. L'elemento comune a tutti questi metodi é la notazione della partizione dell'unitá, tradotto da un insieme di funzioni dove la somma é uguale a uno in ogni punto del dominio considerato. Il principale inconveniente di questi metodi é che richiedono un onere computazionale maggiore rispetto ai metodi basati sulle maglie (tempo di CPU dilatato). In particolare, la scelta dei polinomi di interpolazione e la valutazione delle funzioni di forma non sono delle scelte banali. Inoltre, gli schemi di integrazione numerica sono generalmente piú ricchi quindi piú corposi e il sistema totale di equazioni risultante risulta maggiore se comparato al metodo agli elementi finiti. Allo stesso modo nelle

recenti versioni dei metodi Meshless l'imposizione delle condizioni ai limiti resta problematica.

2.2.2 I metodi Mesh-based

Altri metodi si basano su una partizione dell'unitá nel contesto degli elementi finiti standards, dove solo la definizione delle funzioni di forma differisce. Questa scelta della partizione dell'unitá evita i problemi di integrazione, i quali sono invece presenti nei metodi Meshless (EFG,DEM,RKPM). Inoltre, l'utilizzo di una partizione dell'unitá basata sugli elementi finiti permette una facile implementazione delle condizioni di Dirichlet (contrariamente alle tecniche che utilizzano una partizione dell'unitá basata sui minimi quadrati). Questi metodi, che si applicano alle strutture con maglia sotto il nome di Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) o Generalized Finite Element Method (GFEM), permettono d'arricchire facilmente lo spazio delle funzioni di forma, grazie alla conoscenza *a priori* delle prorpietá della soluzione del problema. Duarte [DUA 01] propose una partizione dell'unitá mista, che permettono di considerare le fessure senza bisogno di una maglia, con delle funzioni di forma arricchite.

Ancora piú vicini alla struttura degli elementi finiti classici, il metodo degli elementi finiti estesi (eXtended Finite Element Method, X-FEM) ha suscitato un interesse piú vivo confermato dal numero di pubblicazioni e dal numero sempre crescente di conferenze internazionali. Questo metodo utilizza la partizione delle unitá per arricchire la base delle funzioni di forma al fine di rappresentare la grande discontinuitá nel campo degli spostamenti che si verifica all'altezza delle labbra della fessura. Sono stati quindi introdotti due tipi di arricchimento: un arricchimento per una funzione 'salto" che permette di gestire la discontinutá sulle labbra della fessura, e un arricchimento per le funzioni asintotiche, che permette una rappresentazione fedele dei fenomeni fisici che avvengono sulla punta della fessura. Storicamente vengono considerati i precursori di questo metodo Belytschko e Black [9], che applicarono la partizione dell'unitá alla meccanica della frattura e incorporarono le formule analitiche dei campi asintotici nell'approssimazione degli spostamenti. L'aggiunta della funzione di Heaviside generalizzata [10] ha permesso di descrivere l'approssimazione arricchita degli spostamenti nella sua forma finale, dando vita alla metodologia degli elementi finiti estesi (X-FEM). Paragonata alla GFEM, tale metodologia offre meno dipendenza nei confronti della conoscenza della forma della soluzione, ed offre una maggiore flessibilitá. Il campo di applicazione degli X-FEM é in continua espansione, questo approccio é giá stato utilizzato in diversi contesti: piastra di Reissner-Mindlin, gusci, frattura in 3D, multi-fessure, zone coesive, modellazione di bi-materiali, nucleazione delle fessure, la fessurazione con contatto, fratture in dinamica, plasticitá, microstrutture, fluidi multifase, bio-materialI. Mal-

grado alcune diffoltá tecniche, come ad esempio l'imposizione delle condizioni al bordo, questo approccio sembra essere ben controllabile, e l'implementazione attraverso dei linguaggi di programmazione ragionevole.

Inoltre l'utilizzo della metodologia dei level sets accoppiata con gli X-FEM ha facilitato notevolmente il trattamento della fessurazione in 2D [11] e in 3D. Inizialmente introdotta nella meccanica dei fluidi per rappresentare l'evoluzione all'interfaccia, il metodo dei level sets considera l'interfaccia come l'iso-zero di una funzione distanza. Tale metodo sará particolarmente efficace per la propagazione della fessura in 3D, accoppiato con l'utilizzo della metodologia Fast Marching Method.

2.3 Sull'utilizzo dei level sets

Sia data un'interfaccia Γ delimitante un aperto Ω di $\mathbf{R^n}$. L'idea é di definire una funzione $\phi(x,t)$ regolare tale che il suo spazio $\phi(x,t) = 0$ rappresenti l'interfaccia.
Il level set possiede le proprietá seguenti:

$$\begin{aligned} &\phi(x,t) > 0 \quad \text{per}\, x \in \Omega \\ &\phi(x,t) < 0 \quad \text{per}\, x \notin \overline{\Omega} \\ &\phi(x,t) = 0 \quad \text{per}\, x \in \partial\Omega = \Gamma(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Questo metodo é facilmente applicabile ai problemi nei quali compaiono fori o di bi-materiali in cui l'interfaccia non é a maglie in 2D.

2.3.1 Level sets per la fessurazione

Nel caso della fessurazione, si rende necessaria l'introduzione di due level sets (in 2D e in 3D):

- un level set normale (lsn) che rappresenta la distanza dalla superficie della fessura (superficie estesa a tutto il dominio),
- un level set tangente (lst) che rappresenta la distanza del fondo della fessura.

L'iso-zero del level set normale definisce la superficie della fessura, estesa per continuitá tutto il dominio. L'intersezione delle iso-zero dei due level sets definisce il fondo della fessura. Inoltre, il segno del level set tangente é scelto in modo che la superficie della fessura Γ_{cr} corrisponde allo spazio generato da $(lsn = 0) \cap (lst < 0)$. Il segno del level set normale é scelto in modo arbitrario. I punti $\mathbf{x}$ per i quali $lsn(\mathbf{x})$ é negativo sono detti "al di sotto"

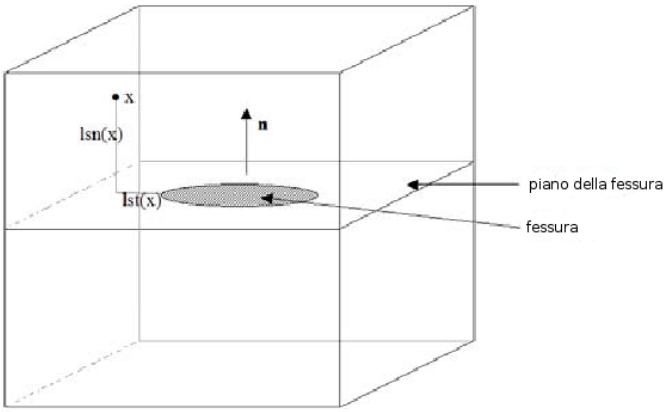


Figura 2.2: **Level sets e distanza dalla fessura.**

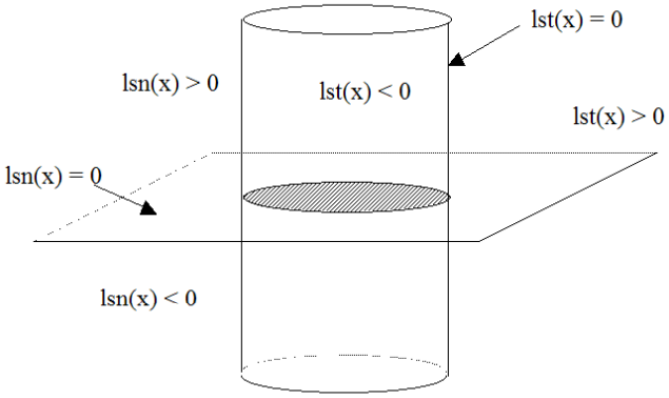


Figura 2.3: **Level sets per la rappresentazione di una fessura 3D.**

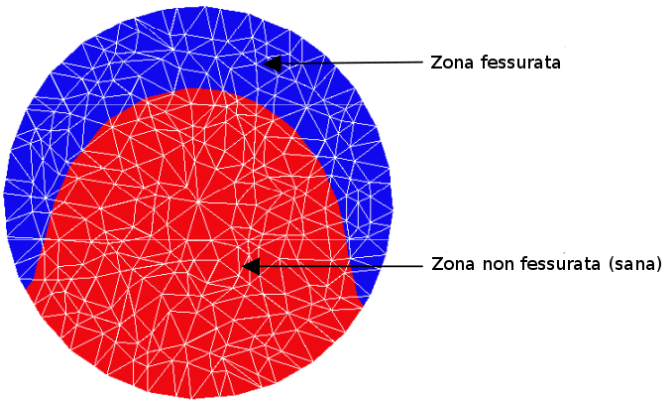


Figura 2.4: **Rappresentazione di una fessura ottenuta attraverso una forma semi-ellittica (tagliata nel piano $lsn = 0$): in blu la zona fessurata ($lst < 0$) e in rosso la zona sana ($lst > 0$).**

della fessura, e quelli per i quali $lsn(\mathbf{x})$ é positivo sono detti "al di sopra" della fessura (Figura 2.3).
La fase di propagazione della fessura si traduce semplicemente attraverso la propagazione dei level sets. La propagazione di un level set necessita tre tappe successive:

- estensione della velocitá conosciuta sull'iso-zero all'intero dominio,
- propagazione del level set a partire dal campo di velocitá,
- reimpostare la funzione level set al fine di conservare una funzione distanza prestabilita.

La propagazione di una fessura rappresentata da due level sets presenta qualche particolaritá. Il vettore velocitá é conosciuto solamente sul fronte della fessura, vale a dire una curva. La fessura non puó che ingrandirsi, non si puó spostare. Due funzioni di level sets si propagheranno verificando che i loro gradienti siano ortogonali. La sequenza di passi puó essere riassunta come segue:

- propagazione di lsn e reinizializzazione di lsn,
- propagazione di lst,
- ortogonalizzazione del gradiente di lst rispetto al gradiente di lsn,
- reinizializzazione di lst.

Questi passi portano tutti alla risoluzione dell'equazione di tipo Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial \dots}{\partial t} + F|\nabla \dots| = f \tag{2.2}$$

Dove $\mathbf{F}$ e $\mathbf{f}$ dipendono dal passo.

Il Fast Marching Method é una tecnica alternativa ben adattata alla propagazione strettamente monotona della frontiera. Questo metodo separa i nodi della maglia in base al loro distanza dall'interfaccia.

<u>**Si noti**</u>
Nonostante un quadro matematico ben definito, parecchi problemi appaiono durante l'implementazione numerica. Questo punto resta quindi un punto piuttosto delicato, soprattutto sull'arresto dell'iterazione della re-ortogonalizzazione, perché la procedura di ortogonalizzazione (per avere dei gradienti di level sets ortogonali) e di reinizializzazione (per trovare una funzione distanza) non sono compatibili con le fessure curve o non piane.

2.3.2 Level sets vettoriali

Una delle difficoltá del metodo dei level sets, come presentato al paragrafo precedente, risiede nel fatto che il level set si evolve nel suo insieme in modo che solo il fondo della fessura si propaga. Si puó quindi dire che la superficie della fessura é come se restasse "congelata". Inoltre, le equazioni che permettono la propagazione fanno intervenire delle equazioni alle derivate parziali, che non sono quasi mai semplici da risolvere.
Per evitare questo problema, l'uso dei level set vettoriali (sviluppati nel contesto dei metodi Meshless) é esteso al caso delle fessure trattate attraverso gli X-FEM. Un level set vettoriale contiene il segno del level set e le coordinate del punto di proiezione piú prossimo. L'evoluzione del level set si avvale solamente delle considerazioni di tipo geometrico manipolando soltanto delle equazioni scalari. Alcune procedure d'interpolazione e di estrapolazione (non basate sulle funzioni di forma) sono state proposte.

Nonostante la loro apparente semplicitá, i level sets vettoriali sono piuttosto complicati da mettere in opera per la propagazione 3D, lasciando quindi privilegiato l'utilizzo dei level sets scalari.

2.4 La metodologia X-FEM

2.4.1 Problema generale

Di seguito vengono riportate le equazioni di un problema generale di una struttura fessurata. Si considera una fessura $\mathbf{\Gamma_c}$ nel dominio $\mathbf{\Omega} \in \mathbf{R^3}$ delimitata da $\partial\mathbf{\Omega}$ di normale esterna $\mathbf{n_{ext}}$. Le labbra della fessura sono indicate con $\mathbf{\Gamma^1}$ e $\mathbf{\Gamma^2}$, di normale esterna $\mathbf{n^1}$ e $\mathbf{n^2}$. Il campo degli sforzi e degli spostamenti sono indicati rispettivamente con σ e $\mathbf{u}$. Un carico quasi-statico é imposto alla struttura per mezzo di una forza di densitá volumetrica $\mathbf{f}$ e di una forza di densitá superficiale $\mathbf{t}$ su $\mathbf{\Gamma_t}$. Il solido é incastrato in $\mathbf{\Gamma_u}$.

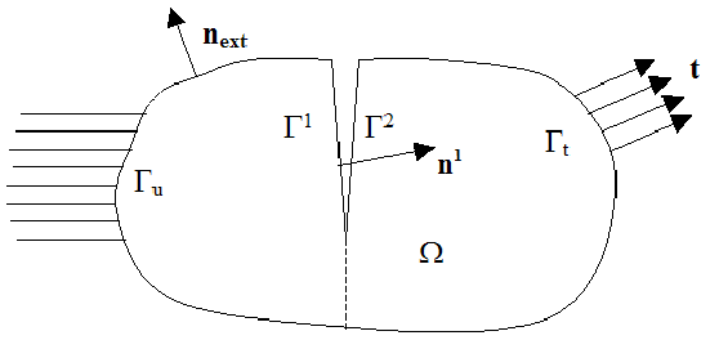


Figura 2.5: **Notazione utilizzata nel problema generale**

La forma forte delle equazioni di equilibrio e delle condizioni ai limiti si scrive:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \mathbf{f} \quad \text{in}\,\Omega \\ \sigma \cdot \mathbf{n_{ext}} &= \mathbf{t} \quad \text{su}\,\Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{su}\,\Gamma_u \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si fa l'ipotesi di piccole deformazioni e piccoli spostamenti, per i quali la relazione deformazioni-spostamenti prende la forma seguente:

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{s}}\,\mathbf{u} \tag{2.4}$$

Dove $\nabla_{\mathbf{s}}$ é la parte simmetrica del gradiente e ϵ il tensore delle deformazioni.

Si considera un materiale elastico lineare. La legge di comportamento del solido $\mathbf{\Omega}$ é:

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon \quad in\ \Omega \tag{2.5}$$

Dove $\mathbf{C}$ é il tensore di Hooke.

Tenuta in conto la notazione precedente, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_{\mathbf{\Omega}} \sigma(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v})\mathbf{d\Omega} = \int_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\mathbf{d\Omega} + \int_{\mathbf{\Gamma_t}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}\mathbf{d\Gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

Dove $H_0^1(\Omega)$ é lo spazio di Sobolev delle funzioni dove la derivata é integrabile due volte, e si annulla in Γ_u.

2.4.2 Arricchimento dell'approssimazione degli spostamenti

L'idea principale é di arricchire le funzioni d'interpolazione grazie alla partizione dell'unitá. L'approssimazione classica degli elementi finiti é di seguito riportata:

$$\mathbf{u^h}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{N_n}(\mathbf{x})} \mathbf{a_i} \mathbf{\Phi_i}(\mathbf{x}) \tag{2.7}$$

Dove le $\mathbf{a_i}$ sono i gradi di libertá (ddl) degli spostamenti ai nodi $\mathbf{i}$ e $\mathbf{\Phi_i}$ le funzioni di forma associate ai nodi $\mathbf{i}$. Inoltre, $\mathbf{N_n}(\mathbf{x})$ denota l'insieme dei nodi dove il supporto contiene i punti $\mathbf{x}$. Si assimila il supporto di un nodo

$\mathbf{i}$ al supporto delle funzioni di forma associate a tale nodo, sarebbe a dire l'insieme dei punti $\mathbf{x}$ tali che $\mathbf{\Phi_i(x) \neq 0}$. Un esempio di supporto di un nodo é rappresentato nella Figura 2.6.

Al fine di rappresentare un salto del campo degli spostamenti all'altezza delle labbra della fessura, l'approssimazione (2.7) é arricchita attraverso una funzione di Heaviside generalizzata. La conoscenza della forma della soluzione in fondo alla fessura permette d'aggiungere un termine supplementare migliorando la precisione nella zona attorno al fondo della fessura.
L'approssimazione arricchita si scrive allora:

$$\begin{aligned}\mathbf{u^h(x)} = & \sum_{\mathbf{i \in N_n(x) a_i \Phi_i(x)}} + \sum_{\mathbf{j \in N_n(x) \cap K}} \mathbf{b_j \Phi_j(x) H(lsn(x))} + \\ & + \sum_{\mathbf{k \in N_n(x) \cap L}} \sum_{\alpha=1}^{4} \mathbf{c_k^\alpha \Phi_k(x) F^\alpha(lsn(x), lst(x))}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Questa espressione é composta da tre termini. Il 1° termine é il termine classico continuo. Il 2° e il 3° termine sono i termini arricchiti.

2.4.2.1 Arricchimento con la funzione di Heaviside (2° termine)

Al fine di rappresentare il salto di spostamenti in $\mathbf{\Gamma_c}$, c'é la necessita di introdurre la funzione di Heaviside generalizzata $\mathbf{H(x)}$ [10] definita da:

$$H(x) = \begin{cases} -1 & se \quad x < 0 \\ +1 & se \quad x > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Utilizzando il level set normale, la quantitá $\mathbf{H(lsn(x))}$ vale $\mathbf{-1}$ se il punto $\mathbf{x}$ si trova "al di sotto" della fessura e vale $\mathbf{+1}$ si si trova "al di sopra" della fessura. Per i punti situati esattamente sull'interfaccia, si considera che $\mathbf{H(lsn(x))}$ vale $\mathbf{-1}$ se il punto $\mathbf{x}$ si trova sul labbro inferiore e vale invece $\mathbf{+1}$ se il punto $\mathbf{x}$ si trova sul labbro superiore.

I $\mathbf{b_j}$ sono i gradi di libertá arricchiti. $\mathbf{K}$ é l'insieme dei nodi dove il supporto é interamente tagliato dalla fessura (nodi rappresentati con un cerchio in Figura 2.6).
<u>**Si noti**</u>
I ddl $\mathbf{a_i}$ perdono il loro significato fisico perché non corrispondono piú ai valori degli spostamenti. Per ridargli un'interpretazione fisica corretta, Belytschko *et al.* proposero una modifica dell'arricchimento con la funzione di Heaviside: nell'espressione (2.8) la funzione $\mathbf{H(lsn(x))}$ é sostituita da $\mathbf{H(lsn(x)) - H(lsn(x_i))}$, che corrisponde ad uno sfalsamento. In questo caso, i ddl $\mathbf{a_i}$ corrispondono di nuovo agli spostamenti. Questa sostituzione é

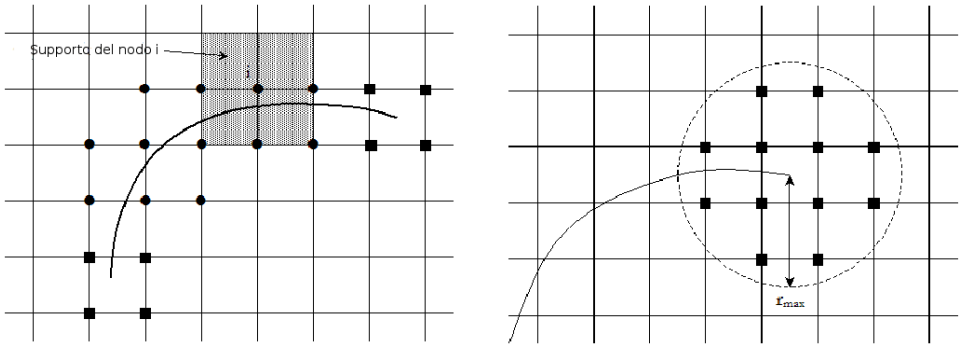
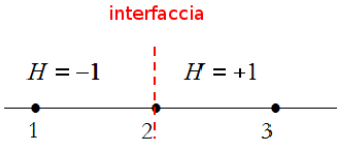


Figura 2.6: **A sinistra, i nodi "rotondi" sono arricchiti attraverso la funzione di Heaviside e i nodi "quadrati" attraverso delle funzioni singolari (arricchimento topologico). A destra, i nodi "quadrati" sono arricchiti attraverso delle funzioni singolari (arricchimento geometrico).**

utilizzata da diversi autori. Tuttavia, questo richiese una scelta arbitraria del segno di $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e quando l'interfaccia passa per un nodo della maglia, $\mathbf{a_i}$ non corrisponde piú necessariamente allo spostamento reale del nodo. In effetti, nell'esempio 1D mostrato nella Figura 2.7 , l'interfaccia passa per il nodo 2. La scrittura dello spostamento in questo nodo da una parte e dall'altra dell'interfaccia (lato $-$ e lato $+$) necessita una scelta arbitraria del segno della $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ a livello dell'interfaccia. Successivamente a questa scelta, il ddl $\mathbf{a_2}$ corrisponde o allo spostamento del punto 2^- o allo spostamento del punto 2^+. In questo caso, il vantaggio di questa formulazione é perduto.



Se $H = -1$ in $x = 0$: $u(2^-) = a_2 - 2b_2$ e $u(2^+) = a_2$

Se $H = +1$ in $x = 0$: $u(2^-) = a_2$ e $u(2^+) = a_2 - 2b_2$

Figura 2.7: **Sfalsamento della funzione d'arricchimento di Heaviside.**

2.4.2.2 Arricchimento con le funzioni singolari (3° termine)

Al fine di rappresentare la singolaritá in fondo alla fessura, l'approssimazione del campo degli spostamenti si arricchisce attraverso le funzioni basate su sviluppi asintotici del campo degli spostamenti in meccanica della frattura in elasticitá lineare. Queste espressioni sono state determinate per una fessura

piana in un piano infinito.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_1\cos\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta)+K_2\sin\frac{\theta}{2}(k+2+\cos\theta)\right)\\
u_2 &= \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_1\sin\frac{\theta}{2}(k-\cos\theta)+K_2\cos\frac{\theta}{2}(k-2+\cos\theta)\right)\\
u_3 &= \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}K_3\sin\frac{\theta}{2}\\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad k=3-4\nu \quad \text{in deformazioni piane}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Le espressioni dei campi u_1 e u_2 corrispondono ai modi I e II in deformazioni piane e quella di u_3 al modo III (anti-piana). L'ipotesi di sforzo piano non puó essere accettata perché nessuna piastra fessurata é in condizioni di sforzo piano in prossimitá della singolaritá, quando ci si pone a una distanza finita dalla frontiera del guscio.

La base che permette di descrivere questi campi ha 4 funzioni:

$$
\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\right\} \tag{2.11}
$$

É stata scelta la seguente base equivalente:

$$
F=\left\{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\} \tag{2.12}
$$

Queste soluzioni sono le soluzioni di Westergard, soluzioni asintotiche analitiche di un problema di frattura elastica in 2D. Questa base é ben adattabile ai diversi casi 3D, almeno per le fessure il cui fondo presenta una certa regolaritá. Si nota che solamente la prima funzione della base é discontinua attraverso la fessura. Le altre funzioni sono aggiunte solo al fine di migliorare la precisione. Queste funzioni sono dette "singolari" perché le loro derivate sono singolari in $r=0$.

Nell'espressione (2.8), le $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ rappresentano i gradi di libertá arricchiti e $\mathbf{L}$ l'insieme dei nodi il cui supporto é parzialmente tagliato dalla fessura (nodi rappresentati da un cerchio nella Figura 2.6). Questo significa che un solo livello di elementi é arricchito attorno al fondo della fessura. Questo tipo di arricchimento é detto "topologico". Un altro arricchimento, detto "geometrico", é esplicato al paragrafo [§2.4.2.4].

2.4.2.3 Base locale sul fondo della fessura

L'espressione (2.12) fa intervenire $(\mathbf{r}, \theta)$, coordinate polari nella base locale sul fondo della fessura (vedere Figura 2.8). Queste coordinate possono facilmente espresse attraverso l'utilizzo dei level sets, dalla:

$$r = \sqrt{lsn^2 + lst^2}\,,\ \theta = \arctan\left(\frac{lsn}{lst}\right)\,,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{2.13}$$

Nella pratica, queste formule per calcolare l'angolo θ non sono usate in modo diretto. Una formula piú evoluta, esplicata successivamente, permette di ottenere dei valori di θ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

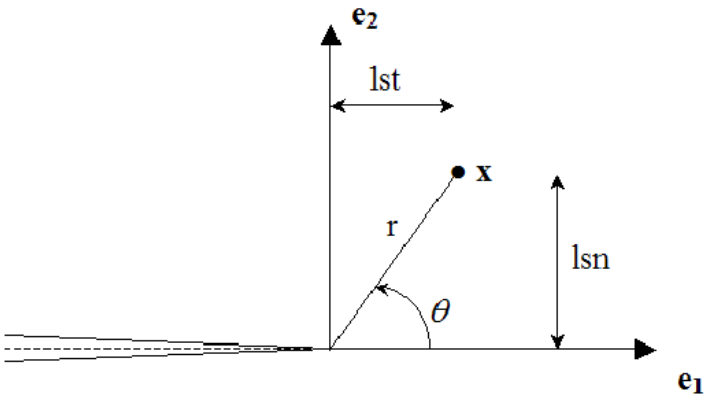


Figura 2.8: **Coordinate polari nella base locale.**

2.4.2.4 Arricchimento geometrico e velocitá di convergenza

Nei primi articoli sugli X-FEM [10], é stato notato che un criterio geometrico $\mathbf{r_{max}}$ puó essere definito per determinare i nodi arricchiti attraverso le funzioni singolari (vedere Figura 2.6):

$$L = \{\text{nodi tali che}\, r < r_{max}\} \tag{2.14}$$

I primi studi di convergenza sono stati effettuati nel 2000 nell' ambito della GFEM, con la presa in conto di piú piani di elementi arricchiti in fondo alla fessura.

Per gli studi di convergenza, l'evoluzione dell'errore é valutato in rapporto al grado di raffinatezza della maglia. Generalmente, se **h** rappresenta una lunghezza caratteristica degli elementi della maglia, si cerca di determinare

il parametro α chiamato tasso (o velocitá o ordine) di convergenza, tale che l'errore relativo $\mathbf{e_{rel}}$ viene scritto attraverso la formula:

$$e_{rel} = \frac{\|u - u^h\|_{H^1}}{\|u\|_{H^1}} \propto_{h \to 0} Ch^{\alpha} \tag{2.15}$$

dove $\mathbf{C}$ é una costante indipendente da $\mathbf{h}$. Il parametro α rappresenta la pendenza di $\log \mathbf{e_{rel}}$ in funzione di $\log \mathbf{h}$ quando $\mathbf{h}$ tende a $\mathbf{0}$.

Stazi *et al.* studiarono la convergenza dell'errore espressa in energia per una piastra infinita con una fessura rettilinea, in modo I, per formulazioni lineari e quadratiche. Hanno stabilito che l'approssimazione quadratica migliora l'errore, ma non il tasso di convergenza. Bénchet *et al.* confermarono queste osservazioni e mostrarono che una zona di arricchimento fissata permette di ritrovare un tasso di convergenza quasi ottimale. Parallelamente, Laborde *et al.* approfondiscono la questione e testarono i tassi di convergenza per le formulazioni polinomiali di ordine superiore. Inoltre, essi apportano delle migliorie al fine di trovare un tasso ottimale. La tabella riassume i risultati ottenuti da Laborde *et al.* per diverse varianti di X-FEM, per delle approssimazioni polinomiali di grado $k = 1, 2, 3$.

	FEM	X-FEM	X-FEM (f. a.)	X-FEM (d. g.)	X-FEM (p. m.)
P1	0.5	0.5	0.9	0.5	1.1
P2	0.5	0.5	1.8	1.5	2.2
P3	0.5	0.5	2.6	2.6	3.3

La prima colonna corrisponde agli ordini di convergenza del metodo agli elementi finiti classico per un problema di fessurazione. Tenuto conto della singolaritá, la velocitá di convergenza é in $\sqrt{\mathbf{h}}$ i quali sono i gradi di $\mathbf{k}$. Le simulazioni 2D realizzate su un problema test (fessura rettilinea su di un quadrato in modo I) mostrano che X-FEM migliora l'errore ma non migliora il tasso di convergenza dell'errore. Questo si puó spiegare attraverso il fatto che l'arricchimento topologico interessa un solo strato di elementi sul fondo della fessura. La zona di influenza di questo tipo di arricchimento é fortemente legato a $\mathbf{h}$. Cosí, quando $\mathbf{h}$ tende a 0, la dimensione della zona di influenza dell'arricchimento tende anch'essa a 0. L'idea che sembra naturale é allora di non limitare la zona da arricchire ad un solo strato di elementi, ma di estenderla ad una zona di dimensioni prefissate, indipendente dal raffinamento della maglia. La terza colonna della tabella presenta i risultati ottenuti con il metodo detto X-FEM f.a. (Fixed enrichement Area). Si trova quasi il tasso atteso di convergenza ($\alpha = \mathbf{k}$ per un' approssimazione Pk). Tuttavia, il condizionamento é attenuato in rapporto alla metodologia X-FEM tradizionale, fenomeno osservato da. Al fine di ritrovare un condizionamento accettabile, Béchet *et al.* proposero d'ortogonalizzare ogni *ddl*

arricchito rispetto ai *ddl* classici, attraverso una decomposizione di Cholesky. Un'altra soluzione é stata apportata da Laborde *et al.*, che proposero di raccogliere i gradi di libertá arricchiti dalle funzioni singolari. Cosí invece di avere dei *ddl* arricchiti differenti per ogni nodo arricchito, questi sono raggruppati al fine di averne uno solo per funzione singolare e per estremitá della fessura. In questo modo, il condizionamento é fortemente migliorato, ma il tasso di convergenza é piú basso (X-FEM d.g., per Degrees of freedom Gathering). Il problema proviene dagli elementi di transizione tra la zona arricchita e la zona non arricchita. Il fenomeno si spiega attraverso il fatto che la partizione dell'unitá non puó essere utilizzata su questi elementi parzialmente arricchiti. Per ovviare a questo difetto, un'ultima versione é proposta: X-FEM p.m. (per Pointwise Matching). La zona di transizione non esiste piú, che conduce a una non conformitá (approssimazione discontinua). Il metodo di "riattaccamento" scelto impone l'uguaglianza tra lo spostamento dei nodi al confine tra la zona arricchita e non arricchita. Grazie a questo "riattaccamento", i tassi di convergenza attesi (se non addirittura una sopraconvergenza) sono ottenuti.

Nota

Per le approssimazioni polinomiali di grado $k = 2, 3$, Laborde *et al.* utilizzarono le funzioni di forma di grado k per i termini classici e arricchiti attraverso Heaviside, in modo che il salto fosse di grado k. Per contro, per i termini arricchiti delle funzioni singolari, é sufficiente utilizzare le funzioni di forma lineari per descrivere la singolaritá in fondo alla fessura e non deteriorare troppo i condizionamenti inerenti alle matrici.

Nelle modellazioni attraverso *Code_Aster*, é stato scelto di definire o un arricchimento singolare su un livello di elementi in fondo alla fessura (arricchimento topologico), o un raggio di arricchimento (arricchimento geometrico). In 3D, i dati di un raggio permettono di definire un toro in fondo alla fessura. Nessun trattamento particolare agli elementi di transizione é stato fatto, e i tassi di convergenza ottenuti sono ampiamente soddisfacenti. Dato un blocco 3D di dimensioni $0.2\,m$ x $1\,m$ x $1\,m$ contenente una fessura definita dal semipiano $z = 0.5\,m$ e $y \geq 0.5\,m$ sul quale é imposto un carico lungo tutto il bordo a cui corrisponde un modo I puro. La quantitá h indica la dimensione degli elementi (in questo caso esaedri), $1/h$ rappresenta allora il numero il numero di elementi lungo ciascuna direzione. Nella Figura 2.9, l'errore in energia definito da:

$$\mathbf{W}(\mathbf{u^h}) = \left(\frac{\int_{\mathbf{\Omega}} \epsilon(\mathbf{u^h} - \mathbf{u^{ref}}) : \mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{u^h} - \mathbf{u^{ref}}) \mathbf{d\Omega}}{\int_{\mathbf{\Omega}} \epsilon(\mathbf{u^{ref}}) : \mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{u^{ref}}) \mathbf{d\Omega}} \right)^{\mathbf{1/2}} \tag{2.16}$$

é tracciato in funzione del numero di elementi secondo ciascuna direzione.

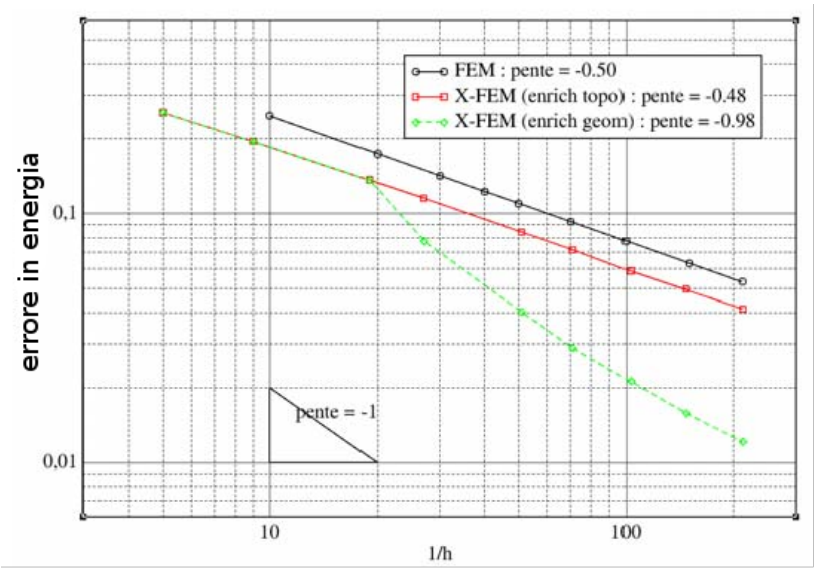


Figura 2.9: **Convergenza dell'errore in energia.**

L'arricchimento geometrico, con una zona di arricchimento fissata in fondo alla fessura, permette di ritrovare un tasso di convergenza quasi ottimale (pendenza uguale a -1), invece un arricchimento topologico non permette di migliorare il tasso di convergenza del metodo agli elementi finiti classici (pendenza uguale a -0.5), ma solamente l'errore. I primi tre punti della curva dell'arricchimento geometrico (curva tratteggiata) coincidono con la curva dell'arricchimento topologico, perché essi corrispondono a delle dimensioni degli elementi tali che un solo strato di elementi in fondo alla fessura é arricchito.

2.4.3 Integrazione numerica

Particolare attenzione deve essere prestata durante l'integrazione numerica dei termini di rigidezza e al secondo membro di un elemento attraversato dalla fessura. In effetti, su di un elemento attraversato da una fessura, le funzioni di approssimazione degli spostamenti sono discontinue, ed in questo caso l'integrazione numerica di Gauss-Legendre sulla totalitá degli elementi non é applicabile.

2.4.3.1 Discretizzazione

L'approssimazione X-FEM di un campo si spostamenti scritto in forma vettoriale é:

$$\{\mathbf{u^h}\} = \{\mathbf{\Phi_i} \quad \mathbf{\Phi_j H} \quad \mathbf{\Phi_k F^1} \quad \mathbf{\Phi_k F^2} \quad \mathbf{\Phi_k F^3} \quad \mathbf{\Phi_k F^4}\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{a_i} \\ \mathbf{b_j} \\ \mathbf{c_1^k} \\ \mathbf{c_2^k} \\ \mathbf{c_3^k} \\ \mathbf{c_4^k} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

O ancora:

$$\{\mathbf{u^h}\} = \{\mathbf{N}\} \cdot \{\mathbf{u}\} \tag{2.18}$$

$\{N\}$ é il vettore della base di arricchimento delle funzioni di forma e $\{u\}$ il vettore dei *ddl* nodali di spostamento.

Le deformazioni si scrivono nella maniera seguente:

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{u}\} \tag{2.19}$$

Dove $[B]$ é la matrice delle derivate delle funzioni di forma:

$$[\mathbf{B}] = \{(\mathbf{\Phi_i})' \quad (\mathbf{\Phi_j})'\mathbf{H} \quad (\mathbf{\Phi_k})'\mathbf{F}^{\alpha} \quad \mathbf{\Phi_k}(\mathbf{F}^{\alpha})'\}, \quad \alpha = \mathbf{1.4} \tag{2.20}$$

Le forme discretizzate del Principio dei Lavori Virtuali (2.6) conducono a:

$$\int_{\mathbf{\Omega}} [\mathbf{B}]^{\mathbf{t}}[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\mathbf{d\Omega} = \int_{\mathbf{\Omega}} \{\mathbf{N}\}(\mathbf{f})\mathbf{d\Omega} + \int_{\mathbf{\Gamma_t}} \{\mathbf{N}\}(\mathbf{t})\mathbf{d\Omega} \tag{2.21}$$

Il dominio $\mathbf{\Omega}$ é difatti una somma sul dominio elementare $\mathbf{\Omega_e}$.

2.4.3.2 Integrazione per sotto-divisione

La tecnica piú utilizzata é quella che consiste nel sotto-dividere un elemento da una parte e dall'altra della fessura. Al fine di ritornare nelle condizioni della regolaritá classica, si procede ad un'integrazione sui domini dove l'integrale é meno continuo. Per un elemento attraversato dalla fessura, si integra dunque separatamente da una parte e dall'altra della fessura. Ció appare per la prima volta in [10] per i casi 2D e per i casi 3D. Si ricorda che questa divisione non serve che alla fine dell'integrazione. La maglia non viene quindi modificata.

Per un elemento finito arricchito occupante in dominio $\mathbf{\Omega_e}$, l'integrale é suddiviso in una somma di integrali sui sotto-elementi:

$$\int_{\mathbf{\Omega_e}} \mathbf{g(x)d\Omega_{se}} = \sum_{\mathbf{sotto-elementi}} \int_{\mathbf{\Omega_e}} \mathbf{g(x)d\Omega_{se}} \tag{2.22}$$

Si noti per inciso che la quantitá da integrare non cambia, e si fa sempre riferimento all'elemento finito X-FEM $\mathbf{\Omega_e}$ (chiamato "elemento parente") e non ai sotto-elementi $\mathbf{\Omega_{se}}$.

Su ciascun sotto-elemento, l'integrale é continuo. In effetti, i sotto-elementi rispettano la discontinuitá della fessura, dunque la funzione $\mathbf{H(x)}$ é costante, e le funzioni $\mathbf{\Phi_i'}$, $\mathbf{F}^\alpha$ e $(\mathbf{F}^\alpha)'$ sono continue.

2.4.3.3 Integrazione singolare

Gli schemi di integrazione numerica di Gauss-Legendre sono stati concepiti per l'integrazione dei polinomi. Tuttavia la presenza di monomi in $1/\sqrt{r}$ provenienti dall'arricchimento con i campi asintotici conducono ad una convergenza assai lenta della precisione di questi schemi: un numero considerevole di punti di Gauss é allora necessario per ottenere un errore accettabile. Quando la singolaritá si trova sulla frontiera del dominio di integrazione, i cambiamenti delle variabili successive ben scelte permettono di portare all'integrazione su di un dominio unitario di una funzione non-singolare, polinomiale, sulla quale un'integrazione classica di Gauss-Legendre sarebbe efficace e rapidamente convergente. La figura 2.10 mostra una dozzina di punti di Gauss su ciascuna direzione sufficienti a raggiungere i limiti della precisione numerica di un calcolatore. Quando la singolaritá non si trova sulla frontiera, é conveniente disaccoppiare il dominio in sotto-domini, in tal modo che la singolaritá si trovi poi sulla frontiera dei sotto-domini. Nonostante dei risultati molto soddisfacenti in termini di convergenza dell'errore d'integrazione relativo di ciascun termine, lo sforzo d'implementazione per le strutture 3D resta notevole. Tanto piú che la differenza a livello d'errore globale confrontando un'integrazione classica con un numero di punti di Gauss

abbastanza elevati e un'integrazione singolare modificata non é veramente significativa.

Liu *et al.* arrivano alla stessa conclusione e comparano una quadratura di Gauss di ordine 15 sui sotto-triangoli usuali a una procedura di integrazione adattiva che valuta gli integrali singolari (Algoritmo DECUHR). I due metodi danno i medesimi risultati. Tuttavia, l'algoritmo DECUHR sembra piú generale di quello di Béchet *et al.* perché é progettato per qualsiasi tipo di singolaritá, mentre la prima é una funzione specifica per il metodo dell'arricchimento degli X-FEM.

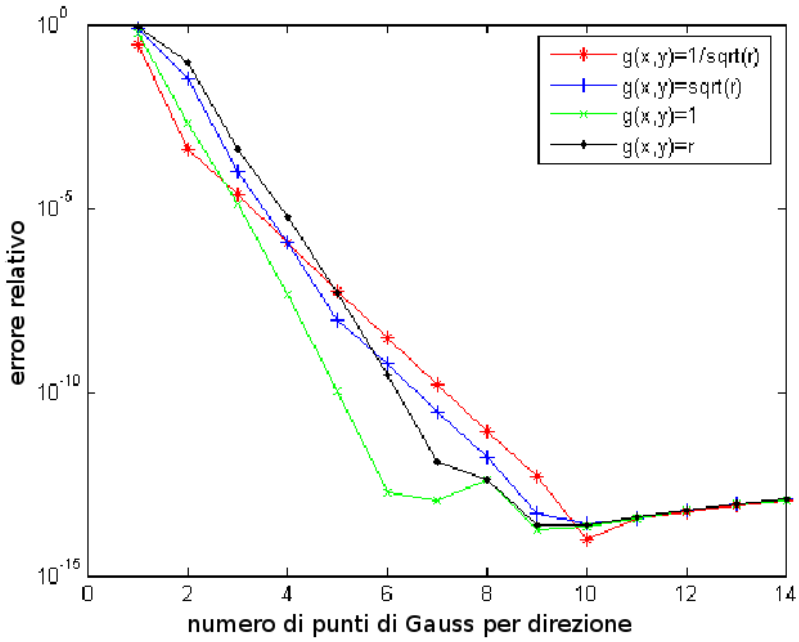


Figura 2.10: **Convergenza dell'errore con un'integrazione singolare.**

2.4.4 Il campo θ (in Code-Aster)

2.4.4.1 Requisiti

Il campo θ é un campo vettoriale, definito sul solido fessurato, che rappresenta la trasformazione del dominio all'accadimento di una propagazione della fessura. La trasformazione non dovrá modificare che la posizione del fondo della fessura e non il bordo del dominio $\delta\Omega$, vale a dire: $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ con $\mathbf{n}$ normale a $\delta\Omega$. Inoltre, il campo θ dovrá essere regolare su Ω [6].

In ragione della singolaritá del campo degli degli spostamenti, é utile da

un punto di vista numero utilizzare dei campi θ costanti nelle vicinanze di Γ_0, annullando cosí i termini singolari $\Psi\theta_{k,k} - \sigma_{ij}u_{i,p}\theta_{p,k}$ in $G(\theta)$.

2.4.4.2 Scelta del campo θ in 3 dimensioni

Metodo di costruzione
Si dovrá costruire un campo θ che verifichi:

$$\begin{cases} \theta_n & = \theta \cdot \mathbf{n} \quad = 0 & \textit{sul bordo del dominio } \delta\Omega \textit{ (}\mathbf{n}\textit{ é la normale a } \delta\Omega\textit{)} \\ \overline{\theta} & = \theta_0 & \textit{dato sul fondo della fessura } \Gamma_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

dove $\overline{\theta}$ rappresenta la traccia di θ su Γ_0.
Sono indicate due superfici toroidali T e S (cilindri deformati) che circondano il fondo della fessura Γ (Figura 2.11).

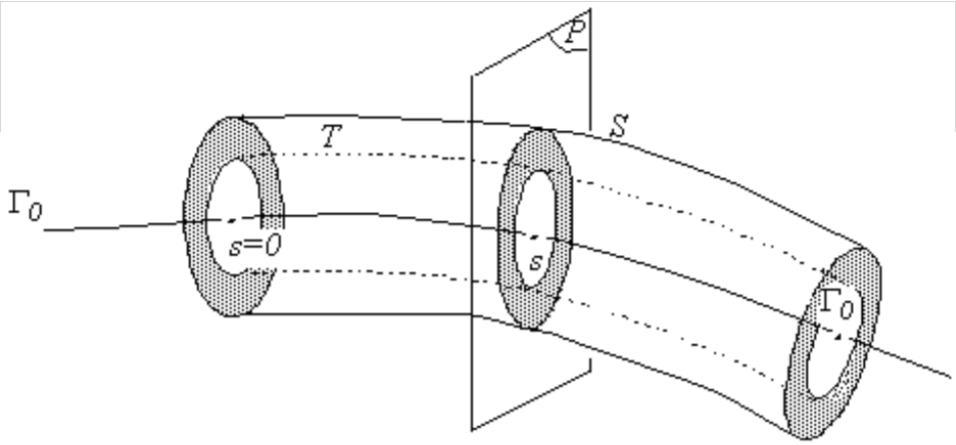


Figura 2.11: **Costruzione del campo θ in 3D (visione d'insieme).**

Per verificare la prima condizione esplicata sopra, si deve in particolare verificare che la corona S sia strettamente inclusa in Ω.
Si nota che $R_{inf}(s)$ é il raggio variabile di T e $R_{sup}(s)$ quello di S (Figura 2.12).
In tutti i punti di Γ_0, identificati dall'ascissa curvilinea s, si puó definire un piano normale P nel quale il campo θ é introdotto nel modo seguente:

- $\theta_n(r(s)) = \overline{\theta}_0(s)$ per $0 \leq r(s) \leq R_{inf}(s)$
- $\theta_n(r(s)) = 0$ per $r(s) \geq R_{sup}(s)$
- θ_n varia linearmente in rapporto al raggio $r(s)$ nella corona $S(R_{sup}(s)) \div T(R_{inf}(s))$

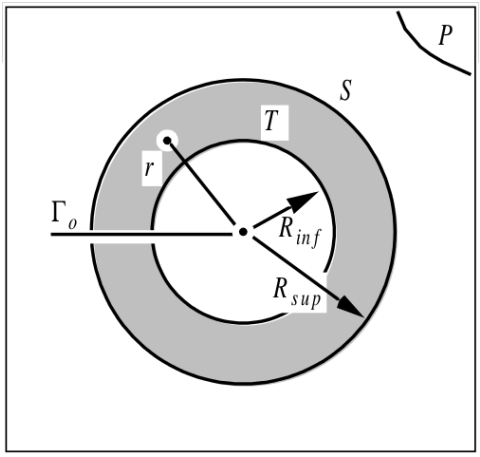


Figura 2.12: **Costruzione del campo θ in 3D (sezione).**

- θ_n é continua in $S(R_{sup}(s))$.

Questo modo di introdurre θ é un modo geometrico. Vengono assegnati due raggi, $R_{inf}(s)$ e $R_{sup}(s)$, e viene effettuato un calcolo della distanza di un punto lungo il fondo della fessura per determinare il valore di θ in questo punto [4].

2.4.4.3 Scelta del campo θ in 2 dimensioni

Questo é un caso particolare di quello a 3 dimensioni. Γ_0 é limitato ad un punto, si scelgono R_{inf} e R_{sup}, il modulo θ in fondo alla fessura $\mid \theta_0 \mid$ il campo θ é costruito in modo che (Figura 2.13):

- $\theta(r) = 0$ se $r \geq R_{sup}$
- $\theta(r) = \mid \theta_0 \mid \mathbf{n}$ se $r \leq R_{inf}$
- $\theta(r) = \frac{R_{sup}-r}{R_{sup}-R_{inf}} \mid \theta_0 \mid \mathbf{n}$ se $R_{inf} \leq r \leq R_{sup}$

Per verificare la condizione $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\delta\Omega$, deve in particolare verificare che la corona del raggio R_{sup} sia strettamente inclusa in Ω.

2.4.5 Calcolo energetico degli *stress intensity factors*

In questa sezione si chiarificano i passi principali del metodo $G - Theta$ utilizzato nel codice per il calcolo del tasso di restituzione d'energia in meccanica della frattura lineare, connesso al calcolo attraverso gli elementi finiti classici in 2D e 3D (per una trattazione completa ci si puó riferire a [4] e [5]). Questo metodo é anche utilizzato per il calcolo degli *stress intensity factors*,

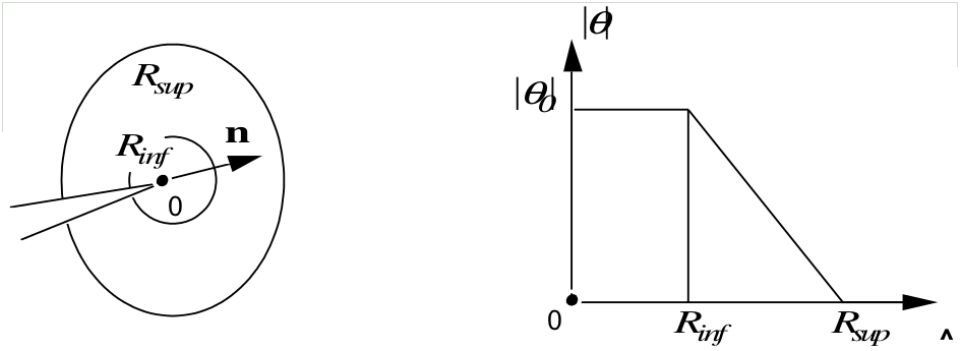


Figura 2.13: **Calcolo del campo θ in 2D.**

utilizzando la forma bilineare di g ma solamente in 2D. In quanto per poterlo utilizzare anche in 3D, sarebbe necessario conoscere la base locale sul fondo della fessura al fine di esprimere il campo asintotico in funzione delle coordinate polari (r , θ).

Quindi, verrá presentata l'utilitá dei *level sets* negli elementi finiti classici, che permetteranno di costruire una base locale in fondo alla fessura 3D. I gradienti dei *level sets* forniranno una base locale in fondo alla fessura. Inoltre, come visto al paragrafo 2.4.2.3 le coordinate polari in suddetta base locale si esprimono facilmente in funzione dei *level sets* (Figura 2.8). Cosí grazie ai *level sets*, il metodo $G-Theta$ é puó essere applicato al calcolo degli *stress intensity factors* in 3D con gli elementi finiti classici. In questo contesto la fessura é rappresentata attraverso una maglia. Nel post-trattamento, si determinano i due campi di *level sets* a partire dalla fessura rappresentata da una maglia e se ne deduce una discretizzazione del fondo della fessura. Il campo $Theta$ é costruito a partire da tale fondo della fessura discretizzato, ed in metodo $G - Theta$ é applicato.

L'ultimo punto riguarda il calcolo del tasso di restituzione dell'energia e degli *stress intensity factors*, seguiti da un X-FEM. In questo caso, la fessura non é rappresentata attraverso una maglia, ma la procedura é quasi la stessa: la discretizzazione del fondo della fessura é determinata a partire dai *level sets*, un campo $Theta$ é costruito e la metodologia $G - Theta$ é quindi applicata. La sola differenza si nota a livello delle integrazioni numeriche: con X-FEM, le integrazioni numeriche necessitano una suddivisione degli elementi da integrare. Infatti, si utilizza una suddivisione realizzata per il calcolo delle matrici tangenti.

2.4.5.1 Metodo $G - Theta$ per il calcolo di G

Espressione lagrangiana del tasso di restituzione dell'energia
Per definizione, il tasso di restituzione dell'energia locale G é definito rispetto alla derivata dell'energia potenziale in rapporto al dominio:

$$G = -\frac{\partial W}{\partial \Omega} \tag{2.24}$$

Il metodo degli spostamenti virtuali utilizzato é un metodo lagrangiano di derivazione dell'energia potenziale. Esso consiste nell'introdurre delle trasformazioni:

$$F^{\eta} : P \in \Omega \rightarrow M = P + \eta\theta(P) \in \Omega^{\eta} \tag{2.25}$$

che a ogni punto materiale P del dominio di riferimento Ω, associa un punto spaziale M del dominio trasformato Ω^{η}. Queste trasformazioni rappresentanti delle propagazioni della fessura, non dovranno modificare che la posizione della fessura Γ_0. Il campo θ dovrá essere tangente alla superficie della fessura.
Ne deriva quindi un integrale $J(\theta)$ che non utilizza degli integrale al contorno ma degli integrali sul dominio:

$$\begin{aligned} G(\theta) = & \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} - \Psi \theta_{k,k} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} T_{,k} \theta_k d\Omega \\ & + \int_{\Omega} f_{i,k} \theta_k u_i + f_i u_i \theta_{k,k} d\Omega \\ & + \int_{S} g_{i,k} \theta_k u_i + g_i u_i \left(\theta_{k,k} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k \right) d\Gamma \end{aligned} \tag{2.26}$$

Discretizzazione
Conseguentemente alla discretizzazione i G_j derivanti da essa posso essere determinati risolvendo un sistema lineare con P equazioni e N incognite:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} G_j = b_i, \quad i = 1, P \tag{2.27}$$

con

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{M} \theta_k^i \int_{\Gamma_0} p_j(s) q_k(s) \cdot m(s) ds \tag{2.28}$$

$$b_i = G(\theta^i) \tag{2.29}$$

Questo sistema ha una sola soluzione se si sceglie P indipendenti tali che: $P \geq N$ e $M \geq N$. Nel caso in cui ci siano piú equazioni che incognite adrá risolto nel senso dei minimi quadrati.

2.4.5.2 Metodo $G - Theta$ per il calcolo di K_I, K_{II} e K_{III} con i *level sets*

Di seguito di riporta il contributo dei *level sets* per il calcolo degli *stress intensity factors* in 3D. Esso é basato sulla separazione dei modi misti grazie alla forma bilineare di g. Questa forma bilineare é utilizzata dal codice per mezzo del metodo $G - Theta$ per il calcolo di K_I e K_{II} in 2D (vedi [5]).

Forma bilineare di g
Il calcolo degli *stress intensity factors* si puó fare attraverso il metodo *theta*, definendo una forma bilineare simmetrica g con:

$$g(u, \nu) = \frac{1}{4}(G(u + \nu) - G(u - \nu)) \tag{2.30}$$

Cosí, derivano due campi di spostamenti u e ν, il calcolo di $g(u, \nu)$ si effettua grazie all'espressione di G fornita in precedenza.

Separazione dei modi misti
La forma bilineare simmetrica $g(u, \nu)$ a come proprietá quella di separare i tre modi di apertura della fessura. Infatti, nella forma $g(u, \nu)$, se il campo a sinistra é il campo degli spostamenti risolventi e se il termine a destra é il campo degli spostamenti singolari in fondo alla fessura u_I^s, u_{II}^s oppure u_{III}^s, gli *stress intensity factors* si esprimono nella maniera seguente:

$$K_I = \frac{E}{1 - \nu^2} g(u, u_I^s) \tag{2.31}$$

$$K_{II} = \frac{E}{1 - \nu^2} g(u, u_{II}^s) \tag{2.32}$$

$$K_{III} = 2\mu g(u, u_{III}^s) \tag{2.33}$$

2.4.5.3 Metodo $G - Theta$ con gli X-FEM

Ció che é stato presentato in questo paragrafo riguardo al metodo $G - Theta$ si riferisce al metodo degli elementi finiti classici (MEF). Per adattare il metodo $G - Theta$ al quadro degli X-FEM, ci sono poche modifiche da apportare. La sola differenza risiede al livello delle integrazioni numeriche, per calcolare gli integrali di dominio. Per quello che riguarda l'integrazione delle matrici tangenti, si realizzano l'integrazione sui sotto-elementi.

2.4.6 Propagazione della fessura attraverso gli X-FEM

Un vantaggio conseguente all'adozione della metodologia X-FEM é la possibilitá di studiare diverse geometrie delle fessure sulla stessa maglia, cosa piú problematica nel caso in cui alle fessure dovessero essere affidate delle maglie. Si puó facilmente studiare l'evoluzione della fessura nel tempo.

1. Viene calcolata la fessura risultante da una propagazione per fatica secondo una legge di Parigi locale.

2. A partire dalla fessura a un istante dato e dai corrispondenti *stress intensity factors* vengono calcolati i *level sets* dopo l'avanzamento della fessura, poi la struttura dei dati viene arricchita nei modi giaá menzionati.

Le differenti tappe della propagazione della fessura X-FEM hanno come obiettivo di calcolare la velocitá di avanzamento del fondo della fessura, di definire i *level sets* inerenti alla nuova geometria della fessura e assicurare che mantengano la distanza assegnata.

2.4.6.1 Calcolo del campo delle velocitá di propagazione

Le prime tappe consistono nel calcolare due campi di velocitá, normale e tangenziale, definenti l'evoluzione non associata dei due *level sets*. Questo permette di porsi in un quadro di propagazione in modo misto.

Velocitá di avanzamento del fondo della fessura
L'avanzamento del fondo della fessura in ognuno dei propri punti, si evolve nella base locale seguendo una legge di Parigi. La sua direzione é determinata attraverso il principio dello "maximum hoop stress criterion" utilizzato classicamente nella meccanica della frattura lineare elastica.

$$V = V_N \cdot e_1 + V_T \cdot e_2 \tag{2.34}$$

Dove:

$V = C \cdot G^m(\sin\beta \cdot e_1 + \cos\beta \cdot e_2$

$\beta = 2\arctan\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K_I}{K_{II}} - sign(K_{II})\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}\right)\right]$

Nella base locale (e_1 , e_2 , e_3)

Dove C e m sono delle caratteristiche del comportamento in fatica del materiale, G é il tasso di restituzione d'energia locale ricavato attraverso il metodo *G-Theta*, K_I e K_{II} sono gli *stress intensity factors* per il modo I e II, β é l'angolo di propagazione della fessura.

Tutti gli elementi appena descritti verranno calcolati con il medesimo operatore, il passo seguente sará affidato ad un altro operatore che avrá il compito di leggerli e propagare la fessura.

Campo della velocitá esteso alla maglia
Le velocitá normale e tangente sono note unicamente per i punti di intersezione entro il fondo della fessura e le facce degli elementi della maglia. Questi punti non sono dei nodi della maglia. Per la messa a giorno dei *level sets* dopo una propagazione, la velocitá dovrá essere conosciuta per ogni nodo della maglia. É dunque necessario che si estenda la velocitá a tutti i nodi della maglia a partire dai valori sul fondo della fessura. Per questo si proietta ogni nodo sul fondo della fessura in direzione normale e si assegna al nodo la velocitá del punto che é la proiezione del nodo.

Aggiustamento del campo di velocitá normale
Al fine di evitare lo spostamento della fessura preesistente, e fare evolvere lsn convenientemente, é necessario aggiustare il campo di velocitá normale. Si vuole avere una traiettoria della fessura relativamente liscia, tale che:

$$\overline{V}_N(lsn) = \begin{cases} 0 & se \quad lst \quad \leq 0 \\ V & se \quad lst \quad = V \cdot \Delta t \end{cases} \tag{2.35}$$

Il valore di Δt é uguale al tempo totale di integrazione delle equazioni di messa a giorno dei *level sets*.
Cosí, il fondo della fessura avanza bene secondo V_T e V_N calcolati in precedenza. In lst viene fatta un'approssimazione lineare.
La formula applicata su tutti i nodi della maglia é la seguente:

$$\overline{V}_N = h(lst) \cdot \frac{V_N \cdot lst}{V_T \Delta t} \tag{2.36}$$

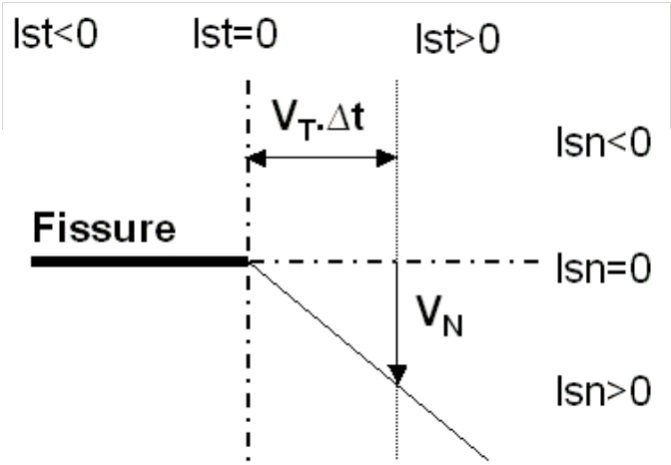


Figura 2.14: **Aggiustamento della velocitá normale.**

con

$$h(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \quad < 0 \\ 1 & se \quad x \quad > 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

Dove V_N e V_T sono i campi di velocitá nodali, e Δt il passo dei tempi scelti.

2.4.6.2 Messa a giorno dei *level sets*

Dopo la propagazione, la geometria della fessura cambia e i *level sets* dovranno evolvere per descrivere in modo adeguato la nuova geometria. I *level sets* si posso ricalcolare rapidamente utilizzando le equazioni di messa a giorno che descrivono la loro evoluzione in seguito alla propagazione della fessura. Nelle equazioni seguenti, si utilizzeranno i simboli φ_n , φ_t e φ per indicare rispettivamente il *level set* normale (lsn), il *level set* tangente (lst) e un *level set* in generale (lsn o lst).

Equazioni di messa a giorno
I *level sets* sono messi a giorno su tutti i nodi secondo l'equazione di Hamilton-Jacobi seguente:

$$\triangle\varphi_n = -(V_N \cdot \bigtriangledown\varphi_n) \cdot \triangle t \tag{2.38}$$

$$\triangle\varphi_t = -(V_T \cdot \bigtriangledown\varphi_t) \cdot \triangle t \tag{2.39}$$

dove φ é il *level set*, $\bigtriangledown\varphi$ é il suo gradiente e V_φ é la velocitá di propagazione del *level set* φ (V_T o V_N).
Il valore di $\triangle t$ da utilizzare nell'equazione di messa a giorno dei *level sets* puó essere calcolata a partire dall'avanzata massima $\triangle a_{max}$ della fessura fornita dall'utilizzatore:

$$\triangle t_{tot} = \frac{\triangle a_{max}}{max_{i \in fond} \parallel V(X_i) \parallel} \tag{2.40}$$

dove il vettore $V(X_i)$ é il vettore della velocitá di propagazione ($V = V_N + V_T$) di un punto x_i del fondo della fessura.

2.4.6.3 reinizializzazione e riortogonalizzazione dei *level sets*

Necessitá di mantenere le funzioni di distanza marcate
Le corso della loro evoluzione, i *level sets* devono necessariamente mantenere una definizione relativamente prossima delle funzioni distanza marcate.
La prima ragione sta nel calcolo degli *stress intensity factors* sul fondo della fessura con il metodo $G-Theta$, per i quali le coordinate polari (r , θ) sono definite nella base locale $r = \sqrt{lsn^2 + lnt^2}$ e $\theta = \arctan(lsn/lst)$; l'utilizzo delle distanze segnate per il calcolo delle coordinate polari é quindi necessario.
In piú, durante la propagazione della fessura, le equazioni di messa a giorno dei *level sets* mettono in gioco la norma dei gradienti dei *level sets*, che dovranno restare sufficientemente prossimi all'unitá, perché se $\mid \bigtriangledown\varphi \mid$ non vale 1, la fessura non non avanza con la velocitá V_φ definita.

Dopo la fase di messa a giorno, i *level sets* acquistano il loro senso di funzioni di distanza segnate, specialmente nel caso di una propagazione fuori piano (caso di una sollecitazione dove $K_{II} \neq 0$), che induce una velocitá normale (Figura 2.15)

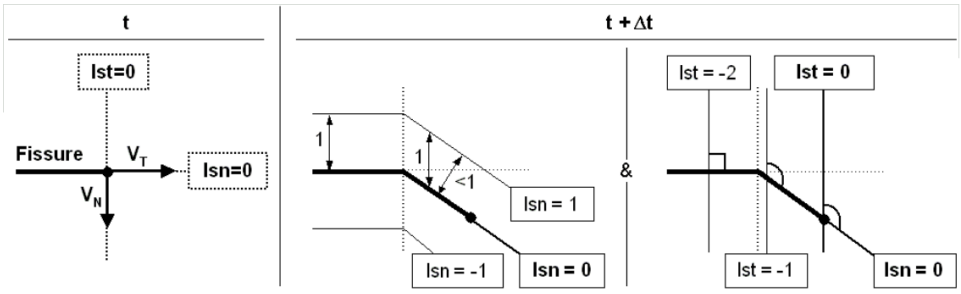


Figura 2.15: **Propagazione dei *level sets* con perdita delle funzioni di distanza segnate e d'ortogonalitá.**

Dopo la propagazione é dunque necessario passare per una fase detta di "reinizializzazione" dove lo scopo sará di minimizzare $|| \bigtriangledown lsn \mid -1 \mid$ e, $|| \bigtriangledown lst \mid -1 \mid$ quindi un passo di "riortogonalizzazione" dove l'obiettivo sará di minimizzare $\mid \bigtriangledown lsn \cdot \bigtriangledown lst \mid$. In effetti, i *level sets* non sono rigorosamente definiti se, in tutti i punti dello spazio, $\mid \bigtriangledown lsn \mid= 1$, $\mid \bigtriangledown lst \mid= 1$ e $\mid \bigtriangledown lsn \cdot \bigtriangledown lst \mid= 0$.

Equazione di Hamilton-Jacobi
Le equazioni di reinizializzazione e di riortogonalizzazione, dove l'biettivo é di minimizzare le quantitá $|| \bigtriangledown lst \mid -1 \mid$ e $\mid \bigtriangledown \varphi \cdot \bigtriangledown \psi \mid$, rispettivamente, sono espresse in funzione del tempo virtuale τ, che si evolverá verso uno stato stabile.

L'equazione di reinizializzazione del *level set* φ é:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -sign(\varphi) \cdot (\mid \bigtriangledown \varphi \mid -1) \tag{2.41}$$

Lequazione di riortogonalizzazione di φ_t in rapporto a φ_n é:

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \tau} = -sign(\varphi_n) \cdot \frac{\bigtriangledown \varphi_n}{\mid \bigtriangledown \varphi_n \mid} \cdot \bigtriangledown \varphi_t \tag{2.42}$$

Queste due equazioni si possono quindi mettere nella forma generale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + F(\bigtriangledown \phi, x) \cdot \mid \bigtriangledown \varphi \mid= f(x) \tag{2.43}$$

dove φ é il *level sets*, $\bigtriangledown \varphi$ é il gradiente e x la posizione nello spazio, con

$$F(\bigtriangledown \varphi, x) = sign(\varphi) \tag{2.44}$$

e

$$f(x) = sign(\varphi) \tag{2.45}$$

per la fase di reinizializzazione, e

$$F(\bigtriangledown \varphi, x) = sign(\psi) \cdot \frac{\bigtriangledown \psi}{\mid \bigtriangledown \psi \mid} \cdot \frac{\bigtriangledown \varphi}{\mid \bigtriangledown \varphi \mid} \tag{2.46}$$

e

$$f(x) = 0 \tag{2.47}$$

per la fase di riortogonalizzazione.

Una definizione rigorosa dei *level sets* non é stata necessaria che vicino a una zona localizzata attorno al fondo della fessura, la convergenza di queste equazioni saranno stimate per un residuo locale in un toro dove il raggio é un dato dell'utente che dovrá necessariamente essere piú grande del raggio superiore di integrazione del metodo $G-Theta$, per far si che i risultati siano corretti.

Schemi espliciti di risoluzione
Nel codice sono presenti due schemi di integrazione per la risoluzione delle equazioni di reinizializzazione e riortogonalizzazione. Il primo schema (metodo "Simplexe") puó essere applicato solamente agli elementi semplici (triangolo in 2D e tetraedro in 3D) e solo a certi elementi tipo esaedro. Il secondo schema (metodo "Upwind") putó essere applicato solamente a degli elementi rettangolari in 2D e esaedri in 3D a patto che certe condizioni di regolaritá siano verificate.
I metodi sono presentati esplicitamente in [3].

Capitolo 3

Esempi di elementi fessurati studianti con la metodologia X-FEM

Introduzione a Code-Aster

Code-Aster é il codice utilizzato per tutte le simulazioni numeriche presenti tale codice é sviluppato dal 1989 da EDF e R& D. Si tratta di un codice agli elementi finiti con applicazioni soprattutto nella meccanica dei solidi.

É scritto in oltre 1200000 righe di comando, il codice sorgente e le funzioni sono principalmente scritte in Fortran e C.

Circa il 10% invece é scritto in Python che é anche il linguaggio con il quale ci si interfaccia al momento della stesura del file di input, il quale consiste nell'immissione di un certo numero di comandi tra i quali vale la pena di ricordare:

- la lettura del file che fornisce la mash (la quale potrebbe essere creata con svariati codici di pre-processamento);
- il problema fisico che si intende studiare (meccanico, termico, acustico...);
- la risoluzione del problema per mezzo delle funzioni (scritte in Fortran e C);
- ed in fine il post-trattamento dei calcoli con successiva creazione del file di output che sará possibile analizzare attraverso diversi software.

La Figura 3.1 illustra l'architettura semplificata dl codice.

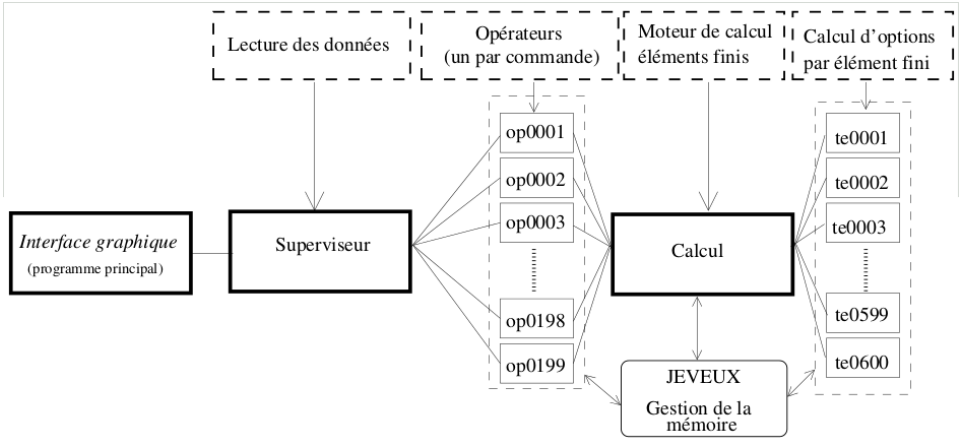


Figura 3.1: **Architettura globale di Code-Aster.**

3.1 Esempio 3: Piastra con una fessura emergente centrale

Questo esempio comporta una fessura centrale in un provino X-FEM. Si hanno quindi due fondi della fessura distinti. Si andrá quindi ha verificare la correttezza dei risultati su K_I sui due fondi separati attraverso la metodologia X-FEM.

3.1.1 Problema di riferimento

La struttura é una piastra 3D di dimensioni $L_x = B = 1\,m$, $L_y = 2 \cdot W = 10\,m$ e $L_z = 2 \cdot L = 20\,m$, con una fessura centrale piana di lunghezza $2 \cdot a = 2\,m$, centrata lungo i lati y e z e emergente lungo i lati nella direzione x (Figura 3.2).
I punti $PT1$ $(0, -W, 0)$, $PT2$ $(0, W, 0)$ e $PT3$ $(B, -W, 0)$ serviranno a bloccare i moti rigidi.
Le proprietá dei materiali sono:

Modulo di Young	E	=1 MPa
Coefficiente di Poisson	ν	=0

3.1.2 Modellazione: trazione uniforme

La fessura centrale di semi-lunghezza $a = 1\,m$ é rappresentata dai *level sets*:

$$\begin{cases} LSN & = z \\ LST & = \mid Y \mid - a \end{cases} \tag{3.1}$$

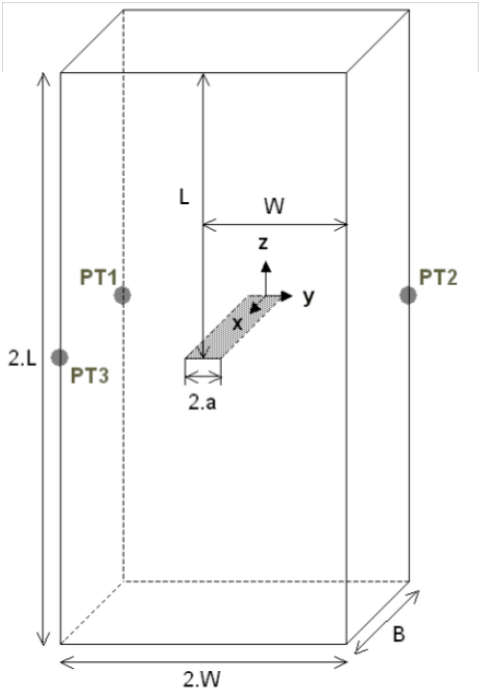


Figura 3.2: **Piastra con fessura centrale emergente.**

Il numero di elementi esterni sono 3 lungo X, 10 elementi lungo Y e 10 elementi lungo Z. Nella zona centrale di dimensioni $1\,x\,3\,x\,2$ contenente la fessura ($-1.5 < Y < 1.5$ e $-1 < Z < 1$) ha una maglia piú fine composta esclusivamente da elementi tipo esaedro regolare: 21 elementi lungo Y, 15 elementi lungo Z. Il numero totale di elementi é 3112 (Figura 3.3).
É stata applicata sulla faccia inferiore e superiore una carico di trazione sotto forma di pressione ripartita:

$\sigma_{zz} = 1\,Pa$

Per bloccare i moti rigidi sono stati applicati dei vincoli ai punti $PT1$, $PT2$ e $PT3$:

$PT1$	$PT2$	$PT3$
$DX_1 = 0$	$DX_2 = 0$	-
$DY_1 = 0$	-	-
$DZ_1 = 0$	$DZ_2 = 0$	$DZ_3 = 0$

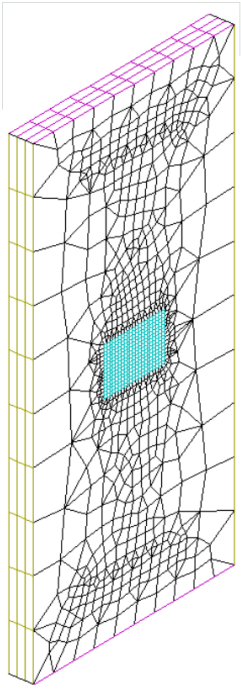


Figura 3.3: **Maglia con zona centrale raffinata.**

3.1.3 Soluzione analitica

La soluzione analitica del problema é:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) \tag{3.2}$$

con:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\frac{\pi a}{4W\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}}\left[1 - 0.025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0.06\left(\frac{a}{W}\right)^4\right] \tag{3.3}$$

e:

$$P = \sigma \cdot 2W \cdot B \tag{3.4}$$

Quindi:

$\sigma = 1\,Pa$, $B = 1\,m$, $a = 1\,m$, $W = 5\,m$

$f\left(\frac{a}{W}\right) = 0.406$

$K_I = 1.81584\,Pa\,\sqrt{m}$

3.1.4 Risultati ottenuti e Conclusioni

Si sono verificati i valori di K_I sui due fondi della fessura per differenti corone di integrazione. Si riportano di seguito i valori dei raggi inferiore e superiore del toroide che minimizzano la differenza con la soluzione analitica:

R_{inf}	0.1
R_{sup}	0.5

Per verificare tutti i nodi in fondo alla fessura in una sola volta, si testano il valore massimo e minimo di K_I su tutti i nodi in fondo alla fessura.

Fondo della fessura 1:

Identificazione	Aster	Riferimento	% differenza
Max (K_I)	1.82269	1.81584	0.377
Min (K_I)	1.81671	1.81584	0.047

Fondo della fessura 2:

Identificazione	Aster	Riferimento	% differenza
Max (K_I)	1.81623	1.81584	0.272
Min (K_I)	1.82078	1.81584	0.021

Nelle immagini (Figura 3.4) sono riportati i punti di Gauss della piastra totale e un ingrandimento della parte vicino alla fessura dove la maglia é stata raffinata.
I risultati ottenuti con i raggi R_{inf} e R_{sup} sopraindicati sembrerebbero indicare una differenza percentuale molto esigua, il che indicherebbe una buona implementazione del metodo con risultati attendibili. Si fa comunque notare la difficoltá nella scelta dei raggi, i quali rendono non molto stabile il procedimento a fronte di cambiamenti anche esigui.

3.2 Esempio 4: Elemento 3D con fessura sollecitata in modo I puro

Test sulla metodologia X-FEM attraverso l'estrapolazione dello Stress Intensity Factor K_I in un caso di propagazione della frattura in modo I puro.

3.2.1 Geometria

3.2.2 Propietá del materiale

Modulo di Young: $\mathbf{E = 2.05\,e7\ Ncm^{-2}}$
Coefficiente di Poisson : $\nu = \mathbf{0.0}$

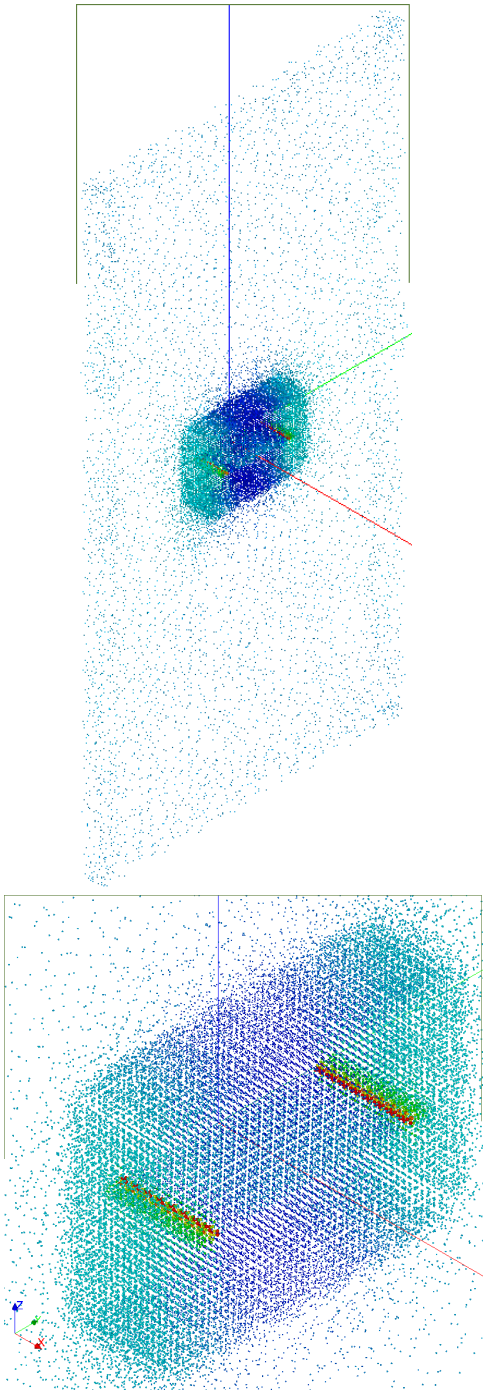


Figura 3.4: **Punti di Gauss della piastra con fessura centrale.**

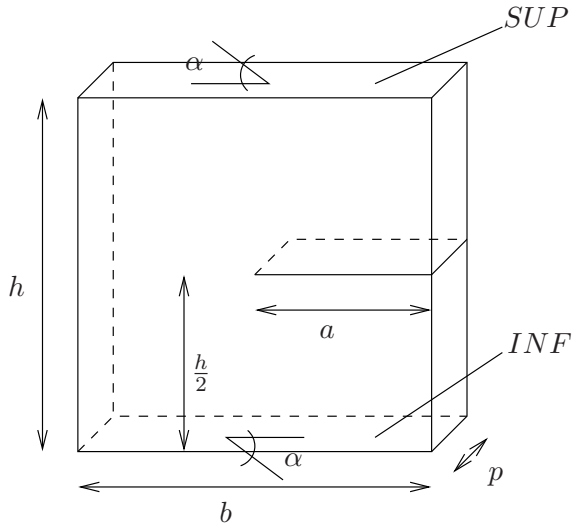


Figura 3.5: **Elemento 3D studiato. L'angolo α é l'inclinazione del carico uniformemente ripartito sulle superfici.**

h [cm]	b [cm]	p [cm]	a [cm]	α [deg]
10.0	10.0	1.0	5.0	0.00

Tabella 3.1: **Valori geometrici dell'elemento 3D.**

3.2.3 Carico imposto

É stato imposto un carico di trazione uniformemente ripartito sulle superfici SUP e INF: $P = 1.0\,e2\ Ncm^{-2}$, inclinato con angolo $\alpha = 90°$ che ha permesso di sollecitare la fessura in modo I puro.

3.2.4 Soluzione analitica del problema

Lo stress intensity factor K_I é stato calcolato con la seguente formula:

$$K_I = P\sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{b}\right) \tag{3.5}$$

Dove:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2b}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2} \frac{0.752 + 0.37\left(1 - \sin\frac{\pi a}{2b}\right)^3 + 2.02\frac{a}{b}}{\cos\frac{\pi a}{2b}} \tag{3.6}$$

3.2.5 Modellazione della struttura

La struttura é stata modellata con una maglia regolare (Figura 3.6) composta da 3240 esaedri per un totale di 4123 nodi:

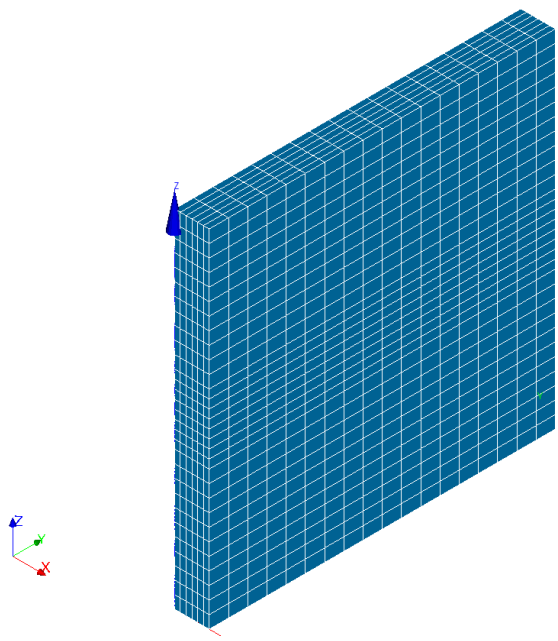


Figura 3.6: **Maglia della struttura**

3.2.6 Grandezze misurate e risultati ottenuti

Attraverso il Software Code Aster sono stati estrapolati i valori massimi e minimi di K_I sui nodi all'estremitá della fessura, poi confrontati con i risultati analitici ottenuti attraverso la (3.5) :

Valori	Aster	Reference	differenza [%]
MAX K_I	1.139 e3	1.120 e3	1.69
MIN K_I	1.138 e3	1.120 e3	1.61

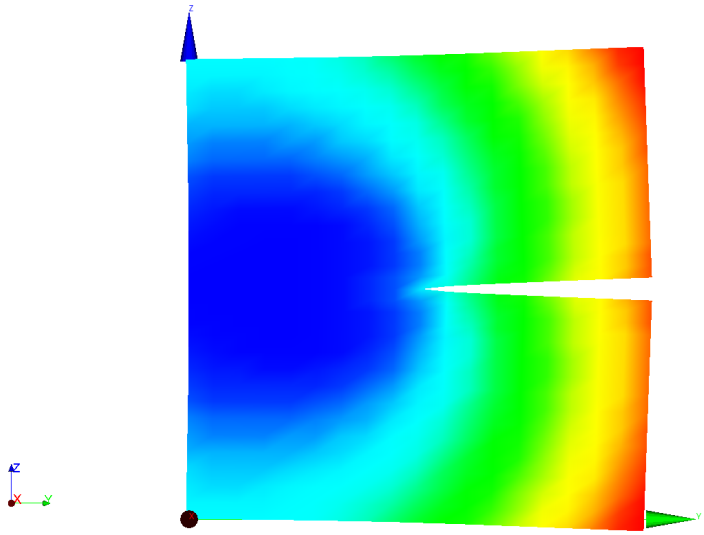


Figura 3.7: **Maglia ottenuta come output.**

3.2.7 Propagazione della fessura

Il problema é stato affrontato iterando il procedimento 2 volte, valutando la direzione della propagazione della fessura β e lo stress intensity factor K_I ad ogni iterazione.

Il codice di calcolo per valutare l'angolo di propagazione ha utilizzato la seguente formula:

$$\beta = 2\arctan\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{K_I}{K_{II}} - sign(K_{II})\cdot\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}\right)\right] \tag{3.7}$$

All'istante iniziale si avrá $a = 5.0\,m$, alla prima iterazione $\Delta a = 0.5\,m \rightarrow a = 5.5\,m$, alla seconda iterazione $\Delta a = 1.2\,m \rightarrow a = 6.7\,m$. I diversi valori di a verranno utilizzati nella (3.5) per il calcolo della soluzione analitica

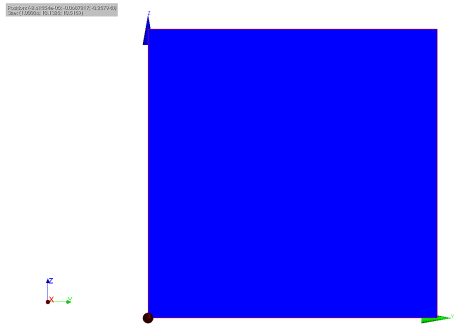
Istante	Aster	Reference	differenza [%]	Angolo β [Deg]
Iniziale MAX (K_I)	1.139 e3	1.120 e3	1.70	0.0376
Iniziale MIN (K_I)	1.138 e3	1.120 e3	1.61	0.0000
Iterazione 1 MAX (K_I)	1.385 e3	1.392 e3	-0.50	0.1207
Iterazione 1 MIN (K_I)	1.375 e3	1.392 e3	-1.22	-0.2922
Iterazione 2 MAX (K_I)	2.550 e3	2.517 e3	1.30	8.5118
Iterazione 2 MIN (K_I)	2.401 e3	2.517 e3	-4.61	12.2472

Tabella 3.2: **Valori dello Stress Intensity Factor K_I minimi e massimi sul fondo della fessura e angolo di propagazione.**

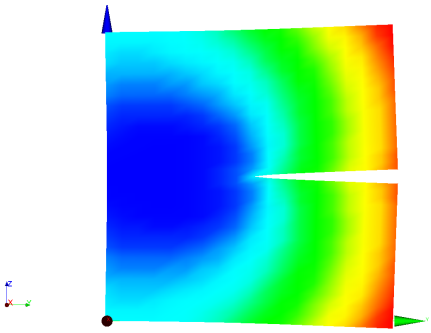
Nelle figure seguenti: propagazione della fessura alle diverse iterazioni

3.2.8 Conclusioni

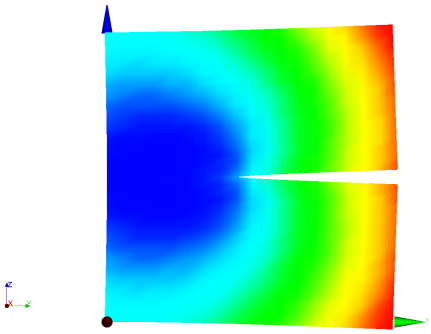
I risultati ottenuti differiscono per valori quasi sempre inferiori al 2%, anche se con l'aumentare delle iterazioni sembrerebbero aumentare. I risultati ottenuti, sia nel caso senza che nel caso con propagazione sono comunque soddisfacenti.



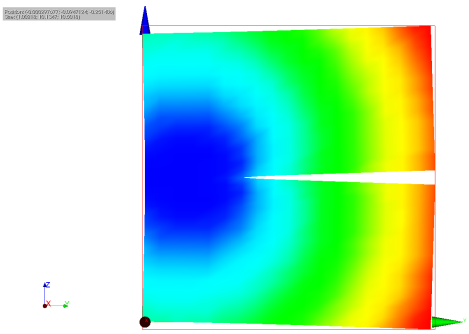
(a) **Istante 0**



(b) **Istante iniziale**



(c) **Iterazione 1**



(d) **Iterazione 2**

3.3 Esempio 5: Propagazione di una fessura attraverso gli X-FEM in una piastra in flessione con tre fori

Con questo esempio si vorrebbe verificare la traiettoria di propagazione di una fessura attraverso gli X-FEM in 2D, in un contesto di elasticitá lineare.

Questo test prende in considerazione una piastra rettangolare con tre fori con una fessura giá innescata e soggetta a flessione.

3.3.1 Problema di riferimento

3.3.1.1 Geometria

La geometria, le dimensioni e i materiali sono identici al problema studiato da Bittencourt *et al.* [1], riportato in forma estesa in (A), e Ventura *et al.* [2]

I nodi P_1, P_2 e P_3 nella Figura (3.8) hanno lo scopo di imporre le condizioni ai limiti meglio specificate nel paragrafo [3.3.1.3].

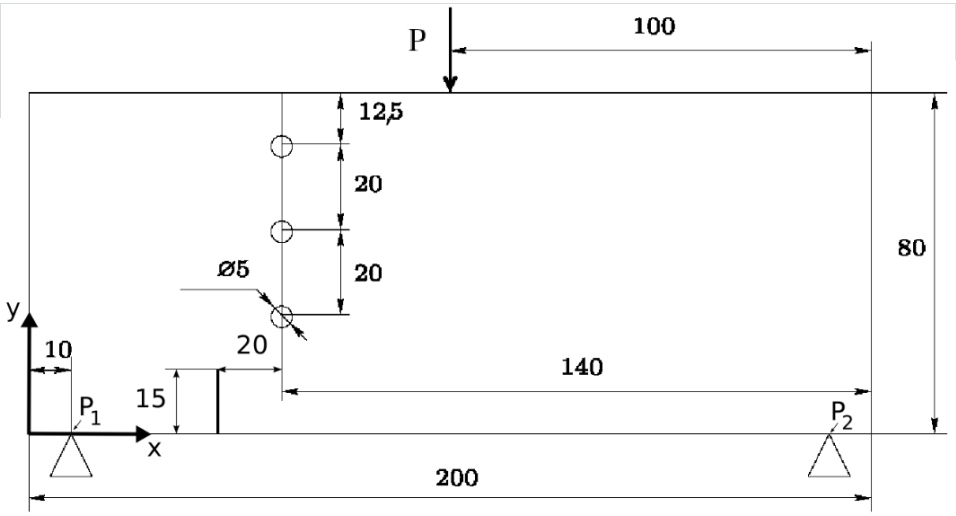


Figura 3.8: **Geometria della piastra fessurata.**

3.3.1.2 Proprietá del materiale

Modulo di Young:	$E = 205000\,MPa$
Coefficiente di Poisson:	$\nu = 0.3$

3.3.1.3 Carichi e condizioni ai limiti

Il carico consiste nell'applicare una forza nodale in P_3 come indicato in figura.

Per bloccare i moti rigidi sono stati bloccati gli spostamenti dei nodi P_1 e P_2 come mostrato:

$$\begin{aligned} DY^{P_1} = \quad DY^{P_2} = \quad 0; \\ DX^{P_1} = \quad 0. \end{aligned}$$

3.3.1.4 Soluzione di riferimento

Verrá comparata la traiettoria della propagazione in rapporto alla traiettoria sperimentale trovata nell'articolo [1].

Le espressioni di riferimento per gli *stress intensity factors* K_I e K_{II} sono quelle giá presentate nei capitoli precedenti.

Per la propagazione della fessura il codice utilizza una legge di propagazione di Parigi:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \tag{3.8}$$

dove a é la lunghezza della fessura, C e m sono delle costanti del materiale, ΔK é la differenza tra due *stress intensity factors* consecutivi e N é il numero di cicli.

Il criterio di biforcazione utilizzato é il *maximum hoop stress criterion*:

$$\beta = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - sign(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \tag{3.9}$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori numerici del test, con le seguenti caratteristiche:

Passo di propagazione:	$0.1\,m$
Numero passi di propagazione:	40
x_0:	$5\,mm$
y_0:	$1.5\,mm$
RI:	$0.1\,mm$
RS:	$0.2\,mm$

Riferimento			
$x(mm)$	$y(mm)$	$K_I(MPa.m^{0,5})$	$K_{II}(MPa.m^{0,5})$
5	1.5	$4.90334\ 10^{-1}$	$7.2180\ 10^{-2}$
5.0277	1.5961	$5.4164\ 10^{-1}$	$-7.8863\ 10^{-3}$
5.0526	1.6929	$5.71159\ 10^{-1}$	$2.0395\ 10^{-2}$
5.0843	1.7877	$5.88275\ 10^{-1}$	$-7.309\ 10^{-3}$
5.1137	1.8832	$6.08267\ 10^{-1}$	$1.4266\ 10^{-2}$
5.1475	1.9773	$6.34446\ 10^{-1}$	$-4.1631\ 10^{-3}$
5.1801	2.0719	$6.62529\ 10^{-1}$	$1.1236\ 10^{-2}$
5.2159	2.1652	$7.00625\ 10^{-1}$	$-3.9202\ 10^{-3}$
5.2506	2.259	$7.2436\ 10^{-1}$	$1.1655\ 10^{-2}$
5.2883	2.3516	$7.61906\ 10^{-1}$	$5.4198\ 10^{-3}$
5.3274	2.4437	$7.98333\ 10^{-1}$	$1.3873\ 10^{-2}$
5.3696	2.5344	$8.4336\ 10^{-1}$	$1.3498\ 10^{-2}$
5.4147	2.6236	$8.50898\ 10^{-1}$	$2.5893\ 10^{-2}$
5.4651	2.71	$9.18127\ 10^{-1}$	$1.8677\ 10^{-2}$
5.519	2.7942	$9.41997\ 10^{-1}$	$3.3165\ 10^{-2}$
5.5786	2.8745	$9.11535\ 10^{-1}$	$3.9466\ 10^{-2}$
5.645	2.9494	$8.2679\ 10^{-1}$	$1.2450\ 10^{-2}$
5.7136	3.0222	$7.51207\ 10^{-1}$	$-3.8778\ 10^{-2}$
5.7743	3.1016	$7.76455\ 10^{-1}$	$-6.5342\ 10^{-2}$
5.8213	3.1901	$8.92135\ 10^{-1}$	$-4.3764\ 10^{-2}$
5.8593	3.2826	1.0055	$-3.7837\ 10^{-3}$
5.8967	3.3754	1.07243	$7.3624\ 10^{-3}$
5.9353	3.4676	1.13317	$3.5436\ 10^{-3}$
5.9745	3.5596	1.19467	$1.5095\ 10^{-3}$
6.0139	3.6515	1.25416	$1.3022\ 10^{-2}$
6.0552	3.7426	1.3016	$-5.8247\ 10^{-3}$
6.0957	3.834	1.38627	$-1.9916\ 10^{-3}$
6.1359	3.9256	1.41962	$3.218\ 10^{-3}$
6.1766	4.0169	1.51335	$-1.3581\ 10^{-2}$
6.2156	4.109	1.59619	$-1.8028\ 10^{-2}$
6.2525	4.2019	1.68528	$-3.8018\ 10^{-2}$
6.2852	4.2965	1.77266	$-4.6999\ 10^{-2}$
6.3129	4.3926	1.80261	$-6.4363\ 10^{-2}$
6.3335	4.4905	1.79629	$-1.3149\ 10^{-1}$
6.3401	4.5904	1.57594	$-7.2675\ 10^{-2}$
6.3374	4.6906	1.07025	$7.2468\ 10^{-2}$
6.3486	4.7898	1.15541	$2.0623\ 10^{-1}$
6.3908	4.8809	1.7031	$2.5108\ 10^{-2}$
6.436	4.9703	1.88524	$3.6115\ 10^{-2}$
6.4845	5.0577	2.04897	$-4.2545\ 10^{-2}$
65293	5.1471	2.07763	$3.4851\ 10^{-2}$

3.3.2 Modellazione e risultati ottenuti

La struttura é modellata con 4440 elementi triangolari di dimensioni diverse, con con la zona vicino alla fessura piú fitta rispetto alle zone piú distanti (Figura 3.9). La fessura é rappresentata da un *level-set* normale e uno tangente:

$$LSN = x - 40 = 0 \tag{3.10}$$

$$LSN = 0 \cap LST = y - 15 < 0 \tag{3.11}$$

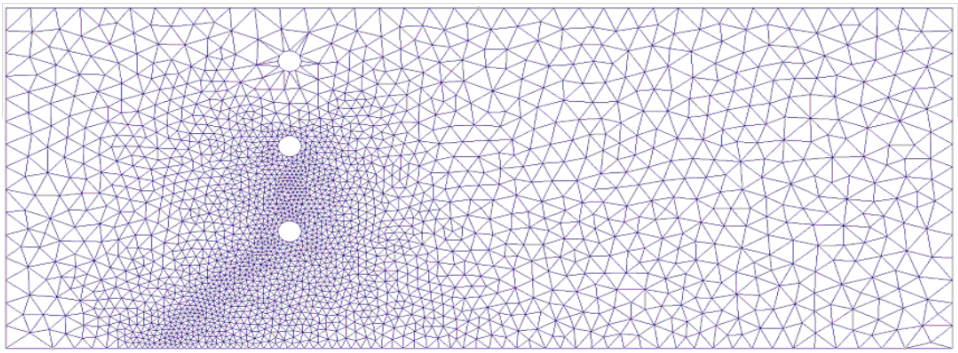


Figura 3.9: **Valori di riferimento per K_I e K_{II}.**

Per ogni passo di propagazione, é stato testato il valore degli *stress intensity factors* K_I e K_{II} ricavati dall'analisi.
Nelle tabelle che seguono si riportano i valori di K_I e K_{II} e le relative differenze con il test di riferimento

3.3.3 Sintesi dei risultati e Conclusioni

Verranno comparati i risultati ottenuti da Bittencourt [1] con i risultati ottenuti con Code-Aster.
La Figura 3.10 mostra la propagazione ottenuta da Bittencourt e la comparazione di quest'ultima con i risultati osservati.
La traiettoria (Figure 3.11 , 3.12) é fedele ai risultati dell'articolo. Sperimentalmente si nota che fessura si arresta all'altezza del secondo foro. Questo risultato lo si puó notare anche nell'analisi numerica effettuata. Nel complesso i risultati sono pienamente concordi alla soluzione numerica e sperimentale dell'articolo

	Code_Aster	Riferimento	Differenza
KI_1	4,90334 10^{-1}	4,90334 10^{-1}	-
KI_2	5,4164 10^{-1}	5,4164 10^{-1}	-
KI_3	5,71159 10^{-1}	5,71159 10^{-1}	-
KI_4	5,88275 10^{-1}	5,88275 10^{-1}	-
KI_5	6,08267 10^{-1}	6,08267 10^{-1}	-
KI_6	6,34446 10^{-1}	6,34446 10^{-1}	-
KI_7	6,62529 10^{-1}	6,62529 10^{-1}	-
KI_8	7,00625 10^{-1}	7,00625 10^{-1}	-
KI_9	7,2436 10^{-1}	7,2436 10^{-1}	-
KI_10	7,61906 10^{-1}	7,61906 10^{-1}	-
KI_11	7,98333 10^{-1}	7,98333 10^{-1}	-
KI_12	8,4336 10^{-1}	8,4336 10^{-1}	-
KI_13	8,50898 10^{-1}	8,50898 10^{-1}	-
KI_14	9,18127 10^{-1}	9,18127 10^{-1}	-
KI_15	9,41997 10^{-1}	9,41997 10^{-1}	-
KI_16	9,11535 10^{-1}	9,11535 10^{-1}	-
KI_17	8,2679 10^{-1}	8,2679 10^{-1}	-
KI_18	7,51207 10^{-1}	7,51207 10^{-1}	-
KI_19	7,76455 10^{-1}	7,76455 10^{-1}	-
KI_20	8,92135 10^{-1}	8,92135 10^{-1}	-
KI_21	1,0055	1,0055	-
KI_22	1,07243	1,07243	-
KI_23	1,13317	1,13317	-
KI_24	1,19467	1,19467	-
KI_25	1,25416	1,25416	-
KI_26	1,3016	1,3016	-
KI_27	1,38627	1,38627	-
KI_28	1,41962	1,41962	-
KI_29	1,51335	1,51335	-
KI_30	1,59619	1,59619	-
KI_31	1,68528	1,68528	-
KI_32	1,77266	1,77266	-
KI_33	1,80261	1,80261	-
KI_34	1,79629	1,79629	-
KI_35	1,57594	1,57594	-
KI_36	1,07025	1,07025	-
KI_37	1,15541	1,15541	-
KI_38	1,7031	1,7031	-
KI_39	1,88524	1,88524	-
KI_40	2,04897	2,04897	-

	Code_Aster	Riferimento	Differenza
KII_1	7,2180 10^{-2}	7,2180 10^{-2}	-
KII_2	-7,8863 10^{-3}	-7,8863 10^{-3}	-
KII_3	2,0395 10^{-2}	2,0395 10^{-2}	-
KII_4	-7,309 10^{-3}	-7,309 10^{-3}	-
KII_5	1,4266 10^{-2}	1,4266 10^{-2}	-
KII_6	-4,1631 10^{-3}	-4,1631 10^{-3}	-
KII_7	1,1236 10^{-2}	1,1236 10^{-2}	-
KII_8	-3,9202 10^{-3}	-3,9202 10^{-3}	-
KII_9	1,1655 10^{-2}	1,1655 10^{-2}	-
KII_10	5,4198 10^{-3}	5,4198 10^{-3}	-
KII_11	1,3873 10^{-2}	1,3873 10^{-2}	-
KII_12	1,3498 10^{-2}	1,3498 10^{-2}	-
KII_13	2,5893 10^{-2}	2,5893 10^{-2}	-
KII_14	1,8677 10^{-2}	1,8677 10^{-2}	-
KII_15	3,3165 10^{-2}	3,3165 10^{-2}	-
KII_16	3,9466 10^{-2}	3,9466 10^{-2}	-
KII_17	1,2450 10^{-2}	1,2450 10^{-2}	-
KII_18	-3,8778 10^{-2}	-3,8778 10^{-2}	-
KII_19	-6,5342 10^{-2}	-6,5342 10^{-2}	-
KII_20	-4,3764 10^{-2}	-4,3764 10^{-2}	-
KII_21	-3,7837 10^{-3}	-3,7837 10^{-3}	-
KII_22	7,3624 10^{-3}	7,3624 10^{-3}	-
KII_23	3,5436 10^{-3}	3,5436 10^{-3}	-
KII_24	1,5095 10^{-3}	1,5095 10^{-3}	-
KII_25	1,3022 10^{-2}	1,3022 10^{-2}	-
KII_26	-5,8247 10^{-3}	-5,8247 10^{-3}	-
KII_27	-1,9916 10^{-3}	-1,9916 10^{-3}	-
KII_28	3,218 10^{-3}	3,218 10^{-3}	-
KII_29	-1,3581 10^{-2}	-1,3581 10^{-2}	-
KII_30	-1,8028 10^{-2}	-1,8028 10^{-2}	-
KII_31	-3,8018 10^{-2}	-3,8018 10^{-2}	-
KII_32	-4,6999 10^{-2}	-4,6999 10^{-2}	-
KII_33	-6,4363 10^{-2}	-6,4363 10^{-2}	-
KII_34	-1,3149 10^{-1}	-1,3149 10^{-1}	-
KII_35	-7,2675 10^{-2}	-7,2675 10^{-2}	-
KII_36	7,2468 10^{-2}	7,2468 10^{-2}	-
KII_37	2,0623 10^{-1}	2,0623 10^{-1}	-
KII_38	2,5108 10^{-2}	2,5108 10^{-2}	-
KII_39	3,6115 10^{-2}	3,6115 10^{-2}	-

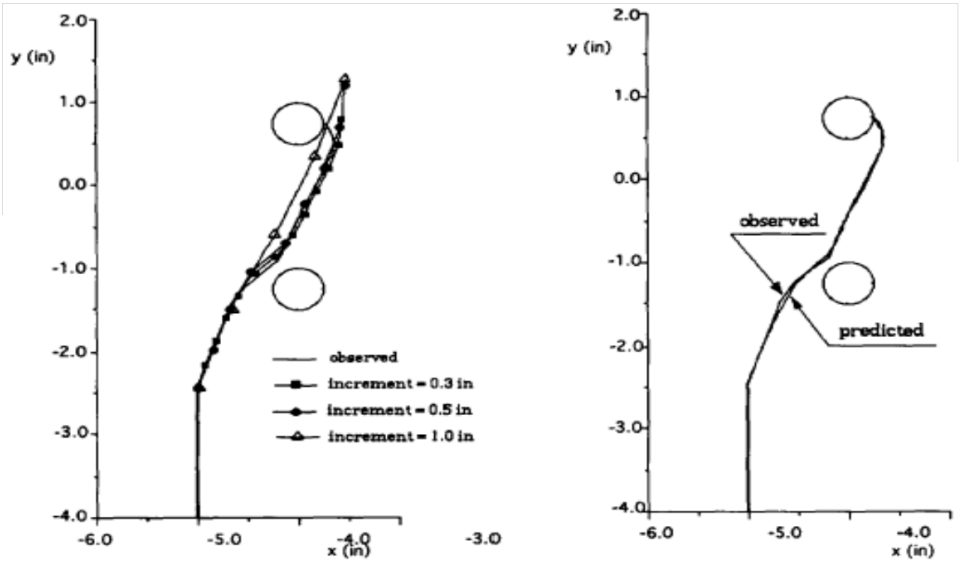


Figura 3.10: **Risultati derivanti dall'articolo di Bittencourt.**

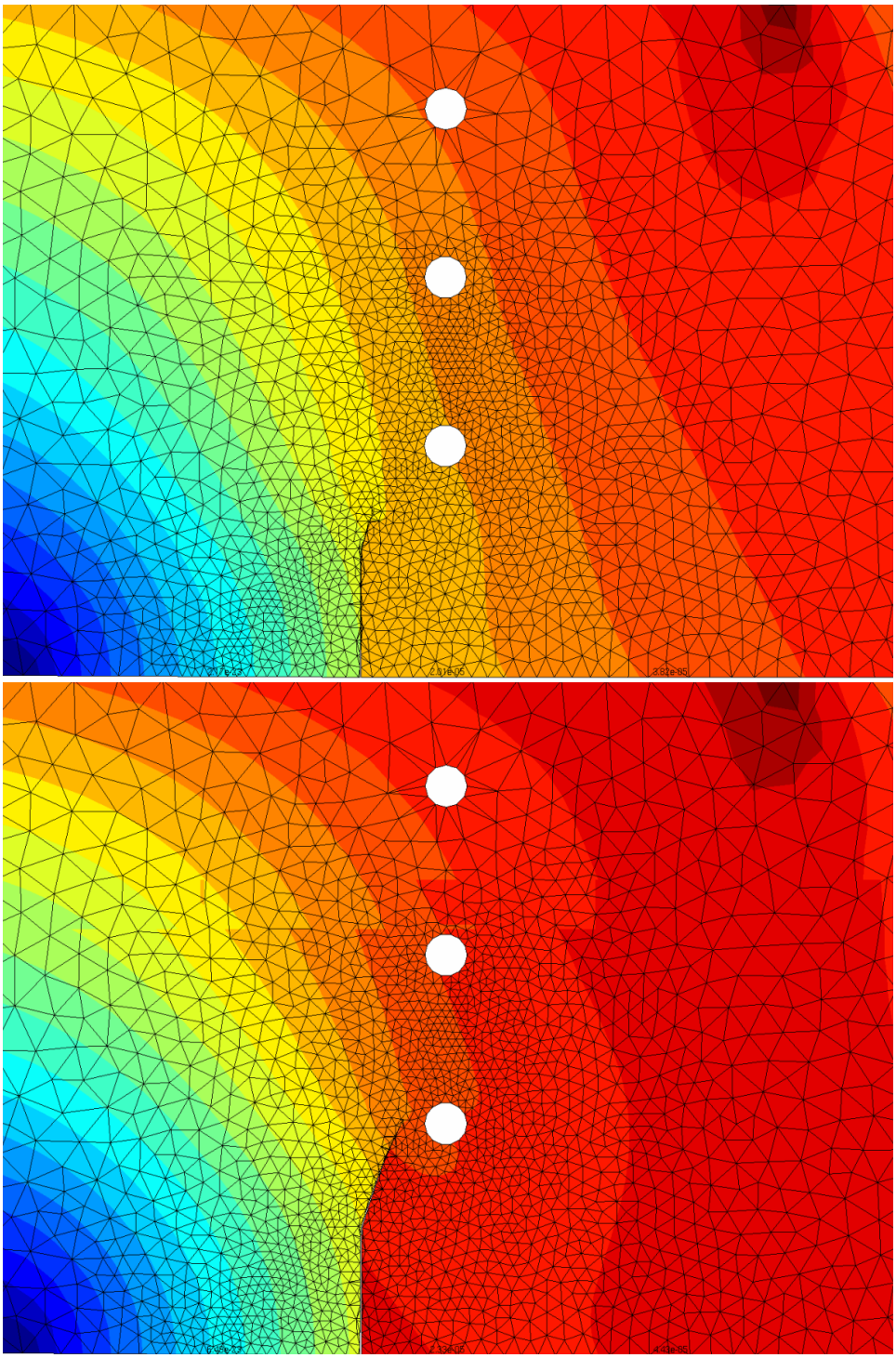


Figura 3.11: **Risultati derivanti dall'implementazione numerica.**

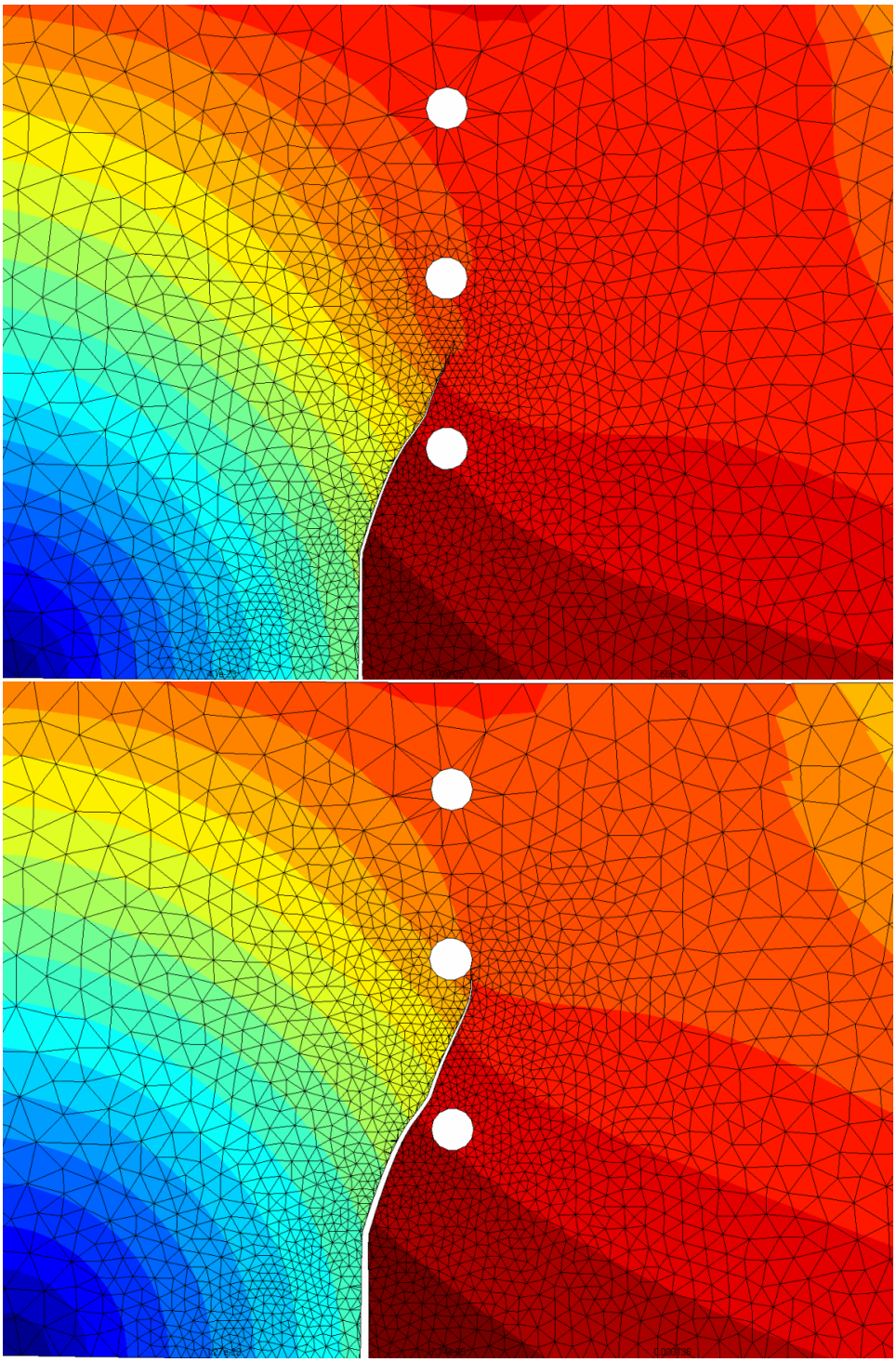


Figura 3.12: **Risultati derivanti dall'implementazione numerica.**

Appendice A

Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems

Di seguito viene riportato, in lingua originale, l'esempio preso in considerazione nellla sezione 3.3 e presente in forma completa in [1].

A.1 Introduction

There are situations in which it is desirable to predict trajectory and load history of a propagating crack under LEFM conditions. Examples include some cases of fatigue crack propagation, and quasi-stable crack growth under compressive loading. There are currently two fundamentally different approaches to such a prediction. The analytical approach, such as that contained in NASCRAC and NASA/FLAGRO for fatigue crack growth, employs known solutions for Kt as a function of crack length to generate crack growth predictions. Such predictions are therefore limited to self-similar crack growth. Further, the analytical solutions are available for only a limited set of combinations of geometries and boundary conditions.
An alternative approach is to use FEM or BEM methods to create a system that is essentially a generalized stress intensity factor calculator for arbitrary geometries and boundary conditions. Such a system produces a numerical stress intensity vs crack length relationship which can then be used in conjunction with a crack growth rate model, as is done in the analytical approach, to predict crack length and stability over time. Currently perceived drawbacks to such an approach are:

1. A numerical model must be generated, say finite element, which will require more computing capability than the analytical approaches.

2. The mesh representation of the model will have to be incrementally changed to accommodate crack extension.

In this paper the second approach, much more general and flexible, is employed. However, improvements are introduced to avoid or minimize the drawbacks mentioned before. The FRANC2D (FRacture ANalysis Code 2D) system has been developed as an implementation of the improvements and new concepts necessary to apply effectively the chosen approach. FRANC2D is a workstation-based, two-dimensional finite element code for simulating the behavior of solids containing cracks [3-5]. The system employs an underlying winged-edge data structure, in which the topology of the finite element mesh is used to describe the geometry of the model. In this environment, a local modification to the mesh, like the one required when a crack propagates, can be performed without losing unaffected structural information.
The following sections describe how the quasi-automatic procedure is designed and implemented. A validation of the procedure is then illustrated by the accurate simulation of curvilinear crack propagation in polymethylmethacrylate (PMMA) beams for which experimental results are available.

A.2 Solution strategy

The overall solution strategy rests on four main capabilities:

1. Automatic mesh generation for arbitrary regions into which a crack is propagating;

2. Automatic and accurate calculation of mixed-mode stress intensity factors;

3. Automatic calculation of local stability and incremental trajectory for mixed-mode cracks; and

4. Integration and control of these representational and mechanics processes through a winged-edge, topological data structure.

During the process of crack propagation, incremental changes in crack length require local remeshing. Reliable triangulation algorithms have been implemented in FRANC2D to generate a transition mesh between the elongating crack path and the unaffected portion of the mesh. These algorithms are virtually instantaneous and require no user interaction. This is one of the key points in the automation of the propagation process. Three different approaches to the automatic calculation of stress intensity factors have been implemented in FRANC2D: the displacement correlation technique, the modified crack closure integral, and the equivalent domain version of the elastic J-integral. All three methods can produce accurate results. However,

experience to date with FRANC2D has shown that, for cracks of arbitrary geometry under complex mixed-mode loading, and absent convergence checking, the latter two techniques are approximately equivalent and more reliable than the former. Presently, the maximum circumferential stress, the maximum potential energy release rate, and the minimum strain energy density theories which account for mixed-mode interaction in the determination of crack stability and direction of propagation at each step are implemented. The features described above can be integrated so that crack propagation can be modeled with minimum user interaction. A fully automatic strategy would be one with no user interaction. The present approach is said to be quasi-automatic only because the user still needs to provide a desired crack length increment at the beginning of each simulation.

A.3 Methodology for quasi-automatic crack propagation

Quasi-automatic simulation of propagation is characterized by successive steps. Each step consists of:

- one finite element analysis;
- computation of stress intensity factors;
- determination of direction of crack extension and new tip location;
- local deletion of finite elements along the crack path;
- updating of crack geometry;
- automatic remeshing.

Each of these steps is performed without user interaction. The structural analysis method is a standard direct stiffness FEM approach, with quadratic order isoparametric elements. Linear elasticity is assumed during the propagation process. Assuming an initial crack, one can then compute stress intensity factors from results of the analysis. Quarter-point elements are used to capture the stress-strain singularity at the crack tip using the specified calculation technique.
The computed stress intensity factors are then employed to determine the next configuration in the propagation process. This is done in two sub-steps:

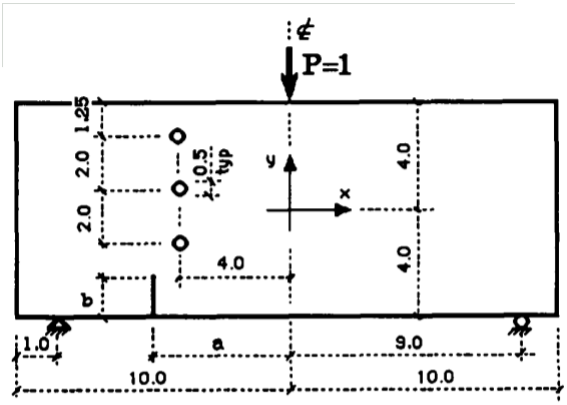
1. Inserting the stress intensity factors into the selected mixed-mode theory which predicts the incremental change in angle of propagation, and determines local stability. The user is given the choice of having FRANC2D terminate the simulation when stability is sensed, i.e. effective stress intensity falls below effective toughness, or continuing to obtain a stress intensity factor vs crack length history.

2. If the crack is not stable, or if stability is not being checked, the location of the new crack-tip is required. Since the new propagation direction has already been computed, the new crack tip location is fully determined by an increment of crack propagation. This increment is specified by the user, taking into account the degree of accuracy in the determination of the crack trajectory adequate to each problem. In situations where relatively high ratios of K Kt are expected, or in regions of high stress intensity factor gradient, it is appropriate to reduce the increment size to improve accuracy. Excessive increment sizes in such situations may lead to cumulative distortion in the propagation path. In the absence of a user specification, FRANC2D uses a default length for the crack increment, which is based on a fraction of the initial crack length. This fraction also considers the current degree of mesh refinement in order to maintain a similar discretization in the crack tip region.

The modeling of the evolving geometry resulting from these steps can be performed efficiently because of an underlying winged-edge data structure. This data structure uses the topology of the finite element mesh to describe the model geometry. Topology describes the relationships among the different topological entities, e.g. vertices, edges and faces. These relationships provide fast and consistent adjacency queries which permit controlled local modifications of the mesh. The capability of locally changing the mesh in a confined region along the crack propagation path enables the tracing of crack evolution without any loss of any unaffected structural information such as geometry, material properties and boundary conditions. This is a key issue for the automatic updating of the model. This process is illustrated next. Figure ! shows the steps involved in modifying the local geometry and mesh. First, elements along the incremental crack path are removed, and a temporary topological entity, a remeshing face, is created. Note that, in general, this face is an arbitrary polygon containing a crack. The crack is then extended to the new tip location. The geometry updating is now complete, but it is still necessary to rebuild the finite element mesh locally for the next step of propagation. Quarter-point singular elements are placed around the tip in a uniform rosette pattern. A triangulation algorithm adapted from is then used to generate the mesh in the remeshing face to transition from the crack to the unaffected portion of the mesh. Finally, the transition mesh is incorporated into the data base. After the creation of the finite element mesh for the new configuration, the model is ready for a new cycle of propagation. Since a stable and efficient local remeshing algorithm is a key element to the overall simulation process, additional details concerning it are presented next.

A.4 Examples of application

The described strategy is applied to model the propagation of cracks from initial notches in PMMA beams (Fig. 7). Experimental results for these plates have been obtained at Cornell University [7]. The presence of holes in the plates disturbs the stress/strain fields providing interesting curvilinear crack trajectories. These paths were found to be highly dependent on the initial notch geometry. Therefore, two different initial configurations were selected for the two examples considered here (Fig. 7). Digitized photographs of the cracked specimen geometries are presented in Fig. 8(a) and (b) for examples 1 and 2, respectively.

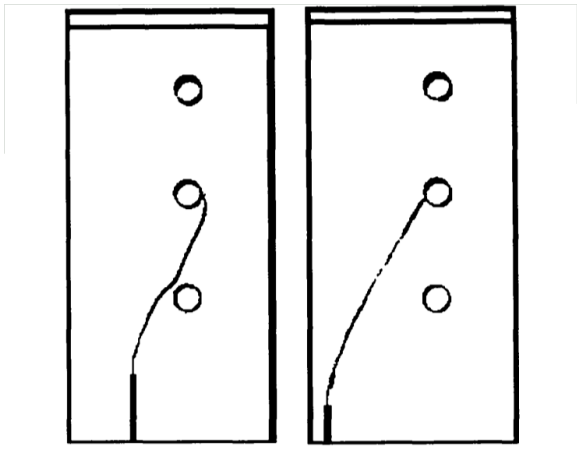


Specimen	a	b
Example 1	5.0	1.5
Example 2	6.0	1.0

Fig. 7. Initial geometry of specimens. All dimensions in inches.

A.4.1 Results for Example 1

A comparison between the observed and predicted crack trajectories for Example 1 is first presented. As mentioned earlier, the crack increment is the only arbitrary parameter in the simulation. The convergence of the procedure with respect to the crack increment is illustrated in Fig. 9(a). Improvement in matching experimental results is achieved when the step size is reduced from 1.0 in. to 0.5 in. and 0.3 in. Further improvement is achieved when the increment is reduced in the regions where the ratio of K_{II}/K_I is relatively high, where high here means absolute value greater than zero and less than about one-tenth. These regions are near both holes. Using a variable increment from 0.3 in. to 0.05 in., it was possible to match very accurately the crack path in the region where the experimental results show the crack intersecting the hole [Fig. 9(b)].



(a) (b)

Fig. 8. Digitized photographs of observed crack trajectory: (a) Example 1, (b) Example 2.

A.4.2 Results for Example 2

The crack trajectory was also predicted for configuration. A comparison between observed and Fig. 10. In this case the influence of the upper hole are such that a relatively large increment still yields Example 2 with a different initial notch predicted crack trajectories is presented in and the direction of approach of the crack very good results.

A.4.3 Effects of method for computing stress intensities and trajectory

The quasi-automatic procedure can be used to compute stress intensity factor histories. In addition, the effects on crack trajectory of the different stress intensity factor calculation methods and the different mixed-mode theories can be assessed. Such assessments were performed for Example 1.
Use of the three mixed-mode interaction theories, with a consistent use of the modified crack closure integral technique, resulted in crack paths with no significant differences, as shown in Fig. 11.
The crack paths obtained by different techniques for stress intensity factor computation were also very close to each other (Fig. 12), However, the values of stress intensity factors differed somewhat when the crack was in the neighborhood of a hole, as shown in Figs 13 and 14.
The features for automatic remeshing of the region around the crack path are illustrated in Figs 15 and 16(a) and (b). Details of the initial mesh are presented in Fig. 15. Details of two successive steps of propagation for the crack tip in the neighborhood of the lower hole are presented in Fig. 16(a) and (b).

A.5 Discussion of results

The following observations are based on the results of the comparison with experiments presented here and on other applications:

- the simulation strategy has proved to be robust for several example applications. In particular, the algorithm for automatic remeshing produces very regular meshes in the neighborhood of the crack path;
- since the direction of crack extension is determined automatically, error involuntarily introduced formerly by the user in indicating a new crack tip location is reduced;
- time spent by the user to determine the propagation path is considerably reduced by the automation, thus allowing a larger number of analyses with smaller steps, increasing the degree of confidence in the results;
- although quasi-automatic, the system still allows the user to control the process, for instance, by changing the size of the crack propagation increment, interactively modifying the generated mesh, or viewing intermediate results;
- the three different techniques for computation of stress intensity factors produce very similar results;
- the three theories for mixed-mode interaction result in very similar predictions of trajectory;
- trajectories predicted with different propagation increment sizes show convergence to experimental observation. Even in the region where the observed crack curves sharply to intersect a hole, the use of reduced increment size enables an accurate match between experimental and numerical results.

The simulations performed in Examples 1 and 2 involved finite element models with between 1000 and 2000 degrees-of-freedom. With a current generation engineering workstation, each step of propagation takes only a few seconds of CPU time. After creation of the initial finite element model, the results shown in Fig. 10, for example, can be produced in about 5 min.
The examples shown here were of quasi-stable crack growth in a beam under closed-loop COD control. However, it should be apparent that the quasi-automatic strategy is readily applicable to other situations ofcurvilinear crack growth under LEFM conditions. For example, the information contained in Figs 13 and 14 could be integrated through a crack growth rate model to provide a prediction of fatigue life of the same structure used in these experiments.

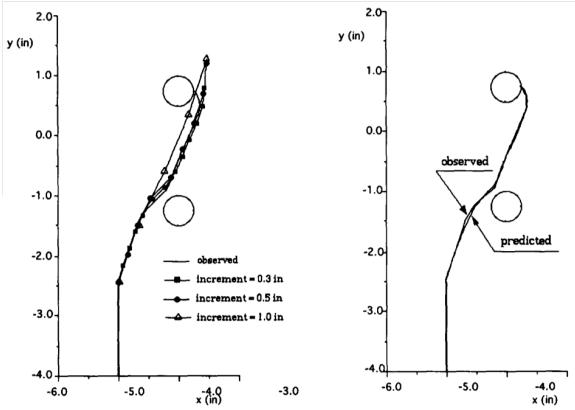


Fig. 9. (a) Comparison between observed and predicted trajectories for Example 1. Modified crack closure and maximum circumferential tensile stress theory. Units: inches. (b) Comparison between observed and predicted trajectories for Example 1. Crack increments variable from 0.3 to 0.05 in. Modified crack closure and maximum circumferential tensile stress theory. Units: inches.

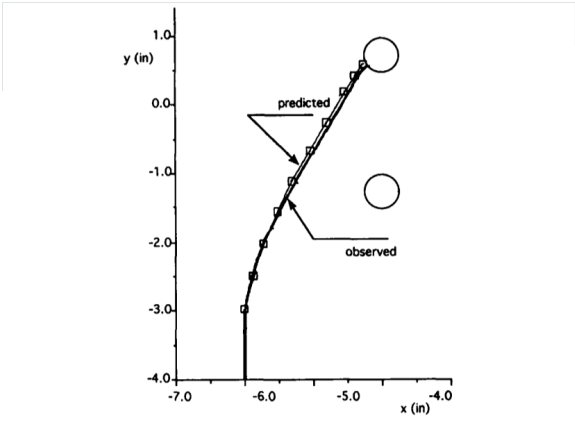


Fig. 10. Comparison between predicted and observed crack paths for Example 2. Crack increment: 0.5 in. Modified crack closure and maximum circumferential tensile stress theory. Units: inches.

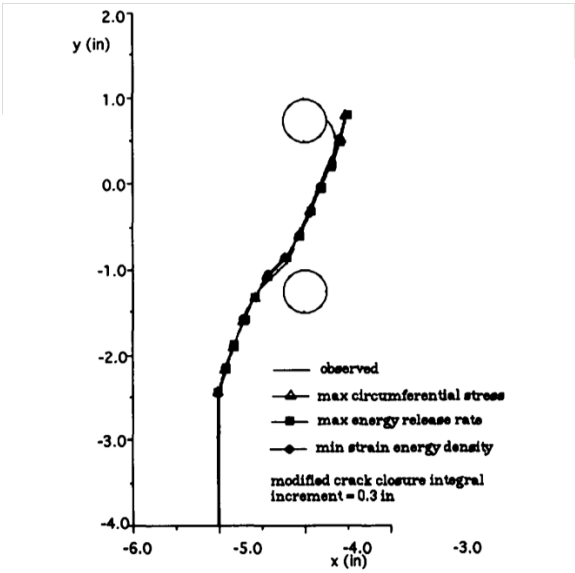


Fig. 11. Influence of mixed-mode interaction theory for Example 1. Units: inches.

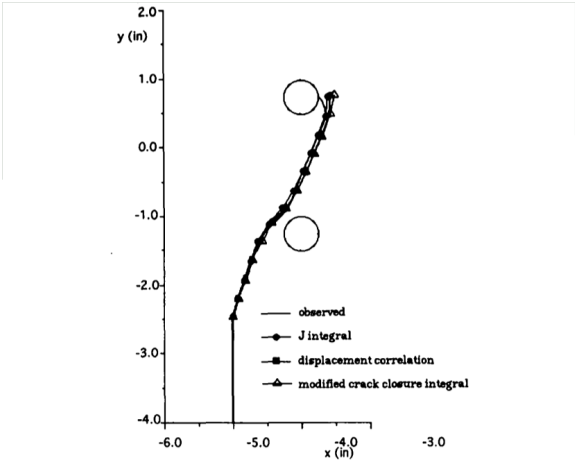


Fig. 12. Influence of technique for stress intensity factor computation on crack trajectory for Example 1. Crack increment: 0.3 in. Units: inches.

A number of shortcomings and potential improvements in the strategy have been uncovered. Currently, each crack increment is a straight line segment. It is possible to use curved increments where the curvature is a function of the gradient of the K_{II}/K_I ratio. This ratio can be obtained using the analytical virtual crack extension technique of Lin and Abel. This technique uses information from a current crack configuration to compute both stress intensities and rates of stress intensities with respect to crack extension. It is also desirable to implement an automatic reduction of the increment size when a high ratio of K_{II}/K_I, or a high gradient of either stress intensity is detected.

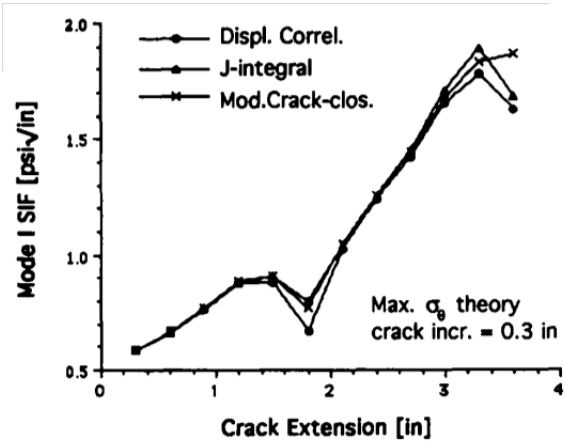


Fig. 13. Comparison among Mode I SIF histories for Example 1.

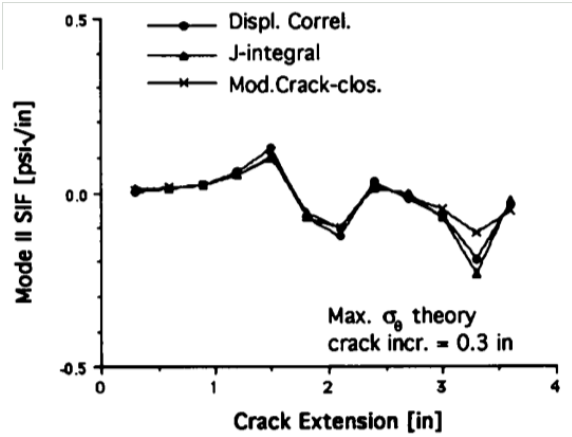


Fig. 14. Comparison among Mode II SIF histories for Example 1.

A.6 Conclusions

A strategy for quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D linear finite element models has been developed and successfully implemented in FRANC2D. This strategy requires minimum user interaction, while still retaining the interactive nature of the simulation process.
In contrast to analytical approaches to crack growth simulation, the present implementation is not limited to self-similar propagation or single cracks, and employs the generality of geometry and boundary conditions afforded by the finite element method.

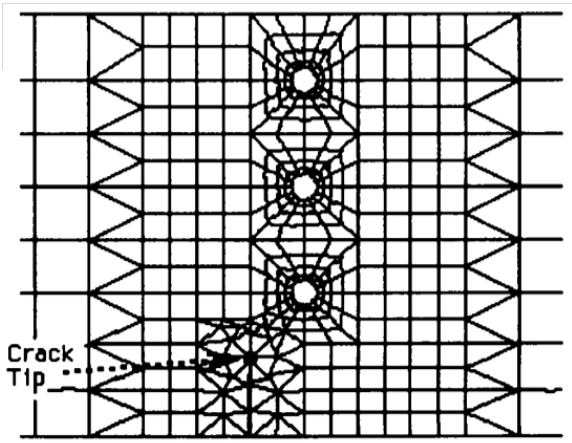


Fig. 15. Details of initial mesh in the neighborhood of holes.

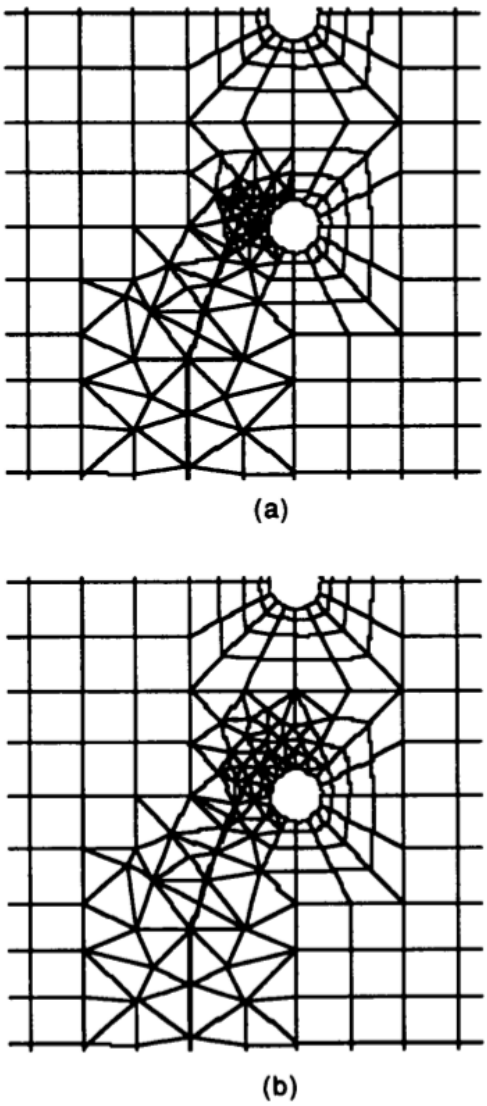


Fig. 16. Details of two consecutive steps in the neighborhood of the lower hole: (a) former step, (b) latter step. Example 1.

Bibliografia

[1] T.N. Bittencourt, P.A. Wawrzynek, A.R. Ingraffea, J.L. Sousa, Q uasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems Engineering Fracture Mechanics , vol. 55, pp. 321-334, (1996)

[2] G. Ventura, J.X. Xu, T. Belytschko, A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG, International Journal for Numerical Methods in Engineering , vol. 54, pp. 923-944, (2002)

[3] GRAVOUIL A., MOÃŃS N., BELYTSCHKO T., âĂIJNon-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set updateâĂİ, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, pp. 2569-2586, 2002

[4] "Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire", Documentation de Référence de Code-Aster n. [R7.02.01]

[5] "Calcul des coefficients d'intensité de contraintes en thermo-élasticité linéaire plane", Documentation de Référence de Code-Aster n. [R7.02.05]

[6] MIALON P., "Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport á un fond de fissure par la méthode theta", EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, n. 3 1988 pp1-28.

[7] A. R. Ingraffea and M. Grigoriu, Probabilistic fracture mechanics: A validation of predictive capability, Report 90-8, Department of Structural Engineering, Cornell University (1990).

[8] BELYTSCHKO T., KRONGAUZ Y., ORGAN D., FLEMING M. Meshless methods: an overview and recent developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, pp. 3-47, 1996.

[9] BELYTSCHKO T., BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 45, 601-620, 1999

[10] MOÉS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pp. 131-150, 1999

[11] BELYTSCHKO T., MOÉS N., USUI S., PARIMI C. Arbitrary discontinuities in finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pp. 993-1013, 2001