

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI MECCANICA STRUTTURALE

BIOMECCANICA
DELL'ANGIOPLASTICA CORONARICA:
UN'ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI
IN REGIME DI GRANDI DEFORMAZIONI

Relatore: Chiar.mo Prof. Ferdinando Auricchio

Tesi di Laurea di
Davide Fugazza

Anno Accademico 1999/2000

A mia madre, mio padre
e a mio fratello Stefano

Indice

Introduzione	iv
1 Caratteristiche biomeccaniche dei vasi arteriosi	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Caratteristiche generali dei vasi arteriosi	2
1.3 Elementi strutturali della parete arteriosa	2
1.4 Proprietà dei componenti della parete: caratteristiche chimiche e strutturali	3
1.5 Non omogeneità della parete	5
1.6 Classificazione delle arterie	6
1.7 Incomprimibilità e anisotropia della parete	7
2 Patologie aterosclerotiche e relative tecniche di trattamento	14
2.1 Introduzione	14
2.2 La placca aterosclerotica: considerazioni anatomiche	14
2.3 La placca aterosclerotica: considerazioni biomeccaniche	16
2.4 Classificazione delle stenosi coronariche	17
2.5 Considerazioni generali sulla chirurgia non invasiva	17
2.6 La tecnica del cateterismo	18
2.7 L'angioplastica coronarica transluminale percutanea (PTCA)	19
2.8 Metodi alternativi per il trattamento dell'aterosclerosi	20
3 Analisi strutturale in regime di grandi deformazioni	25
3.1 Cinematica di un atto di moto	25
3.2 Il principio delle potenze virtuali	26
3.3 Approcci Lagrangiano ed Euleriano	26
3.4 Deformazioni finite	28
3.5 Misure statiche coniugate	32
4 Sviluppo di legami costitutivi per protesi a palloncino	35
4.1 Il concetto di iperelasticità	35
4.2 Elasticità in forma tensoriale	37
4.3 Un caso particolare di energia potenziale	37
4.4 Iperelasticità isotropa nelle direzioni principali	38

4.5	Il legame costitutivo di Neo-Hookean	42
4.6	Prova di sforzo uniassiale	46
4.7	Generalizzazione del legame costitutivo di Neo-Hookean	49
5	Comportamento meccanico di protesi a palloncino	52
5.1	Introduzione	52
5.2	Il modello geometrico	52
5.3	Prova di gonfiaggio	53
5.4	Prova combinata di gonfiaggio e flessione	56
6	Legami costitutivi esistenti per tessuti aortici	68
6.1	Classificazione dei legami costitutivi	68
6.2	Modelli monoassiali	69
6.3	Modelli multiassiali	70
6.4	Modelli pressione-diametro	73
7	Modellazione del sistema arteria-placca aterosclerotica	78
7.1	Introduzione	78
7.2	Un modello iperelastico per il tessuto aortico	78
7.3	Un modello elasto-plastico per la placca aterosclerotica	80
7.4	Il modello geometrico	82
7.5	Il modello ad elementi finiti	82
7.6	Condizioni di carico	83
8	Sviluppo di un modello pressione-diametro semplificato	87
8.1	Introduzione	87
8.2	Una taratura del modello di Hayashi	88
8.3	Sviluppo di un nuovo modello	90
8.4	Un confronto tra i modelli studiati	92
8.5	Cenni sul metodo dei minimi quadrati	93
A	Glossario medico	96
A.1	Terminologia	96
B	Elaborazione dei dati sperimentali	100
B.1	Elaborazione dei dati sperimentali	100
C	Il modello del “balanced angle-ply reinforcement	104
C.1	Trattazione analitica	105
D	Programmazione in FEAP di legami costitutivi	111
D.1	Il metodo dell’ “Update Lagrangian Formulation	112
D.2	Il metodo del “Total Lagrangian Formulation	115
	Conclusioni e sviluppi futuri	122

INDICE

iii

Bibliografia

124

Introduzione

I problemi cardiovascolari, in particolare quelli dell'aterosclerosi, costituiscono oggi, la prima causa di morte nei paesi occidentali.

Tale patologia, responsabile dell'infarto cardiaco, porta allo sviluppo, all'interno del vaso sanguigno, di placche che, negli stadi più avanzati della malattia, ne possono causare la parziale o completa occlusione.

La patologia aterosclerotica, oggi, viene curata con terapie farmacologiche e/o chirurgiche, invasive e non invasive.

I trattamenti non invasivi, sorti intorno alla fine del 1960, offrono particolari vantaggi rispetto alle tecniche classiche e il loro sviluppo, in special modo negli ultimi anni, è stato esponenziale.

Tra le varie tecniche, una particolarmente promettente sembra essere la tecnica dell'angioplastica coronarica transluminale percutanea (PTCA) che prevede l'inserzione di una protesi endoluminale a palloncino per la rivascolarizzazione dei vasi stenotici.

Tale protesi, opportunamente gonfiata insufflando anidride carbonica dall'esterno con uno speciale dispositivo, allarga il lume del vaso ostruito ripristinando così la normale circolazione sanguigna.

Numerosi sono i tests riguardanti arterie sane, ma, scarsissime, sono le informazioni, reperibili in letteratura, circa le proprietà meccaniche dei vasi stenotici.

Considerato in generale che l'utilizzo di raffinati modelli matematici consente di riprodurre e studiare fenomeni complessi, limitando il ricorso a onerose prove sperimentali, si tenterà quindi di applicare metodologie di simulazione numerica allo studio della tecnica PTCA.

In particolare si cercherà di caratterizzare il comportamento strutturale sia della protesi a palloncino, sia di un segmento di arteria stenotica.

La Tesi è organizzata in 8 Capitoli e 4 Appendici.

Dopo un'approfondita analisi sulla biomeccanica di vasi arteriosi, sia dal punto di vista chimico-medico, sia dal punto di vista strutturale (Capitolo 1), si tratterà il problema dell'aterosclerosi con particolare riguardo alle relative tecniche di trattamento (Capitolo 2).

Oltre a quella PTCA, si indicheranno anche alcune tecniche alternative.

Nel Capitolo 3 si esaminano le teorie relative all'analisi strutturale in regime di grandi deformazioni propedeutiche allo studio di alcuni legami costitutivi

esistenti (Capitolo 6) e a quelli sviluppati per la protesi (Capitolo 4).

Tali modelli vengono testati nel Capitolo 5 in cui sono riportati i risultati relativi alle simulazioni numeriche condotte.

La modellazione del sistema arteria-placca è diffusamente descritto nel Capitolo 7.

In tale parte, infatti, viene proposto un nuovo funzionale per il tessuto aortico abbinato ad un legame costitutivo elasto-plastico scelto per il materiale costituente la stenosi.

L'ultimo Capitolo (Capitolo 8) è dedicato allo sviluppo di un modello semplificato pressione-diametro per l'arteria.

Dal confronto fatto con un modello esistente si potrà evincere come la nuova proposta migliori sensibilmente l'interpolazione dei dati sperimentali.

Il lavoro di Tesi termina con 4 Appendici.

Dopo un glossario di terminologia medica (Appendice A), e la realizzazione di una piccola banca dati sperimentale (Appendice B), utilizzata per la parte relativa al Capitolo 8, nell'Appendice C ampio spazio è dato allo sviluppo rigoroso del modello del "balanced angle-ply reinforcement, una tecnica di calcolo, oggi utilizzata anche in campo biomeccanico, nata per lo studio del comportamento strutturale di materiali rinforzati da famiglie di fibre.

Infine nell'Appendice D si forniscono indicazioni sulla programmazione di legami costitutivi in FEAP (il codice ad elementi finiti utilizzato) inserendo nelle pagine finali i listati FORTRAN delle subroutine implementate.

Capitolo 1

Caratteristiche biomeccaniche dei vasi arteriosi

1.1 Introduzione

Le *arterie* sono condotti muscolo-membranosi deputati al trasporto ed alla distribuzione del sangue agli organi.

Esse originano dai ventricoli del cuore con l'aorta e il tronco polmonare che, ramificandosi ripetutamente formano rispettivamente l'albero arterioso della grande circolazione e della piccola circolazione. Essi terminano nella compagine degli organi con esili rami, le arteriole, che immettono il sangue nelle reti vascolari di scambio del distretto capillare. Essendo a valle dei ventricoli del cuore, le arterie sono sottoposte ad alti valori di pressione interna derivante dalle forze opposte della sistolica alla progressione del sangue e delle resistenze vascolari periferiche al deflusso. Per il diverso sviluppo del sistema, la pressione arteriosa è minore nel piccolo circolo.

L'elevato regime pressorio esistente nei distretti arteriosi condiziona i peculiari caratteri costruttivi delle arterie che presentano, già ad un primo esame, una apprezzabile elasticità e consistenza della loro parete.

Ciascuna arteria vascolarizza, con i suoi rami collaterali e terminali, una zona sufficientemente definita del corpo detta *territorio di distribuzione*. I territori di distribuzione delle arterie non sono tuttavia esattamente stabiliti, per la frequente variabilità individuale che esiste nella distribuzione periferica dei rami arteriosi; inoltre, lo scambio di rami fra arterie che servono territori contigui, fa sì che questi, nella maggior parte, non risultino nettamente separati tra di loro ma, sotto il profilo della vascolarizzazione arteriosa, più o meno comunicanti l'uno con l'altro.

Questa disposizione anatomica rende possibile una sufficiente irrorazione del territorio, anche in caso di ostruzione dell'arteria principale.

1.2 Caratteristiche generali dei vasi arteriosi

Nel vivente, le arterie hanno l'aspetto di condotti cilindrici, di colore bianco roseo, di diametro variabile, decrescente verso la periferia del sistema. Fino al calibro di poco oltre il millimetro, pulsano sincrone con il cuore e, se recise, sanguinano ritmicamente a zampillo.

Nel cadavere, invece, le arterie si riconoscono dalle altre formazioni vascolari per il colorito bianco opaco, per la consistenza dura ed elastica della loro parete, per essere vuote di sangue e perchè al taglio restano beanti.

Sottoposte a pressione o trazione, si mostrano deformabili, ma una volta cessata la forza applicata, riprendono immediatamente la loro forma. Se isolate, per dissezione, mostrano una superficie esterna irregolare per la presenza di parti residue dei tralci connettivali di connessione all'ambiente; se incise e aperte presentano una superficie interna levigata e splendente, in virtù del rivestimento endoteliale continuo.

Le arterie, solitamente, decorrono in sede profonda nelle logge muscolari, affiancate ai rami venosi corrispondenti; talora, comprese in una guaina connettivale comune alle vene, ai nervi, ai vasi linfatici, formano, con questi i *fasci vascolonervosi*.

Nel portarsi agli organi, le arterie seguono solitamente il percorso più breve e hanno pertanto, in prevalenza, andamento rettilineo; tuttavia, negli organi mobili o di volume variabile, assumono spesso decorso tortuoso.

1.3 Elementi strutturali della parete arteriosa

Gli elementi strutturali della parete arteriosa ([2]) sono:

- l' endotelio
- le fibre elastiche e le fibre collagene
- le cellule muscolari lisce

L'**endotelio** forma il rivestimento interno delle arterie e di tutti gli altri organi cavitari dell'apparato vascolare sanguifero. È composto solitamente di cellule appiattite, disposte in unico strato, di forma poligonale o allungate secondo l'asse del vaso, unite tra loro da giunzioni ocludenti.

Oltre a provvedere ai fenomeni nutritivi della parete arteriosa, svolge compiti di grande importanza nella fisiologia dell'apparato vascolare sanguifero, per il gran numero di sistemi enzimatici localizzati alla superficie delle cellule. In condizioni di lesione della parete vascolare, l'endotelio contribuisce rilasciando sostanze che intervengono nei meccanismi della coagulazione e dell'emostasi, alla riparazione del danno. Questi stessi meccanismi tuttavia sono anche alla base dei processi di trombosi endoarteriosa in caso di lesione patologiche della

parete vasale (aterosclerosi). Ha capacità generative e, in caso di ricanalizzazione del tratto trombotico di una arteria, partecipa ai fenomeni ricostruttivi.

Le **fibre elastiche** e le **fibre collagene** rappresentano le strutture responsabili delle proprietà di resistenza e di deformabilità delle arterie.

Sono gli elementi costitutivi dell'elastina e del collagene, proteine strutturali insite in quasi tutti i tessuti biologici.

Di tali elementi verranno in seguito descritte le rispettive caratteristiche chimiche e strutturali ([2], [8], [19], [20]).

Alle **cellule muscolari lisce** invece, spetta la capacità di modificare attivamente l'ampiezza del lume arterioso.

Queste cellule sono orientate in direzione circonferenziale e la loro contrazione fa variare, ovviamente, la rigidità del tessuto. Proprio per le loro capacità contrattili, non è possibile associare ad esse un valore univoco di modulo elastico. Il massimo valore di sforzo generabile si aggira tra i 0,1 e i 0,2 N/mmq. Le cellule muscolari lisce sono inoltre importanti, perchè producono la matrice extracellulare.

1.4 Proprietà dei componenti della parete: caratteristiche chimiche e strutturali

La parete arteriosa appartiene alla categoria dei *tessuti molli* (soft tissues) i quali sono in genere costituiti in gran parte di collagene e di elastina.

Il **collagene** è una proteina strutturale presente nella maggior parte dei tessuti biologici (Figura 1.1). Questi tessuti comprendono la pelle, i tendini, le cartilagini, i tessuti vascolari, ecc.. I tessuti ricchi di collagene, possono essere considerati materiali composti di tipo polimerico, nei quali le fibre cristalline di collagene orientate sono contenute in una matrice di mucopolisaccaridi e di elastina amorfa. Scaldando il tessuto in laboratorio aumenta il suo volume specifico e ne diminuisce la densità. In genere la temperatura di transizione vetrosa è di circa 40 gradi e oltre i 56 gradi il tessuto si denatura. La struttura chimica di base del collagene è costituita da tre amminoacidi fondamentali [glicina (GLY), prolina (PRO), idrossiprolina (HYP)] più un quarto amminoacido, arrangiati nella sequenza tipica GLY, PRO, HYP, GLY, altro amminoacido. La presenza dell'idrossiprolina è specifica nel collagene, tanto che la determinazione del suo contenuto in un tessuto, consente di calcolare le quantità di collagene nel tessuto stesso. I polimeri liberi di collagene, come mostrato in Figura 1.1, interagiscono tra di loro sotto forma di tripla elica. Le triple supereliche del collagene sono fra loro legate da legami idrogeno e da veri e propri legami (cross-links) fra le eliche. Si formano pertanto fibrille di colla-

gene che formano a loro volta fibre di diametro pari a 0,2-1,2 μm , molto stabili chimicamente ed con alti valori delle proprietà meccaniche (Tabella 1.1). La particolare struttura delle fibre è responsabile del comportamento meccanico. Infatti l'arrangiamento elicoidale delle catene proteiche ed i legami intramolecolari, fanno sì che nella prima parte dell'allungamento a trazione, le fibre di collagene siano molto deformabili; le fibre ruotano e si flettono modificando la loro geometria spaziale dalla forma elicoidale a quella lineare. Quando le catene proteiche sono distese, le proprietà meccaniche aumentano, diventando dipendenti dai legami intra e intermolecolari.

Tale comportamento è mostrato dal diagramma di Figura 1.2. La regione 1 è caratterizzata da comportamento elastico con basso valore del modulo di Young (svolgimento di catene da elica a linea retta), la regione 2, invece, è caratterizzata invece da comportamento elastico con elevate proprietà meccaniche.

Il collagene è la fibra dei tessuti biologici avente capacità di resistenza a trazione: avendo infatti un elevato rapporto tra lunghezza e diametro (circa 200), è incapace di sopportare le sollecitazioni di compressione.

L'**elastina**, talvolta chiamata anche proteina gommosa per le sue proprietà meccaniche simili a quelle della gomma, è il principale costituente dei tessuti elastici quali certi legamenti, le pareti arteriose, la pelle etc.. Durante il funzionamento pulsatile delle arterie, gioca un ruolo fondamentale, agendo come secondo ventricolo: il sangue espulso dal ventricolo viene in parte immagazzinato durante la sistole dalla dilatazione delle grandi arterie, per poi venire messo in circolazione durante la diastole.

Grazie ai legami fra le catene proteiche, ha una altissima elasticità ed in genere proprietà meccaniche inferiori a quelle del collagene, come mostrato in Tabella 1.1. In Figura 1.3 è mostrato il comportamento meccanico dell'elastina sottoposta ad un ciclo di sollecitazione.

Si nota che il modulo di elasticità (circa 0,1 N/mm² per sollecitazioni di trazione) è molto basso rispetto a quello del collagene (che è almeno 5000 volte superiore), che il comportamento è elastico in quanto alla fine del ciclo tutta la deformazione viene recuperata e che l'energia dissipata per viscosità interna è molto modesta.

Questo comportamento è fondamentale in tutti quei tessuti ai quali è richiesta un'ampia deformazione con ripristino delle dimensioni originali dopo la rimozione del carico, o comunque per quei tessuti sottoposti a sollecitazioni meccaniche.

Fra questi ultimi vi sono i vasi sanguigni, in particolare quelli arteriosi, che sono soggetti alle variazioni cicliche della pressione sanguigna.

L'arrangiamento strutturale delle fibre di collagene e di elastina ed i loro rapporti quantitativi sono responsabili di molte proprietà dei tessuti connettivi quali la densità, l'elasticità, l'anisotropia.

	Modulo di Young [MPa]	Sforzo a rottura [MPa]	Allungamento a rottura [%]
collagene	1000	50-100	10
elastina	0,6	1	100

Tabella 1.1: Proprietà meccaniche (valori medi) del collagene e dell'elastina.

1.5 Non omogeneità della parete

La parete arteriosa è (Figure 1.4 e 1.5) una struttura non omogenea ed in particolare costituita da 3 strati concentrici:

- la tunica intima
- la tunica media
- la tunica avventizia

Ogni strato a sua volta è composto in percentuali diverse da elastina, collagene e cellule muscolari lisce organizzate in strutture diverse.

La **tunica intima** è costituita da un singolo strato di cellule endoteliali direttamente in contatto con il sangue che scorre nel vaso, e da un sottile strato subendoteliale contenente fibre di collagene. Fra l'intima e la media, è interposta la lamina (o membrana) elastica interna costituita da fibre di elastina. Dato il suo esiguo spessore, la tunica intima contribuisce in modo trascurabile alle caratteristiche meccaniche delle arterie.

La **tunica media** rappresenta lo strato più spesso della parete ed ha strutture differenti nelle diverse parti del sistema vascolare: in base alla sua costituzione condiziona il comportamento funzionale delle arterie. Nelle grandi arterie più prossime al cuore, la media è costituita da lamine elastiche fenestrate, alternate da strati di tessuto connettivo, di fibre di collagene e di fibre muscolari lisce. Nelle arterie più piccole invece, la media è costituita soprattutto da cellule muscolari lisce e da una piccola parte di tessuto connettivo, collagene ed elastina. Le cellule muscolari sono avvolte ad elica con passo variabile ed organizzate in una struttura a strati.

La **tunica avventizia** può, in alcuni casi, avere lo stesso spessore della media ed è composta da fasci di fibre di collagene in direzione longitudinale al vaso. Sono presenti anche fibre di elastina. È un tessuto altamente vascolarizzato e tramite una rete di vasi fornisce la maggior parte del nutrimento alla media.

1.6 Classificazione delle arterie

In rapporto al diametro, si distinguono:

- arterie di grosso calibro
- arterie di piccolo e medio calibro
- arteriole

Si considerano **arterie di grosso calibro** (o arterie elastiche) quelle arterie che hanno un diametro da 3 cm a 7 mm (Figura 1.8); comprendono l'aorta, i grossi vasi arteriosi (arteria brachiocefalica, arteria carotide comune, arteria carotide interna, arteria succlavia, arteria iliaca comune) e il tronco polmonare. Esse presentano una *tunica intima*, dello spessore di circa 100 μm formata dall'endotelio che appoggia su uno strato sottoendoteliale, costituito da connettivo con fibre collagene ed elastiche intrecciate, rari fibroblasti e macrofagi. Questo strato è delimitato esternamente da una o più lamine fenestrate che costituiscono, nell'insieme, la lamina elastica interna.

La *tunica media* (spessa fino a 500 μm) è costituita da numerose membrane elastiche fenestrate disposte concentricamente (fino a 40 strati nell'aorta) e congiunte tra loro da fascetti elastici di connessione. Gli spazi tra le lamine elastiche contengono connettivo di collagene ricco di fibroblasti e fascetti di cellule muscolari lisce, disposte concentricamente. Queste ultime, scarse nelle grosse arterie che partono dal cuore, aumentano progressivamente procedendo verso le arterie di medio calibro. Esternamente la tunica media è delimitata da una lamina elastica esterna, spesso discontinua.

La *tunica avventizia* è formata da connettivo collagene che continua nel connettivo dell'ambiente perivascolare. Sono presenti anche in questo strato fasci di fibre elastiche che, addensati al limite con la tunica media, partecipano alla costituzione della lamina elastica esterna.

Le **arterie di piccolo e medio calibro** (arterie muscolari) hanno un diametro fra 7 mm e 0,1 mm (Figura 1.8) e presentano una prevalente struttura muscolare (Figura 1.6). Appartengono a questo tipo strutturale la maggior parte delle arterie.

La *tunica intima* è sempre sottile e formata da cellule endoteliali allungate in direzione longitudinale che riposano su un esile strato sottoendoteliale; è delimitata esternamente dalla lamina elastica interna che si presenta come strato omogeneo, ondulato e rifrangente.

Nelle arterie di medio calibro (fino a 2 mm) la *tunica media*, che forma circa la metà dello spessore della parete, è costituita in prevalenza da fascetti di cellule muscolari lisce ad andamento circolare o elicoidale a passo breve, intercalati a fasci elastici e collageni. Le cellule muscolari lisce, all'esame ultrastrutturale, risultano circondate da una lamina basale che si interrompe nei punti in cui si stabiliscono contatti fra elementi vicini; queste zone di contatto permettono il

passaggio dell'impulso nervoso da una membrana plasmatica all'altra.

In corrispondenza della zona di confine con l'avventizia il materiale elastico si addensa a formare una lamina elastica esterna composta da grossi fasci, a decorso prevalentemente longitudinale, intrecciati a rete.

La *tunica avventizia* è assai sviluppata e composta da fasci di collagene intrecciati con fibre elastiche che continuano gradualmente con quelli del connettivo perivascolare; vi si ritrovano piccoli vasi sanguiferi (*vasa vasorum*) e ramuscoli nervosi .

Nelle arterie di piccolo calibro (diametro inferiore a 2 mm), la *tunica media* , che supera sempre la metà dello spessore della parete, è essenzialmente formata da cellule muscolari lisce, a disposizione circolare o spirale a passo breve, inframmezzate da una delicata intelaiatura di fibre elastiche e collagene. Al confine con l'avventizia non esiste una vera e propria lamina elastica. La *tunica avventizia* è sempre sottile ed è in continuità con il connettivo perivasale.

Le **arteriole** (Figura 1.7) hanno un diametro di 100-50 μm (Figura 1.8) e danno origine per ramificazione alle arteriole terminali di calibro inferiore ai 50 μm . Da queste originano infine le metarteriole, del diametro di 10-15 μm , che immettono il sangue nel distretto capillare.

La *tunica intima*, molto sottile, è formata da cellule endoteliali allungate secondo l'asse del vaso, sottese da una esile lamina sottoendoteliale; al limite con la tunica media, si osservano tratti discontinui di una struttura elastica che ricorda la lamina elastica interna delle arterie muscolari. Questa già ridotta componente elastica scompare del tutto nelle arteriole terminali.

La *tunica media* è formata da cellule muscolari lisce a disposizione circolare o elicoidale a passo breve, poste su due o tre piani, che nelle arteriole terminali si riducono uno solo strato cellulare. Fra cellule muscolari, o fra queste e le cellule endoteliali, si possono osservare, nei punti di contatto diretto, giunzioni serrate.

La *tunica avventizia* è formata da un fine reticolo di fibre di collagene con rari fibroblasti.

Le metarteriole, alla loro origine, mostrano un endotelio a cellule rigonfie e un manicotto contrattile formato da 2 o 3 strati di cellule muscolari lisce a disposizione circolare. Questi dispositivi detti sfinteri precapillari, regolano il transito del sangue nelle reti capillari degli organi; sembrano aprirsi e chiudersi a intervalli regolari di 6-8 secondi.

1.7 Incomprimibilità e anisotropia della parete

L'ipotesi di incomprimibilità della parete, già presa in considerazione da Carew et al. nel 1968, è stata recentemente ribadita da Choung e Fung (1984) in seguito a test di compressione radiale effettuati su aorte di conigli.

Avendo riscontrato, durante le prove, una estrusione di fluido impregnato nella parete, come misura della deformazione volumica venne considerata il rappor-

to percentuale tra il volume di fluido fuoriuscito e il volume totale del tessuto stesso.

Tuttavia, la modesta entità dei risultati ottenuti (0,5-1,26% per 10 Kpa di sforzo e percentuali ancora minori per sforzi ≥ 30 KPa), dava effettivamente conto della veridicità dell'ipotesi fatta.

L'incompressibilità della parete, è stata accettata dalla maggior parte dei ricercatori, in quanto conduceva, per lo studio della meccanica dell'arteria, a formulazioni semplificate.

A causa della struttura anisotropa della parete arteriosa è plausibile considerare le relative proprietà elastiche anch'esse anisotrope.

Essendo inoltre fortemente variabili sia con il tipo di arteria, sia con il sito anatomico in cui sono posizionate, portarono di conseguenza a forti discrepanze tra le teorie e i risultati proposti da ogni ricercatore.

Tanaka e Fung (1974) hanno mostrato ad esempio che l'aorta toracica è più rigida nella direzione longitudinale rispetto a quella circonferenziale mentre l'aorta iliaca e femorale presentavano caratteristiche opposte.

Mohan e Melvin (1982) condussero test di trazione uniassiale su aorte toraciche umane, sia in condizioni quasi statiche (con una velocità di deformazione di $0,01-0,07 s^{-1}$), sia in condizioni dinamiche (con una velocità di deformazione di $80-100 s^{-1}$).

I risultati mostrarono come nei test dinamici la tensione di rottura in direzione circonferenziale, fosse più grande di quella in direzione assiale, in condizioni di carico pseudo-statiche, di un fattore 1,54.

Weizsaker e Pinto (1988) studiarono invece le proprietà elastiche di carotidi di ratto applicando simultaneamente, su provini tubolari, un largo range di pressioni interne e di forze assiali.

Grazie a queste prove, si arrivò a dimostrare il comportamento isotropo della parete per valori di forze e pressioni all'interno o in vicinanza dei valori fisiologici.

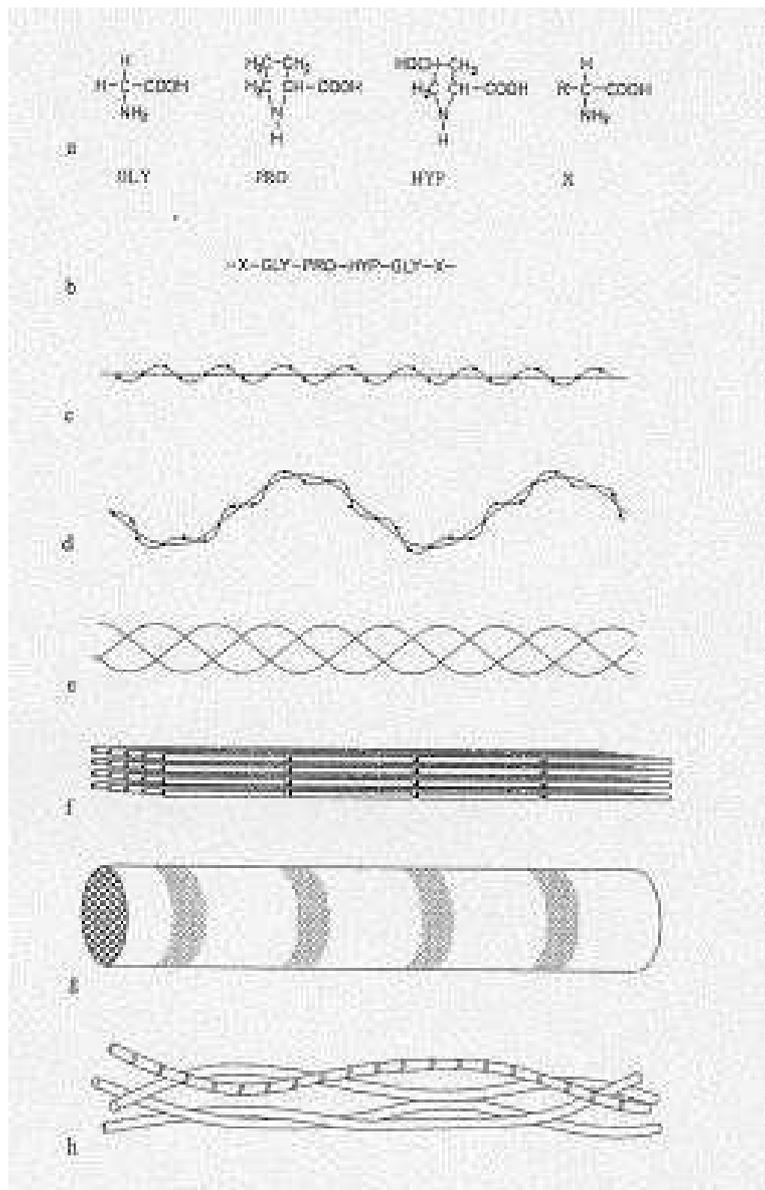


Figura 1.1: a: amminoacidi; b: catena molecolare; c: singola elica; d: singola elica avvolta; e: tripla elica avvolta; f: minifibrille; g: fibrilla di collagene; h: fibre di collagene.

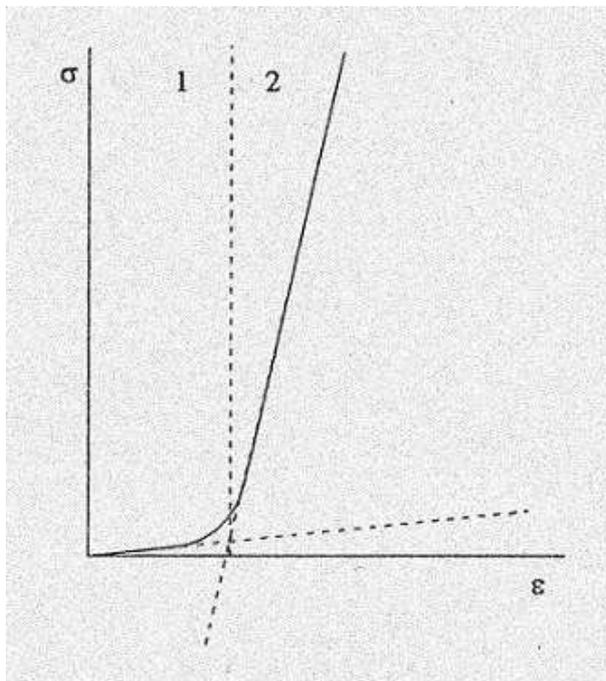


Figura 1.2: comportamento meccanico a trazione delle fibre di collagene.

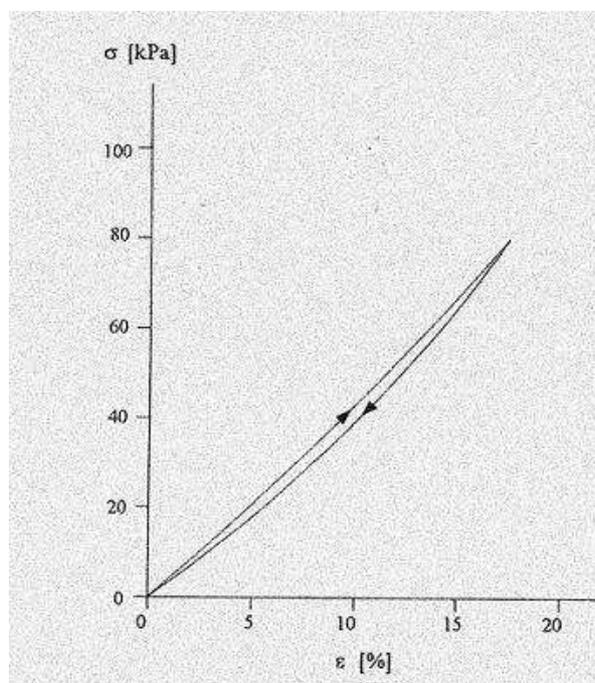


Figura 1.3: comportamento meccanico dell'elastina durante un ciclo di sollecitazione.

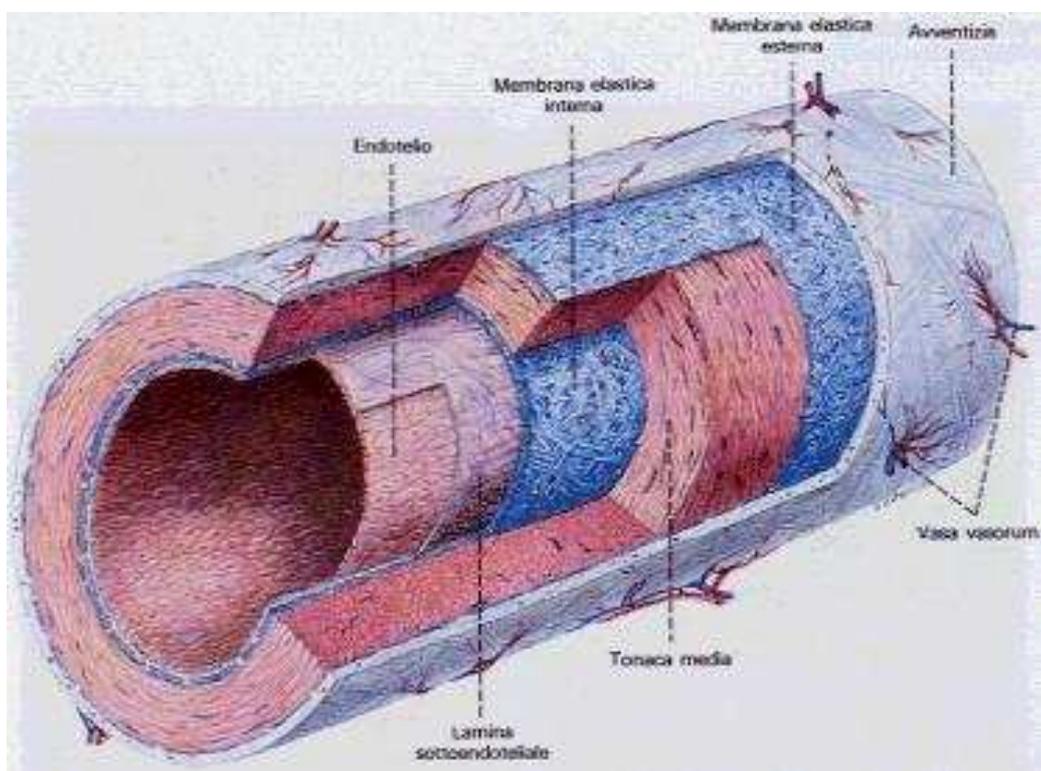


Figura 1.4: rappresentazione tridimensionale di un'arteria di tipo muscolare.

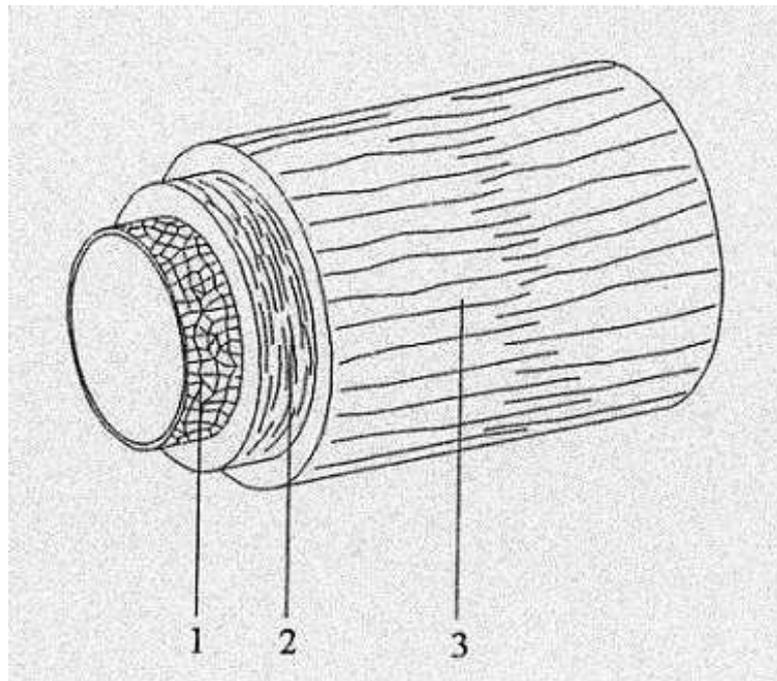


Figura 1.5: struttura di un vaso arterioso. 1: tunica intima, 2: tunica media; 3: tunica avventizia.

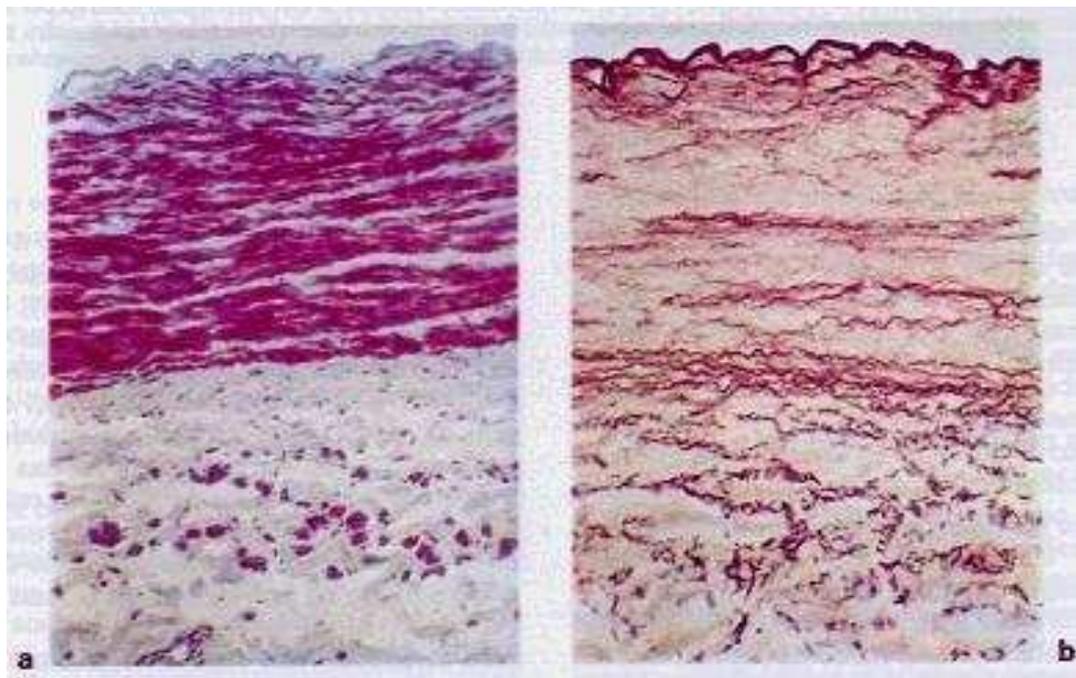


Figura 1.6: sezione trasversale di un'arteria di tipo muscolare, colorate con il metodo Azan (a) e con un metodo elettivo (b).

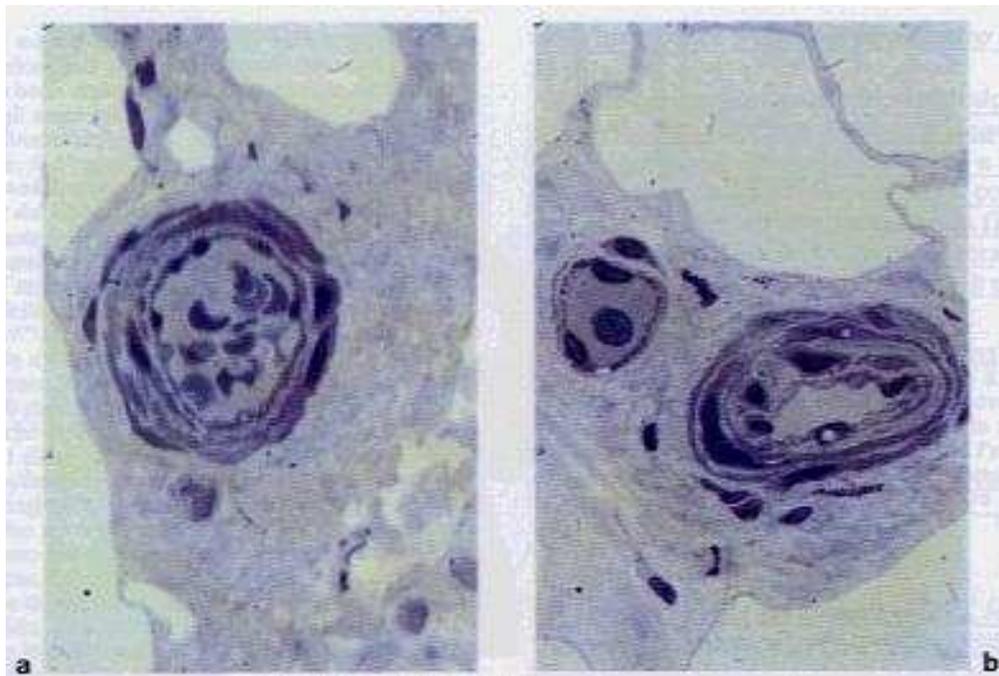


Figura 1.7: sezioni trasversali di arteriole di diverso calibro.

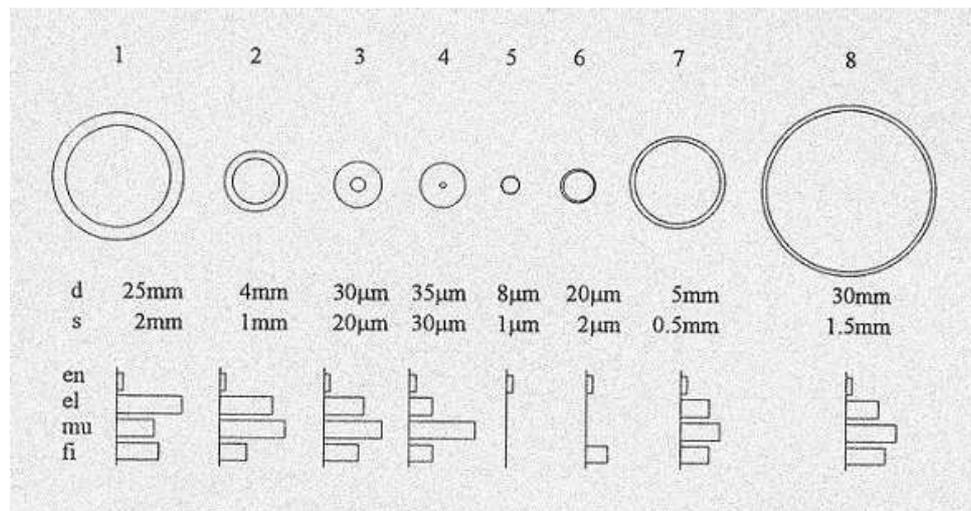


Figura 1.8: dati relativi alle dimensioni (diametro d e spessore s della parete) e alla composizione di alcuni tipi di vaso sanguigno. 1: aorta; 2: arteria; 3: arteriola; 4: sfintere capillare; 5: capillare; 6: venula; 7: vena; 8: vena cava; en: endotelio; el: tessuto elastico; mu: tessuto muscolare; fi: tessuto fibroso.

Capitolo 2

Patologie aterosclerotiche e relative tecniche di trattamento

2.1 Introduzione

L'insieme dei processi degenerativi della parete arteriosa, caratterizzati dall'ispessimento e dalla perdita di elasticità, viene definito *arteriosclerosi*: nel suo ambito si distinguono l'*aterosclerosi*, la *sclerosi della media di Mönckberg* e l'*arteriosclerosi jalina* o *iperplastica* o *arteriolosclerosi*.

Nella maggior parte dei casi le lesioni sono di tipo aterosclerotico, per cui i termini atero e arteriosclerosi sono stati spesso utilizzati in modo intercambiabile.

L'organizzazione Mondiale della Sanità nel 1957 ha definito la lesione aterosclerotica come “ una combinazione variabile di alterazioni dell'intima delle arterie di grande e medio calibro, consistenti nell'accumulo focale di lipidi, di complessi carboidrati, di sangue e prodotti del sangue, di tessuto fibroso e di depositi del calcio, con alterazioni concomitanti nella media ”.

Ancora oggi, nonostante la grande mole di informazioni raccolte a livello clinico e sperimentale in questi ultimi trent'anni, non è possibile stabilire con sicurezza quale sia la causa ed il meccanismo di sviluppo dell'aterosclerosi.

2.2 La placca aterosclerotica: considerazioni anatomiche

Le arterie principalmente coinvolte dal processo aterosclerotico sono quelle di grande e medio calibro, mentre i segmenti più distali dell'albero arterioso sono comunemente risparmiati: le arterie ammalate si presentano ispessite e tortuose, con lume irregolarmente ristretto, a causa della presenza di trombi stratificati sulla parete o aggettanti, in modo tale da divenire occlusivi.

La lesione aterosclerotica è localizzata inizialmente solo nell'intima, ma suc-

cessivamente si osserva un coinvolgimento anche della media: elemento caratteristico è la disposizione nodulare delle lesioni.

Esistono quattro tipi di lesioni aterosclerotiche o preaterosclerotiche.

- Gli **ispessimenti intimali localizzati**: sono caratterizzati dalla proliferazione delle cellule muscolari lisce, collagene e fibre elastiche e si ritrovano già nella prima infanzia, particolarmente a livello delle biforcazioni arteriose.
- Le **strie gassose**: lievi salienze di colore giallastro o biancastro, a contorni sfumati, di dimensioni variabili da qualche millimetro ai due centimetri, allungate secondo l'asse longitudinale del vaso. Sono costituite da cellule muscolari lisce e da macrofagi con accumuli intracellulari di colesterolo e da tessuto fibroso denso. Compaiono nella prima infanzia e possono andare incontro a riassorbimento completo ma in altri casi evolvono: si verificano delle necrosi cellulari ed il colesterolo si deposita negli spazi extracellulari. Anche in questa fase è possibile una reversione delle lesioni che però, solitamente, evolvono ulteriormente in placche fibrose.
- Le **lesioni gelatinose**: hanno un contenuto prevalente di cellule muscolari lisce, fibroblasti, glicosaminoglicani, collagene, LDL e fibrogeno. Al centro di queste lesioni si ritrovano degli esteri di colesterolo, in accumuli extracellulari.
- Le **placche fibrose o fibrolipidiche**: sono le lesioni aterosclerotiche vere e proprie. Esse si sviluppano principalmente nelle zone di turbolenza, sulle pareti esterne delle biforcazioni, agli ostii dei principali collaterali aortici, sul versante interno delle curve e là dove lo sforzo di taglio risulta ridotto. Hanno una forma generalmente nummulare od ovalare, con tendenza a confluire tra loro, ma difficilmente si sviluppano in modo uniformemente circonferenziale, come gli ispessimenti intimali dell'invecchiamento fisiologico: presentano a volte una superficie liscia e brillante, giallastra o biancastra, mentre in altri casi si presentano opache, cartilaginee. Sono costituite da un nucleo necrotico, ricco di lipidi e di detriti cellulari, separato dall'endotelio da una capsula fibrosa e da uno strato di glicosaminoglicani, che deforma la superficie interna del vaso, creando delle salienze che ne riducono il lume.

2.3 La placca aterosclerotica: considerazioni biomeccaniche

Dal punto di vista strutturale, la prima alterazione osservabile è una disorganizzazione delle lamine elastiche più interne della media (membrana elastica interna), con migrazione di cellule muscolari lisce nello spazio sottoendoteliale, loro proliferazione e trasformazione fibroplastica: successivamente queste cellule si inibiscono di lipidi (cellule schiumose) e mostrano i primi fenomeni necrotici, con deposizione dei sali di colesterolo negli spazi extracellulari.

Queste sostanze tendono a stratificarsi fra endotelio e nucleo necrotico della placca, formando la capsula fibrosa.

Nella zona di necrosi intimale i piccoli depositi di sali di calcio tendono a conglomerarsi, formando rosette e strutture cristalline che esitano, per accrescimento, nella completa calcificazione della placca: questa non contiene solo lipidi, ma anche mucopolisaccaridi e fibrina.

Anche la media subisce processi degenerativi secondari: le cellule muscolari lisce tendono a necrotizzarsi, mentre le lamelle elastiche degenerano e spariscono. Questo, probabilmente, dipende dall'alterata permeabilità dell'intima, che non consente più la veicolazione di sostanze nutritive alla media.

Caratteristicamente la placca fibrosa tende a complicarsi con fratture verso il lume (placca ulcerata) sulle quali si può sovrapporre un processo trombotico; si possono osservare calcificazioni oppure emorragie che scompaginano ulteriormente la struttura dell'intima: tutti questi processi risultano intimamente correlati fra loro.

A livello aortico l'aterosclerosi raramente comporta stenosi significative da un punto di vista emodinamico; più frequentemente è il processo trombotico sovrapposto alla lesione ateromasica a determinare la stenosi rilevante o l'ostruzione.

Nelle arterie di medio calibro, la placca fibrolipidica aggetta nel lume, riducendone la sezione in modo significativo; anche in questo caso, però, è quasi sempre la trombosi sovrapposta a determinare la completa occlusione del vaso, che può avvenire in modo acuto oppure in modo lentamente progressivo.

Le localizzazioni aterosclerotiche principali sono a livello coronarico, carotideo e degli assi aortofemorali e femoropoplitei.

2.4 Classificazione delle stenosi coronariche

Ambrose ([6]) ha distinto le seguenti 4 categorie di stenosi (Figura 2.1):

1. lesioni concentriche, con bordi lisci, ben definite, regolari
2. lesioni eccentriche di tipo 1, con bordi lisci e collo ampio
3. lesioni eccentriche di tipo 2, a geometria convessa e margini aggettanti, oppure con bordi irregolari e festonati
4. lesioni con irregolarità multiple

È possibile inoltre classificare le stenosi in base alle loro caratteristiche geometriche (Bayer, 1989). In particolare una lesione viene definita **simmetrica** quando appare ugualmente sviluppata in entrambe le proiezioni oblique OAD (obliqua anteriore destra) e OAS (obliqua anteriore sinistra). La lesione viene invece definita **asimmetrica** quando è ben visibile in una delle due proiezioni oblique e poco evidente nell'altra.

2.5 Considerazioni generali sulla chirurgia non invasiva

La *chirurgia vascolare non invasiva* o *interventistica* consiste nella somministrazione di energia meccanica, termica o luminosa direttamente alle lesioni aterosclerotiche. Ciò avviene tramite speciali dispositivi che raggiungono l'arteria stenotica passando prima all'interno di altre arterie, cui si accede per via percutanea, cioè con piccole incisioni nella pelle.

L'obiettivo è quello di riaprire vasi stenotici o valvole cardiache oppure chiudere comunicazioni patologiche del sistema cardiocircolatorio, ed ottenere una correzione fisiologica paragonabile a quella ottenuta dalle tecniche chirurgiche invasive tradizionali.

L'angioplastica con palloncino costituisce il nucleo della cardiologia non invasiva e ha costituito la base per lo sviluppo di successive tipologie di intervento, quali la tecnica stent, l'aterectomia e l'angioplastica laser, nate per sopperire ad alcune mancanze della prima.

Nei prossimi anni la ricerca si propone di: migliorare le tecniche di attraversamento di lesioni totalmente occluse, diminuire il danno locale responsabile della riocclusione del vaso, studiare metodi alternativi per la rimozione della placca aterosclerotica.

2.6 La tecnica del cateterismo

Evoluzione storica

Negli anni '50 venne messa a punto la tecnica del *cateterismo*, in cui un tubo cavo di diametro molto ridotto veniva inserito all'interno dei condotti dell'apparato circolatorio o digerente, a scopo terapeutico o diagnostico.

Venne poi sviluppato un particolare tipo di radiografia ai vasi sanguigni, che, utilizzando liquidi di contrasto opachi ai raggi X (*angiografia*), rendeva possibile la visualizzazione di stenosi aterosclerotiche nei distretti arteriosi.

Dal 1950 alla fine degli anni '70 il cateterismo e l'angiografia vennero applicati alla cardiologia, ma essenzialmente per la valutazione di condizioni patologiche individuali, per guidare la terapia medica o per la programmazione di interventi chirurgici.

Dalla fine degli anni '70 poi le due tecniche cominciarono ad assumere un ruolo di crescente importanza sia nella diagnosi, sia nel trattamento delle lesioni cardiovascolari. Infatti, già nel 1964, Dotter et al. notarono che era possibile far passare una guida metallica e poi un catetere o un dilatatore rigido attraverso un'area stenotica nel tratto iliaco-femorale, per allargarne il lume e ristabilire un'accettabile flusso sanguigno. Tuttavia, le prime utilizzazioni di questa tecnica, denominata *tecnica Dotter*, furono limitate dal trauma cui era sottoposta l'arteria nella zona stenotica e delle complicanze dovute al passaggio dei dilatatori rigidi di grande diametro.

Nel 1974 Grentzic e Kumpe modificarono la tecnica, sostituendo al dilatatore rigido un catetere con un palloncino all'apice. Questo tipo di catetere poteva essere introdotto in occlusioni più gravi con il palloncino sgonfio. Una volta posizionato, poteva essere gonfiato con un liquido di contrasto (che lo rendeva visibile all'angiografia per una corretta dilatazione della placca) e dilatare il vaso stenotico fino ad un diametro predeterminato. Questa tecnica fu denominata *angioplastica con palloncino* e, in questo stadio dello sviluppo, detta *tecnica di Gruentzig*. Essa fu applicata dapprima alle stenosi periferiche e poi a quelle renali. Nel 1977 fu poi estesa anche alle stenosi coronariche, con evidenti minori disagi rispetto alla classica chirurgia invasiva del bypass.

Dagli anni '90 in poi la chirurgia vascolare non invasiva si è decisamente affermata, con un numero di interventi pari al numero di operazioni di chirurgia invasiva, con tendenza a crescere.

Strumentazione chirurgica utilizzata

Come anticipato, in tutte le tecniche di chirurgia non invasiva, la lesione è raggiunta attraverso cateteri guida introdotti nelle arterie. All'interno di questi, è inserito il dispositivo operativo di trattamento vero e proprio e un cavo guida molto sottile.

I *cateteri guida* (Figura 2.1) sono tubi cavi di modesto spessore, al cui interno scorrono il cavo guida e la protesi a palloncino per l'intervento di angioplastica.

Compito del catetere guida è di portare il dispositivo operativo nel punto più vicino possibile al vaso da trattare. Possono arrivare al massimo a 2.7 mm di diametro e sono in genere costituiti da 3 strati: uno strato esterno in poliuretano o Nylon che fornisce una superficie liscia, una rete centrale in Kevlar o in acciaio che dà rigidità al catetere, uno strato interno in silicone che provvede ad una superficie liscia e a basso attrito per il passaggio del dispositivo operativo di trattamento. Dato che spesso occorre trattare i rami secondari delle coronarie, più difficili da raggiungere, la parte terminale del catetere guida è opportunamente arcuata, in modo da indirizzare il cavo guida, che porta il dispositivo operativo, verso la zona da trattare.

I *cavi guida* (Figura 2.3) passano all'interno del catetere guida e servono per portare il dispositivo operativo in prossimità della lesione. Sono formati da 3 componenti principali: un nucleo centrale in acciaio o Nitinol (una lega a memoria di forma), una molla elicoidale per assorbire gli urti da impuntamento, un ricoprimento esterno in silicone a basso attrito. Oltre che sufficientemente flessibile, una guida deve anche essere ben direzionabile all'interno del vaso. Deve inoltre fornire anche una buona risposta alla coppia torsionale applicata dall'operatore.

2.7 L'angioplastica coronarica transluminale percutanea (PTCA)

Mediante la tecnica della PTCA è (Figure 2.4 e 2.6) possibile trattare efficacemente le lesioni stenotiche su base soprattutto aterosclerotica in quasi tutti i distretti arteriosi.

L'applicabilità della tecnica e la probabilità di successo sono legate a vari fattori:

- lesioni brevi e segmentarie
- stenosi di tipo concentrico
- vasi sanguigni a decorso non troppo tortuoso

La procedura consiste nell'introduzione intraarteriosa e percutanea di un catetere a palloncino che viene posizionato su una guida a livello della stenosi e dilatato ad elevata pressione sino ad un diametro prefissato. Il materiale del palloncino è molto resistente e non si lascia comprimere dalla parete vasale come avveniva, ad esempio, dai primi cateteri commerciali. L'effetto prodotto dalla dilatazione consiste in uno stiramento delle fibre elastiche e delle cellule muscolari e in una frattura longitudinale delle tonache ammalate. Con il tempo subentra poi una riparazione fibrosa e neo-intimale. Tra le possibili complicanze, che comunque non superano il 3-5 % e sono risolvibili chirurgicamente, vanno ricordate l'embolizzazione distale, la trombosi, l'emorragia e la

dissezione. Grandi possibilità sono offerte dall'impiego associato della PTCA e dall'intervento chirurgico. Con le due metodiche combinate si può ottenere una rivascularizzazione ottimale in pazienti con lesioni multidistrettuali.

I primi dispositivi per interventi di angioplastica coronarica transluminale percutanea, PTCA, il cui sviluppo è iniziato tra il 1977 e il 1980, erano costituiti da un doppio lume.

Il primo era utilizzato per gonfiare il palloncino di PVC e il secondo per monitorare la pressione o iniettare il liquido di contrasto radiologico. Questo liquido permetteva di distinguere, nelle angiografie, la zona stenotica, in modo da poter eseguire un posizionamento corretto del dispositivo di dilatazione. Tuttavia il sistema non era ancora sufficientemente flessibile per raggiungere, dall'aorta, le lesioni coronariche più distali. Inoltre il diametro, anche se con palloncino non espanso, era ancora troppo grande (1,5 mm) per poter penetrare all'interno della maggior parte delle lesioni.

Negli anni, i miglioramenti delle attrezzature, realizzati grazie ad un forte impegno ingegneristico, hanno permesso il conseguimento di risultati importanti. Oggi la varietà dei prodotti permette di trattare con sicurezza lesioni avanzate e complesse.

Occorre ricordare che il diametro ottenibile con un certo palloncino va scelto con attenzione.

Esso dipende sia dalla pressione di gonfiaggio cui è sottoposto, sia dalle caratteristiche elastiche del materiale con cui è realizzato (PET, POC ad esempio). Le lesioni eccentriche richiedono l'uso di palloncini particolari, per superare la rigidità della parete opposta alla placca aterosclerotica.

Richiedono inoltre insufflazioni ripetute e prolungate.

La pressione nominale, cui normalmente il palloncino è gonfiato è compresa tra le 3 e le 12 atmosfere secondo il tipo di dispositivo.

Per lesioni particolarmente rigide, calcificate per esempio, si devono utilizzare palloncini per pressioni nominali anche di 20 atmosfere.

Ovviamente, esiste comunque una tolleranza per la resistenza meccanica della protesi (pressione di scoppio variabile tra le 15 e le 27 atmosfere), che rende possibile una certa flessibilità nell'utilizzo del dispositivo.

2.8 Metodi alternativi per il trattamento dell'aterosclerosi

Non essendo possibile applicare la PTCA in tutti i casi di aterosclerosi coronarica, vengono ora, in breve, descritte le metodiche alternative. Si rimanda ai testi ([7], [6]) per una trattazione più esauriente. In particolare si darà conto delle seguenti tecniche:

1. la **laser-angioplastica**
2. l'**aterectomia**

3. la tecnica stent

La laser-angioplastica

Le prime sperimentazioni cliniche, basate sulla conduzione intravasale della luce laser mediante fibre nude erano gravate da un'alta percentuale di perforazioni della parete arteriosa, dovute sia al trauma meccanico che ad un danno termico non controllato. Successivamente è stato messo a punto il metodo *hot tip*, che ha permesso di ottenere buone percentuali di rivascolarizzazione ed un basso numero di complicanze. Un cappuccio metallico unito alla parte terminale della fibra ottica converte l'energia luminosa in energia termica per raggiungere in pochi secondi temperature vicine ai 400 gradi. Il materiale ateromasico, viene vaporizzato all'istante, lasciando un lume che viene ulteriormente allargato con un normale catetere a palloncino per PTCA, secondo la tecnica già descritta.

Altri sistemi per l'angioplastica recentemente messi a punto sono quelli che prevedono l'emissione pulsata dell'energia, in particolare il *laser ad eccimeri*. Con apparecchiature di questo tipo si ha in teoria un maggior effetto fotochimico diretto sui tessuti patologici con una minore dispersione ed una ridotta generazione di calore. I risultati migliori dell'*angioplastica laser-assistita* si ottengono nelle arterie iliache e femorali in presenza di ostruzioni non molto lunghe: il limite oltre il quale le probabilità di successo si riducono in maniera significativa è di circa 7 cm. Se sono presenti estese calcificazioni le possibilità di un insuccesso con eventuale perforazione arteriosa è più elevata.

L'aterectomia

L'*aterectomia meccanica* può rappresentare un'alternativa alla PTCA e alla laser-angioplastica. Il principio è quello di allargare il lume arterioso nel punto dove l'ateroma provoca la stenosi mediante asportazione di una parte della placca. A questo scopo, cioè alla riduzione della massa della placca, mirano tutti i diversi sistemi per l'aterectomia, anche se differiscono per le modalità di eliminazione del tessuto patologico. Le metodiche più diffuse sono l'aterectomia secondo Simpson e il Sistema TEC.

La tecnica stent

Una problematica comune alla chirurgia vascolare ricostruttiva ed alla angiologia interventistica è rappresentata dalle stenosi recidive dopo il primitivo trattamento. Per ovviare a questo inconveniente sono stati messi a punto gli *stent* (Figura 2.5), sottili cilindri di acciaio o di leghe a memoria di forma a maglie larghe capaci di venire espansi sino ad un diametro prestabilito e di aderire perfettamente alla parete vasale.

L'indicazione al loro impiego viene principalmente dalla presenza di stenosi di tipo eccentrico, irregolari nel profilo e ad elevato contenuto di sali di calcio.

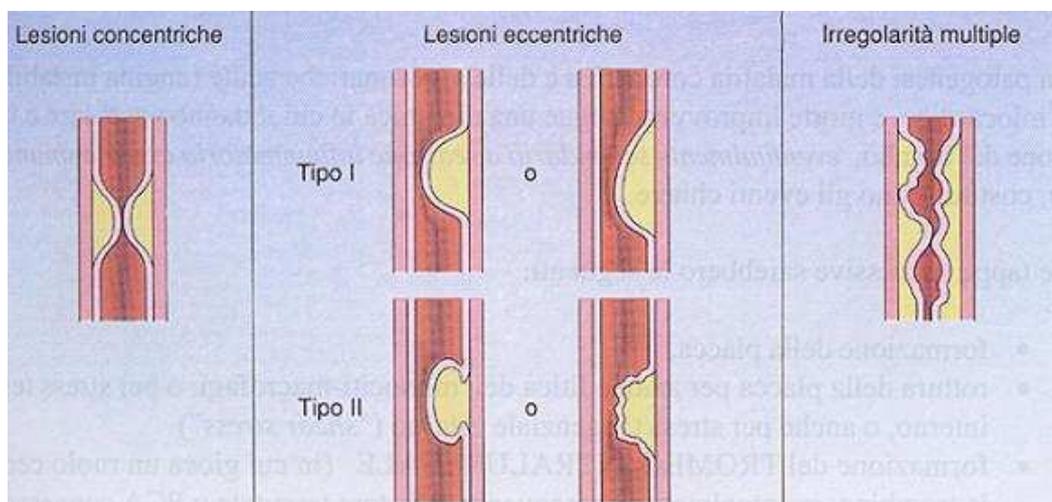


Figura 2.1: immagine schematica di vari tipi di lesioni aterosclerotiche.

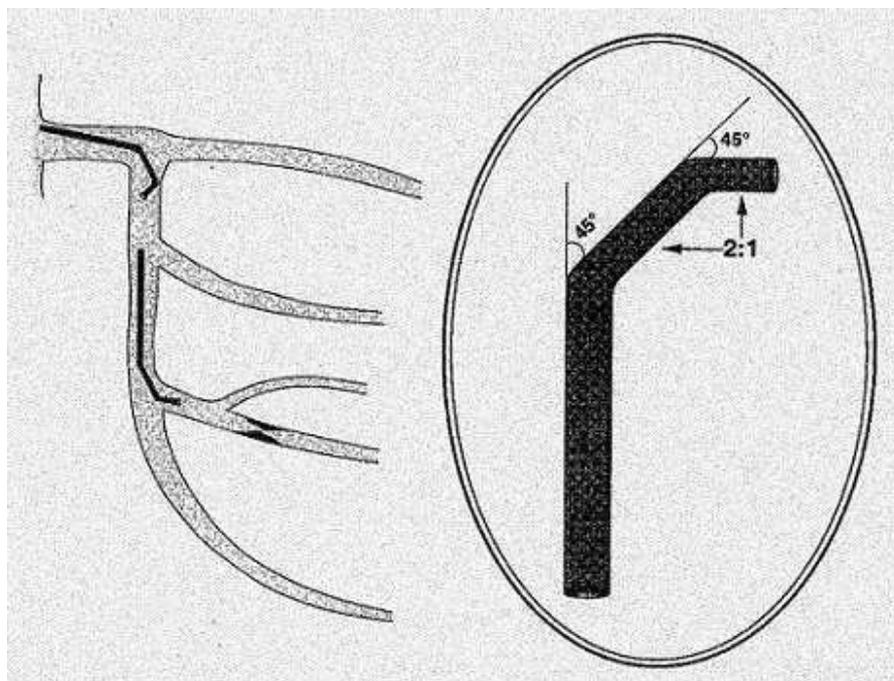


Figura 2.2: catetere guida. All'interno scorre il cavo guida e il catetere su cui è montato il dispositivo di trattamento della lesione.

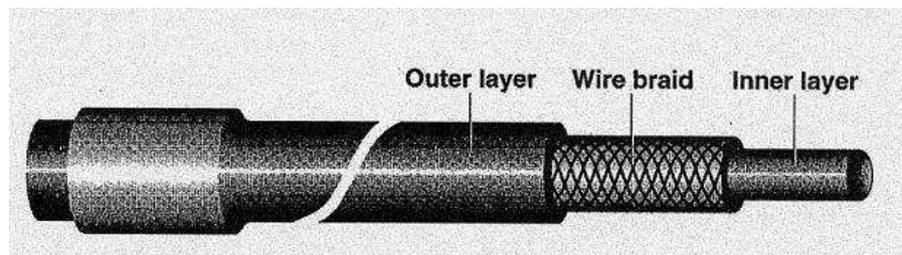


Figura 2.3: cavo guida, di cui si possono notare i vari strati costituenti.

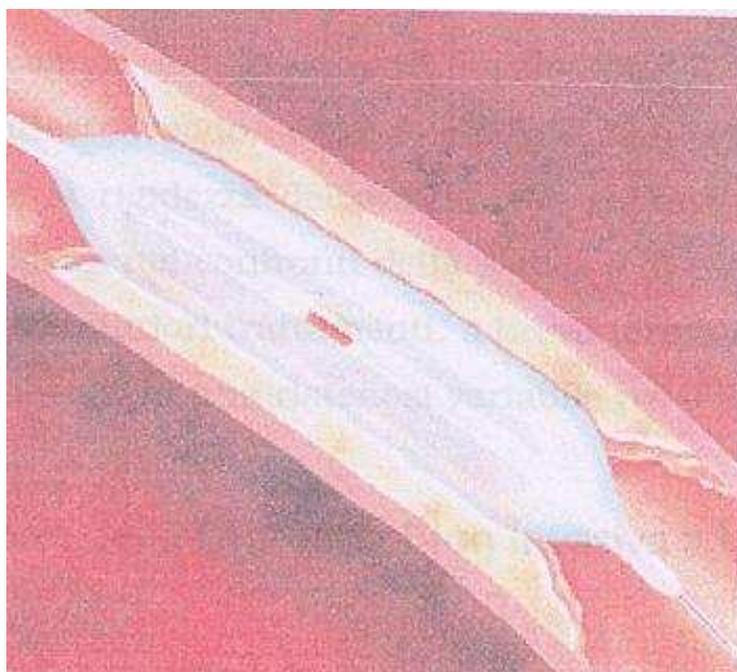


Figura 2.4: meccanismo di dilatazione del vaso stenotico con la tecnica PTCA.

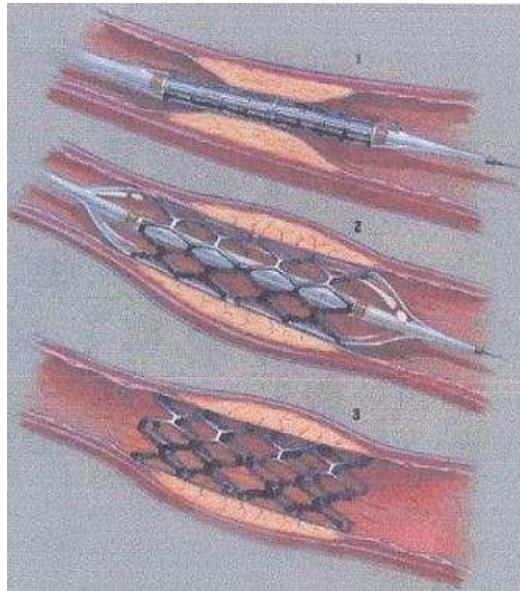


Figura 2.5: apposizione di stent espandibile con palloncino.

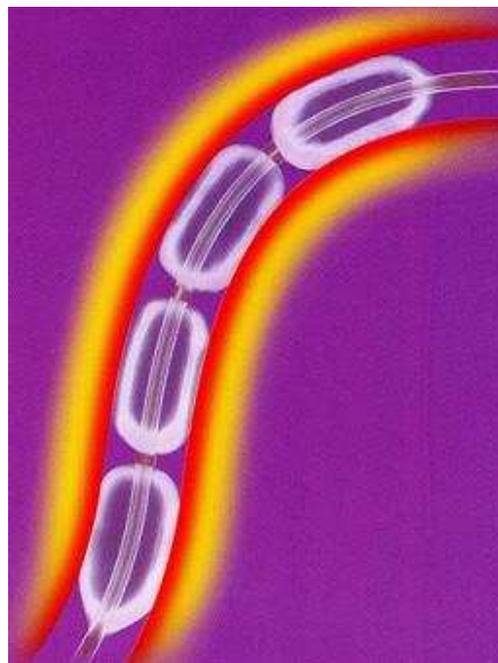


Figura 2.6: applicazione di più cateteri in serie per sistemi di terapia radiante intracoronarica.

Capitolo 3

Analisi strutturale in regime di grandi deformazioni

3.1 Cinematica di un atto di moto

Sia Ω_0 la *configurazione di riferimento* del mezzo, in cui un punto P ha coordinate \mathbf{X} . Il mezzo subisca un processo deformativo che lo porti, al tempo t , in una configurazione $\Omega(t)$: il punto P si troverà ora in una posizione p , di coordinate \mathbf{x} rispetto allo stesso riferimento. Il vettore $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ è detto *traiettoria* del punto $P(\mathbf{X})$. Il vettore

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.1)$$

definisce lo *spostamento* del punto nella transizione $\Omega_0 \rightarrow \Omega$. L'ipotesi fondamentale, detta di *congruenza*, assume che il cambiamento di configurazione avvenga senza lacerazioni o compenetrazioni di materiale. Ciò richiede che le componenti del vettore spostamento siano funzioni continue e ad un solo valore di \mathbf{X} .

Si definiscono ora le relazioni cinematiche relative ad un *atto di moto* a partire dalla configurazione corrente $\Omega(t)$. Si consideri in Ω un punto $P_0(\mathbf{X}_0)$ che in $\Omega(t)$ si è trasformato in $p_0(\mathbf{x}_0)$ seguendo la traiettoria $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{X}_0, t)$. Per congruenza, un punto $P(\mathbf{X})$ originariamente nell'intorno di $P_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = d\mathbf{X})$ si trasforma in $p(\mathbf{x})$ sempre nell'intorno di $p_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = d\mathbf{x})$.

Sia $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_0, t) = \partial \mathbf{x}_0 / \partial t = \partial \mathbf{s}_0 / \partial t$ la velocità di p_0 nell'atto di moto da $\Omega(t)$ e $d\mathbf{v}$ la velocità relativa di p rispetto a p_0 . La velocità di p è allora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}$, dove

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{con} \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2)$$

Il tensore del secondo ordine \mathbf{L} è detto *gradiente di velocità*. Esso può essere espresso come somma delle sue parti emisimmetrica e simmetrica ($\mathbf{L} = \mathbf{W} + \mathbf{D}$), con

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^t), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \nabla^s \mathbf{v} \quad (3.3)$$

essendo $\nabla^s \alpha$ è un simbolo abbreviato per indicare la parte simmetrica del gradiente del tensore α . La velocità del punto p allora si scrive

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.4)$$

La (3.4) distingue, nell'atto di moto, il contributo della traslazione rigida \mathbf{v}_0 dell'intorno, quello della sua rotazione rigida $\mathbf{W} \cdot d\mathbf{x}$ e la sua parte puramente deformativa $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{x}$ (Malvern, 1969). \mathbf{W} è noto come velocità di rotazione o *spin*, mentre \mathbf{D} prende il nome di velocità di deformazione o *stretching*.

3.2 Il principio delle potenze virtuali

Si consideri un mezzo continuo in una configurazione Ω , soggetto alle forze di volume e di superficie $\rho \mathbf{b}$ e \mathbf{f} . Si definisce atto di moto *virtuale* da Ω una qualunque distribuzione di velocità $\hat{\mathbf{v}}$ da cui sia derivabile attraverso la seconda delle (3.3) un tensore velocità di deformazione $\hat{\mathbf{D}} = \nabla^s \hat{\mathbf{v}}$. Si può dimostrare che imporre l'uguaglianza

$$\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = \int_V \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{D}}) dV \quad (3.5)$$

per *tutti* i possibili atti di moto virtuali da Ω equivale ad imporre le condizioni di equilibrio in Ω . Il primo membro della (3.5) rappresenta la potenza virtuale *esterna*, mentre il secondo, definisce la potenza virtuale *interna* ($\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{D}}) = \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}}^t$).

Il principio non sottintende alcun rapporto causa-effetto tra le quantità statiche in Ω e l'atto di moto da Ω , ne è in alcun modo condizionato dalla natura del materiale di cui il mezzo è costituito. Esso coinvolge unicamente la struttura matematica degli operatori che governano gli ambiti statici e cinematici, stabilendone la coerenza formale.

3.3 Approcci Lagrangiano ed Euleriano

Si vogliono ora definire misure che caratterizzino lo stato di deformazione del mezzo nella transizione finita $\Omega_0 \rightarrow \Omega$.

Sarebbe spontaneo considerare la transizione come una sequenza di atti di moto, per ognuno dei quali è stato definito il tensore di velocità di deformazione \mathbf{D} , ed ottenere il risultato integrando tale tensore sul percorso. Questa misura di deformazione (nota come *naturale* o *logaritmica*) verrebbe però a dipendere non solo dalle configurazioni iniziale e finale, ma anche dal percorso effettivamente seguito, in particolar modo con cui rotazioni rigide e deformazioni vere e proprie si susseguono nella transizione. È peraltro evidente che le grandezze

deformative di interesse (variazioni di lunghezza, di angoli, di volume, etc.) sono indipendenti da tale sequenza ed è quindi auspicabile che la misura di deformazione ne prescindano.

Va a questo proposito sottolineato come sia possibile introdurre anche misure alternative di deformazione. I soli requisiti essenziali sono infatti che esse siano univocamente determinate dagli spostamenti (che definiscono completamente il cambiamento di configurazione), che contengano solo i contributi della deformazione e che abbiano natura tensoriale, assicurando così quelle invarianze rispetto al sistema di riferimento che le rende in grado di rappresentare grandezze fisiche.

Esistono due rappresentazioni fondamentali della cinematica di un mezzo continuo: l'approccio Lagrangiano e quello Euleriano.

L'approccio *Lagrangiano* (o *materiale*) assume come variabili indipendenti il punto materiale P (o, equivalentemente, la sua posizione iniziale \mathbf{X}) e il tempo t , mentre l'approccio *Euleriano* (o *spaziale*) considera la posizione \mathbf{x} occupata dal punto al tempo t e il tempo stesso. Il primo è spontaneo nella meccanica dei solidi, dove l'interesse è di regola focalizzato sulle vicende del punto materiale; il secondo, che fissa l'attenzione su di una regione di spazio piuttosto che su di una porzione di materia, appare invece più adatto in meccanica dei fluidi. Entrambi gli approcci forniscono comunque una descrizione completa della cinematica del mezzo.

Indipendentemente dall'approccio, le derivate rispetto al tempo di determinate quantità vanno spesso intese come derivate *materiali*; alcune attenzioni sono invece necessarie nell'approccio Euleriano. Infatti in questo caso la derivata parziale rispetto al tempo di una funzione $g(\mathbf{x}, t)$ ne rappresenta soltanto la variazione *locale*, mentre la sua derivata materiale (o *sostanziale*) si esprime come:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(g) \quad (3.6)$$

dove il gradiente di spostamento va inteso rispetto a \mathbf{x} .

Per meglio comprendere la differenza tra la descrizione materiale e quella spaziale, si consideri una semplice quantità scalare, come ad esempio la densità ρ del materiale :

a) *descrizione materiale*: la variazione di ρ è descritta rispetto alla coordinata iniziale \mathbf{X} che individua la posizione della particella elementare nel continuo al tempo $t = 0$:

$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t) \quad (3.7)$$

b) *descrizione spaziale*: ρ è descritta rispetto alla posizione nello spazio, \mathbf{x} , correntemente occupata da una particella elementare del continuo al tempo t :

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (3.8)$$

3.4 Deformazioni finite

Sia la traiettoria che lo spostamento dei punti del mezzo, tra cui sussiste la relazione (3.1), descrivono completamente il cambiamento di configurazione $\Omega_0 \rightarrow \Omega$. Con riferimento alla posizione iniziale \mathbf{X} di un punto (approccio Lagrangiano), si scrive

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (3.9)$$

Un vettore $d\mathbf{X}$ che congiunge due punti a distanza infinitesima in Ω_0 si trasformerà nel vettore $d\mathbf{x}$ in Ω . La trasformazione è governata dalla relazione

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.10)$$

essendo \mathbf{I} il tensore identico del secondo ordine. Il tensore doppio \mathbf{F} è noto come *gradiente di deformazione*. Indicando con lettere maiuscole le coordinate del punto Ω_0 e con minuscole quelle in Ω , la sua espressione si scrive, rispettivamente in un riferimento cartesiano ortogonale ed in uno cilindrico come

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial x}{R \partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r \partial \theta}{\partial R} & \frac{r \partial \theta}{R \partial \Theta} & \frac{r \partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R \partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Si consideri ora una configurazione intermedia nella transizione $\Omega_0 \rightarrow \Omega$, in cui il vettore $d\mathbf{x}$ si è trasformato in $d\xi$. Si può allora scrivere successivamente $d\xi = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x} = \mathbf{F}_2 \cdot d\xi$ da cui consegue $d\mathbf{x} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{X}$. È quindi $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1$: il gradiente di deformazione totale si ottiene come il prodotto dei contributi delle transizioni intermedie, presi nell'ordine inverso.

Nella transizione, $d\mathbf{X}$ può cambiare sia il modulo che la direzione. Il secondo effetto è in genere dovuto sia a deformazione che a rotazione rigida. Utilizzando il teorema di decomposizione polare, è possibile separare i due contributi scrivendo

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3.12)$$

dove \mathbf{R} è un tensore ortonormale ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$) che governa la rotazione rigida e \mathbf{U} e \mathbf{V} sono due tensori, simmetrici e definiti positivi, che misurano la parte puramente deformativa, noti come tensori di *stretch*, rispettivamente destro e sinistro. Per quanto sopra affermato, la prima espressione assume che l'intorno venga prima deformato senza rotazione ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{U}$) e successivamente

ruotato ($\mathbf{F}_2 = \mathbf{R}$), mentre la seconda presuppone la sequenza inversa. Pur rappresentando lo stesso stato deformativo, i due tensori sono tra loro diversi a causa della rotazione del riferimento (incidentalmente, integrando il tensore di stretching \mathbf{D} in assenza di spin, si ottiene il tensore $\mathbf{A} = \ln(\mathbf{U})$, a volte utilizzato come misura di deformazione).

Misure che non presuppongono una particolare sequenza tra deformazioni e rotazioni vengono definite considerando che, dette rispettivamente $dU = |d\mathbf{X}|$ e $du = |d\mathbf{x}|$ le lunghezze iniziale e corrente di una fibra, l'intorno di un punto subisce al più un moto rigido se è $du = dU$ per tutte le fibre al suo interno. Si pone allora

$$(du)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{e} \quad (du)^2 - (dU)^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.13)$$

dove \mathbf{C} ed \mathbf{E} sono le misure di deformazione Lagrangiana cercate (di fatto equivalenti).

Essendo $(dU)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$, $(du)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ e ricordando la (3.10), si ottiene immediatamente

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.14)$$

Sono questi i due tensori (simmetrici) di deformazione destro di Green e di Lagrange. Si noti come in assenza di deformazione, si abbia $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Come per ogni tensore simmetrico, il tensore \mathbf{E} (ed anche il tensore \mathbf{C}) ammette un riferimento triortogonale nel quale assume forma diagonale, precisamente

$$\begin{bmatrix} E_I & 0 & 0 \\ 0 & E_{II} & 0 \\ 0 & 0 & E_{III} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

I valori E_α , con $\alpha = I, II, III$, e gli assi di questo riferimento privilegiato sono noti come deformazioni e direzioni *principali*. Le deformazioni principali, che sono quantità indipendenti dal riferimento rispetto al quale \mathbf{E} è stato originariamente definito, sono quindi *invarianti* dello stato deformativo. Ulteriori invarianti scalari sono forniti dalle seguenti espressioni compatte

$$I_E = \text{tr}(\mathbf{E}) \quad II_E = \frac{1}{2} (I_E^2 - \mathbf{E} : \mathbf{E}) \quad III_E = \det(\mathbf{E}) \quad (3.16)$$

che esplicitate diventano

$$I_E = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz} = E_I + E_{II} + E_{III} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} II_E &= E_{xx}E_{yy} + E_{yy}E_{zz} + E_{zz}E_{xx} - E_{xy}E_{yx} + E_{yz}E_{zy} + E_{zx}E_{xz} \\ &= E_I E_{II} + E_{II} E_{III} + E_{III} E_I \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$III_E = E_I E_{II} E_{III} \quad (3.19)$$

noti, rispettivamente, come invarianti *lineare*, *quadratico* e *cubico* (in generale, l'indice identifica il tensore cui gli invarianti si riferiscono). Informazioni deformative di interesse ingegneristico possono essere ricavate a partire da questi tensori. La più semplice di queste è il cosiddetto *stretch* $\Lambda = ds/dS$ di una fibra da cui si deduce la *deformazione diretta* $\epsilon = \Lambda - 1$. Per una fibra originariamente orientata secondo l'asse cartesiano X , risulta

$$\Lambda_x^2 = C_{xx} = 1 + 2 E_{xx} \quad \epsilon = \sqrt{C_{xx}} - 1 = \sqrt{1 + 2 E_{xx}} - 1 \quad (3.20)$$

Pure di interesse è la variazione di un angolo tra due fibre. Se queste sono originariamente orientati secondo due assi ortogonali, ad esempio X ed Y , l'angolo θ_{xy} che esse formano a deformazione avvenuta si ottiene dalla relazione

$$\cos \theta_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx} C_{yy}}} = \frac{2 E_{xy}}{\sqrt{1 + 2 E_{xx}} \sqrt{1 + 2 E_{yy}}} = \sin \gamma_{xy} \quad (3.21)$$

dove $\gamma_{xy} = \pi/2 - \theta_{xy}$ rappresenta la variazione dell'angolo tra le due fibre ed è noto come *scorrimento angolare*.

Il rapporto tra i volumi finale dV e iniziale $d\bar{V}$ di un elemento infinitesimo dipende (come ben atteso) dagli invarianti dei tensori di deformazione, definiti dalle relazioni (3.17), (3.18), (3.19). La sua espressione si scrive

$$\frac{dV}{d\bar{V}} = \sqrt{III_c} = \sqrt{1 + 2 I_E + 4 II_E + 8 III_E} = J \quad (3.22)$$

$J = \det(\mathbf{F})$ è lo Jacobiano della trasformazione $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$. L'ultima uguaglianza consegue dalla definizione di invariante cubico e dalla prima delle (3.14), che stabiliscono $\sqrt{III_C} = \det(\mathbf{F})$.

Le (3.14) e la seconda delle (3.10) permettono di esprimere le componenti dei tensori di deformazione in termini delle derivate degli spostamenti.

Ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale (O ; X ; Y ; Z) si ottiene, per le componenti di \mathbf{E}

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (3.23)$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial X} \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \frac{\partial u_y}{\partial Y} + \frac{\partial u_z}{\partial X} \frac{\partial u_z}{\partial Y} \right] \quad (3.24)$$

Se le derivate degli spostamenti sono piccole rispetto all'unità, i termini in parentesi quadra possono essere trascurati, fornendo così l'espressione normalmente impiegata in presenza di *piccole deformazioni* (l'ipotesi in realtà richiede che anche le rotazioni siano piccole). In tal caso, le componenti di deformazione forniscono direttamente le informazioni di interesse ingegneristico. Risulta infatti

$$\epsilon_x = E_{xx} \quad \gamma_{xy} = 2 E_{xy} \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dV} - 1 = E_x + E_y + E_z = I_E \quad (3.25)$$

In materiali molto deformabili, tuttavia, la linearizzazione del legame non è legittima.

Misure di deformazione Euleriana si ottengono in modo analogo. L'ipotesi di congruenza assicura che la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$ è invertibile. È quindi possibile scrivere, in luogo delle (3.8), (3.9)

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (3.26)$$

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.27)$$

La (3.26) definisce la posizione iniziale del punto materiale che correntemente (al tempo t) occupa la posizione \mathbf{x} . Il gradiente di deformazione Euleriano (3.27) è il tensore inverso dell'analogo misura Lagrangiana ($\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}$): avendo, come la (3.22) stabilisce, lo Jacobiano $J = \det(\mathbf{F})$ il significato di variazione di volume, è ovunque $J > 1$ ed il tensore inverso è definibile. Procedendo come nel caso precedente, si ottengono i tensori

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{C}) \quad (3.28)$$

tali che $(dU)^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\mathbf{x}$ e $(du)^2 - (dU)^2 = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x}$.

Il tensore \mathbf{e} , che rappresenta la misura Euleriana di deformazione finita più usata, è noto come tensore di Almansi.

Comunemente, la maggior parte dei testi, introduce per comodità di notazione anche il tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{da cui} \quad \mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1} \quad (3.29)$$

Il tensore di Almansi, in precedenza introdotto, assume quindi la nuova espressione

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (3.30)$$

In virtù di una futura programmazione in FORTRAN è conveniente esprimere le componenti dei tensori \mathbf{b} e \mathbf{C} in una più semplice notazione indiciale. In particolare si ha

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{diventa} \quad C_{IJ} = \sum_{k=1}^3 F_{kI} F_{kJ} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{diventa} \quad b_{ij} = \sum_{K=1}^3 F_{iK} F_{jK} \quad (3.32)$$

Le informazioni deformative di interesse (stretch, scorrimenti angolari, variazioni di volume) possono essere espresse in termini delle componenti dei tensori appena introdotti.

3.5 Misure statiche coniugate

Alle misure cinematiche precedenti è necessario associare grandezze statiche con esse coerenti. Il problema è evidente con riferimento all'approccio Lagrangiano, in quanto le quantità statiche introdotte in precedenza, sono riferite alla configurazione corrente ed hanno quindi natura Euleriana.

La coerenza matematica tra gli operatori che governano gli ambiti cinematico e statico è garantita dal principio delle potenze virtuali, di cui si vuole conservare la validità. In un approccio Lagrangiano, un atto di moto a partire dalla configurazione corrente Ω è governata dalle velocità $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{X}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}))$ e, in termini deformativi, dalla derivata materiale della misura di deformazione (ad esempio, $\dot{\mathbf{E}}$), rappresentazione alternativa, pur se equivalente, al tensore \mathbf{D} , riferita però alla configurazione iniziale Ω_0 . Le corrispondenti quantità statiche (forze di volume $\bar{\rho}\mathbf{B}(\mathbf{X})$ in \bar{V} , dove $\bar{\rho}$ è la densità in Ω_0 , le trazioni superficiali $\mathbf{t}(\mathbf{X})$ su \bar{S} e sforzi $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ in \bar{V}) vengono definite imponendo le uguaglianze

$$\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\bar{V} + \int_{\bar{S}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\bar{S} \quad (3.33)$$

$$\int_V tr(\sigma \hat{\mathbf{D}}) dV = \int_{\bar{V}} tr \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{E}} d\bar{V} \quad (3.34)$$

valgono per tutti i possibili atti di moto virtuali da Ω . Queste definizioni rappresentano sempre *misure nella configurazione corrente, riferite però alla configurazione iniziale*.

La (3.33), che impone l'equivalenza in termini di potenza virtuale esterna, non dipende dalla misura di deformazione adottata e le definizioni che ne conseguono hanno validità generale in ambito Lagrangiano. Omettendo la dimostrazione, si giunge quindi a scrivere la seguente relazione

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \quad \mathbf{t}(\mathbf{X}) d\bar{S} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) dS \quad (3.35)$$

Pertanto nel riferire le forze di volume alla configurazione iniziale, occorre soltanto tener conto della variazione di densità e la risultante delle trazioni superficiali su di un'area infinitesima si mantiene immutata quando queste sono riportate a Ω_0 .

Per definire la misura di sforzo coniugata ad \mathbf{E} , occorre preliminarmente esprimere $\dot{\mathbf{E}}$ in funzione di \mathbf{D} . Risulta $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$ (Malvern, 1969) e dalla (3.34) si ottiene

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (3.36)$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ il tensore degli sforzi di Cauchy. La (3.26) definisce la misura di sforzo nota come *secondo tensore di Piola-Kirchhoff*. Essendo per la seconda delle (3.14) $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}}$, la (3.26) definisce anche, a meno di un fattore 2, lo sforzo coniugato al tensore di Green. \mathbf{S} è un tensore doppio simmetrico, che gode essenzialmente delle stesse quantità del tensore di sforzo di Cauchy. Esso rappresenta tuttavia, una definizione di sforzo puramente formale, di non facile interpretazione.

Si menziona che un'ulteriore misura Lagrangiana di sforzo, il *primo tensore di Piola-Kirchhoff* (o di *Lagrange*), è fornita da $\mathbf{P} = \mathcal{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$. Tale tensore non è simmetrico perchè coniugato al gradiente di deformazione \mathbf{F} che incorpora, oltre alla deformazione pura, anche la rotazione rigida. Rispetto ad \mathbf{S} , \mathbf{P} presenta il vantaggio di una più agevole interpretazione meccanica, rappresentando un generalizzazione della spontanea definizione *ingegneristica* di sforzo riportato alla configurazione iniziale.

Per quanto riguarda l'approccio Euleriano, si osserva innanzi tutto che le forze di volume $\rho\mathbf{b}(\mathbf{x})$ e le trazioni superficiali $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono di per sè coniugate con le velocità relative ad un atto di moto da Ω . Non è a priori assicurato che le misure Euleriane di deformazione incognita siano coniugate allo sforzo di Cauchy attraverso una equivalenza in termini di potenza virtuale interna. Per il tensore di Almansi si può peraltro dimostrare che la sua *derivata convettiva*, una misura di velocità di deformazione meccanicamente significativa e che può essere considerata una derivata materiale, si identifica con lo stretching \mathbf{D} (Malvern, 1969), per cui si può ritenere \mathbf{e} coniugato allo sforzo di Cauchy. Partendo dalla conoscenza del tensore degli sforzi di Cauchy, è possibile inoltre determinare, previa moltiplicazione di \mathcal{J} , il *tensore degli sforzi di Kirchhoff*

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathcal{J}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (3.37)$$

che definisce una misura alternativa dello stato di sforzo nella configurazione corrente. Essendo proporzionale a $\boldsymbol{\sigma}$ attraverso uno scalare, ne conserva tutte le proprietà tensoriali. Anche il secondo tensore di Piola-Kirchhoff, è legato al tensore $\boldsymbol{\tau}$. La relazione funzionale è la seguente

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.38)$$

essendo, al solito, \mathbf{F} il gradiente di deformazione Euleriana definito dalla (3.10). Combinando la (3.37) e la (3.38) si ottiene la formula

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{J}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.39)$$

nota come operazione di *push forward*.

In ultimo anche il primo tensore di Kirchhoff-Piola può essere espresso in funzione delle grandezze precedenti. In particolare si ha

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{X}) \quad \text{da cui} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.40)$$

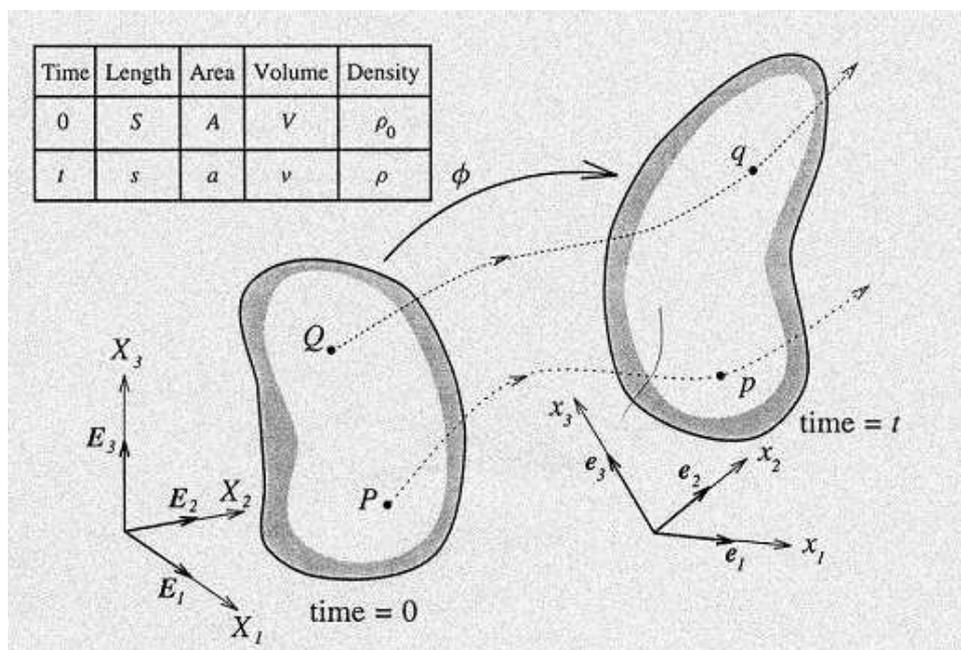


Figura 3.1: cinematica di un corpo deformabile in regime di grandi deformazioni.

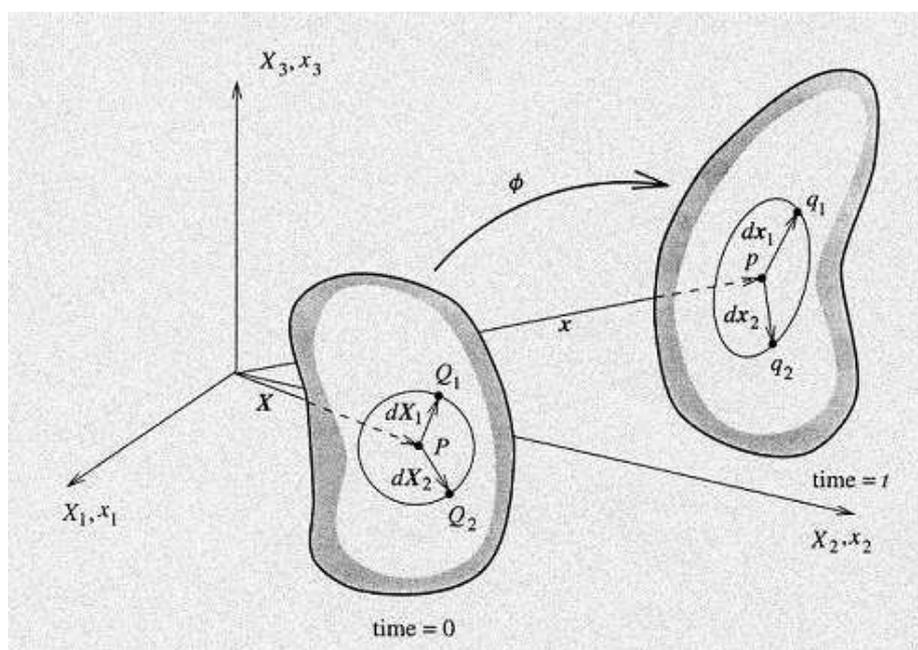


Figura 3.2: cinematica di un corpo deformabile in regime di grandi deformazioni. Trasformazione dell'interno di una particella.

Capitolo 4

Sviluppo di legami costitutivi per protesi a palloncino

4.1 Il concetto di iperelasticità

In questo Capitolo si tratta la teoria dell'iperelasticità ([3]), necessaria per lo sviluppo di legami costitutivi iperelastici.

Un materiale è detto *iperelastico* quando il lavoro compiuto dallo stato di sforzo durante il processo deformativo è indipendente dal percorso, dipendendo solamente dalla configurazione iniziale al tempo t_0 e da quella finale al tempo t .

Dal punto di vista matematico, si postula quindi l'esistenza di un potenziale $\psi(\mathbf{C})$, definito positivo, che riflette l'ovvia necessità di compiere lavoro positivo per deformare il solido.

Tale funzione rappresente l'energia di deformazione immagazzinata nel solido durante la storia deformativa e disponibile per ripristinare la condizione iniziale del solido stesso.

Si dimostra che l'equazione

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.1)$$

esprime il *legame iperelastico*, che può essere tradotto in una relazione esplicita tra sforzi e deformazioni una volta definita l'espressione dell'energia di deformazione.

Peraltro, i materiali spesso possiedono delle *simmetrie* di comportamento. La più completa forma di simmetria, detta *isotropia*, assume che il materiale fornisca la stessa risposta in ogni direzione. Il legame risulta allora invariante rispetto al riferimento e l'energia di deformazione dipende dalla deformazione solo attraverso i suoi invarianti. Riconoscendone l'uguaglianza formale con le espressioni (3.17), (3.18), (3.19) è utile proporre anche le formule che identificano gli invarianti del tensore \mathbf{C}

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = C_{KK} \quad (4.2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) = \frac{1}{2}(C_{KK}C_{LL} - C_{KL}C_{LK}) \quad (4.3)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2 \quad (4.4)$$

Nelle ipotesi di materiale iperelastico isotropo, il tensore del secondo ordine \mathbf{S} , partendo dalla (4.1), si scrive come

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.5)$$

ed è dipendente, come si nota, dalle derivate degli invarianti calcolate rispetto alle componenti di \mathbf{C}

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (4.6)$$

Introducendo quindi le (4.6) nella (4.5) il secondo tensore di Piola-Kirchhoff assume la forma compatta

$$\mathbf{S} = 2\psi_1 \mathbf{I} + 2\psi_2 (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + 2J^2 \psi_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (4.7)$$

dove si sono introdotte, per comodità, le relazioni

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \quad \psi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \quad (4.8)$$

Ricordando ora l'operazione di push-forward introdotta in precedenza (Capitolo 3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau} \quad (4.9)$$

e ricordando che il tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green ha espressione $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$, è possibile ricavare il tensore degli sforzi di Cauchy sostituendo la (4.7) nella (4.9)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \psi_1 \mathbf{b} + 2J^{-1} \psi_2 (I_1 \mathbf{b} - \mathbf{I}) + 2J \psi_3 \mathbf{I} \quad (4.10)$$

Si può inoltre dimostrare come gli invarianti del tensore \mathbf{b} siano indentici a quelli del tensore \mathbf{C}

$$I_b = \text{tr}(\mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{C}) = I_1 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} II_b &= \text{tr}^2(\mathbf{b}) - \text{tr}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \text{tr}^2(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) - \text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \\ &= \text{tr}^2(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) - \text{tr}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \\ &= \text{tr}^2(\mathbf{C}) - \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) = I_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$III_b = \det(\mathbf{b}) = \det(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) = \det(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \det(\mathbf{C}) = I_3 \quad (4.13)$$

Di conseguenza, per questa proprietà i termini ψ_I , ψ_{II} , ψ_{III} che compaiono nell'equazione (4.8) sono anche le derivate di ψ rispetto agli invarianti di \mathbf{b} .

4.2 Elasticità in forma tensoriale

Alcune formulazioni richiedono, per l'analisi strutturale in regime di grandi deformazioni, il calcolo del modulo elastico tensoriale.

Rispetto alla configurazione di riferimento il tensore simmetrico del quarto ordine \mathcal{C} , conosciuto come *tensore di elasticità Lagrangiano* o *tensore materiale*, è definito dalla seguente relazione alle derivate parziali

$$\mathcal{C}_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} = \frac{4 \partial^2 \psi}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} \quad (4.14)$$

che per semplicità di notazione può anche essere scritte anche nella seguente forma compatta

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.15)$$

Il calcolo del *tensore di elasticità Euleriano* o *tensore spaziale* può essere effettuato applicando l'operazione di *push forward* alle precedenti relazioni

$$c_{ijkl} = \frac{1}{J} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathcal{C}_{IJKL} \quad (4.16)$$

Sarebbe possibile, inoltre, dimostrare la seguente proprietà valida per entrambi i tensori introdotti ([3])

$$\mathcal{C}_{IJKL} = \mathcal{C}_{KLIJ} \quad (4.17)$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (4.18)$$

4.3 Un caso particolare di energia potenziale

La più semplice forma di energia potenziale è quella che caratterizza il modello di St. Venant-Kirchhoff. La funzione considerata ha una espressione del tipo

$$\psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda [tr(\mathbf{E})]^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E} \quad (4.19)$$

ed è quadratica rispetto alle componenti del tensore di deformazione di Lagrange. Le costanti (*material parameters*), da cui dipende, sono le note costanti di Lamè

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.20)$$

definite sulla base dei valori del modulo elastico E e del modulo di Poisson ν del materiale considerato.

Utilizzando la formula (4.5) è possibile ottenere l'espressione analitica del secondo tensore di sforzo di Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S} = \lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{E} \quad (4.21)$$

Con la (4.15), invece, si risale alla valutazione del tensore di elasticità Lagrangiano

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2 \mu \mathcal{I} \quad (4.22)$$

avendo indicato con “ \otimes ” il simbolo relativo al prodotto tensoriale.

Con \mathbf{I} e \mathcal{I} si denotano le seguenti due grandezze tensoriali

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i; \quad \mathcal{I} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.23)$$

espresse nell'usuale riferimento cartesiano di base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

In forma indiciale la (4.22) assume la forma

$$\mathcal{C}_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + 2 \mu \delta_{IK} \delta_{JL} \quad (4.24)$$

essendo i vari δ i corrispondenti indici di Kronecker (unitari per indici uguali e nulli per indici diversi).

Si noti come le ultime due equazioni siano analoghe a quelle utilizzate in elasticità lineare, in cui il tensore delle piccole deformazioni è stato sostituito dalla nota misura di deformazione di Green.

4.4 Iperelasticità isotropa nelle direzioni principali

Talvolta le equazioni costitutive di un materiale possono essere espresse in termini degli allungamenti $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ valutati nelle direzioni principali $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ del tensore di deformazione destro di Cauchy-Green.

Nel caso iperelastico, ciò equivale ad assumere una funzione energia di deformazione che dipende dagli allungamenti invece che dagli invarianti di \mathbf{C} .

In questo caso la determinazione delle quantità statiche ad esso connesse, quindi, andrà adattata alla nuova formulazione, che prevederà sensibili semplificazioni.

Il calcolo del secondo tensore di Piola-Kirchhoff, da cui si possono ricavare in

sequenza sia il tensore degli sforzi di Cauchy, che il tensore di elasticità, viene effettuato previa valutazione del tensore identico, del tensore \mathbf{C} e del suo inverso, tutti espressi nel nuovo riferimento. Ricordando che con \otimes si denota il prodotto tensoriale, le quantità indicate diventano rispettivamente

$$\mathbf{I} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \quad (4.25)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \quad (4.26)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^{-2} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \quad (4.27)$$

e sostituite nella (4.7) permettono di scrivere

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^3 (2\psi_1 + 2\psi_2(I_1 - \lambda_\alpha^2) + 2III_C\psi_3\lambda_\alpha^{-2}) \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \quad (4.28)$$

Anche in questo caso, ψ_I , ψ_{II} e ψ_{III} rappresentano le derivate della funzione potenziale ψ rispetto agli invarianti del tensore \mathbf{C} espressi in funzione degli stretches principali

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (4.29)$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \quad (4.30)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (4.31)$$

Differenziando le precedenti rispetto ai quadrati dei vari allungamenti si ottengono

$$\mathbf{I} = \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_\alpha^2}; \quad \lambda_\beta^2 + \lambda_\gamma^2 = \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_\alpha^2}; \quad \frac{I_3}{\lambda_\alpha^2} = \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_\alpha^2} \quad (4.32)$$

da cui si deduce l'espressione tensoriale e indiciale di \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^3 S_{\alpha\alpha} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha; \quad S_{\alpha\alpha} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\alpha^2} \quad (4.33)$$

Con l'operazione di push-forward è immediato ottenere il tensore degli sforzi di Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{2}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\alpha^2} \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \quad (4.34)$$

definito anch'esso, ovviamente, nel nuovo sistema di riferimento.

Osservando inoltre che $\mathbf{FN}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ (operazione lecita in base al teorema di decomposizione polare in cui $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, rappresenta la terna delle direzioni principali nella configurazione corrente) è possibile quindi trovare una relazione simile alla (4.33)

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \ln \lambda_\alpha} \quad (4.35)$$

Tuttavia la valutazione degli sforzi può essere fatta in maniera alternativa introducendo $T_{\alpha j}$ come componenti cartesiane di \mathbf{n}_α . Sostituendo quindi nella (4.35) la formula

$$\mathbf{n}_\alpha = \sum_{j=1}^3 T_{\alpha j} \mathbf{e}_j \quad (4.36)$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, rappresenta la terna ortogonale di versori nella configurazione corrente, si ricava la nuova espressione del tensore di Cauchy

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha\alpha} T_{\alpha j} T_{\alpha k} \right) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (4.37)$$

Come già detto per caratterizzare completamente un legame costitutivo iperelastico occorre anche definire l'espressione del tensore di elasticità sia nella configurazione di riferimento (tensore materiale), sia in quella corrente (tensore spaziale).

Omettendo l'articolata dimostrazione, che può essere reperita nel riferimento bibliografico [3], si preferisce dare conto solamente dei risultati fondamentali con particolare attenzione rivolta verso la scrittura indiciale delle formule in vista di un successiva programmazione.

Nella configurazione di riferimento (caratterizzata dalle direzioni principali $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$) si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_\alpha^2 \partial \lambda_\beta^2} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{N}_\beta \\ &+ \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 2 \frac{S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{N}_\alpha \end{aligned} \quad (4.38)$$

Nel caso particolare in cui si $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ la condizione di isotropia implica che $S_{\alpha\alpha} = S_{\beta\beta}$. Pertanto il quoziente $(S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}) / (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$ nell'equazione (4.38) porta quindi ad una indeterminazione matematica eliminabile con il noto teorema di de L'Hôpital

$$\lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} 2 \frac{S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_\beta^2 - \partial \lambda_\beta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_\alpha^2 - \partial \lambda_\beta^2} \right) \quad (4.39)$$

Il tensore di elasticità spaziale è ottenuto tramite la consueta operazione di push-forward applicata al tensore materiale. In particolare si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_\alpha^2 \partial \lambda_\beta^2} \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\beta \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 \frac{2}{J} \frac{S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\beta \otimes \mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha \end{aligned} \quad (4.40)$$

da cui si deduce, tenendo presente che $\mathbf{F} \mathbf{N}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha$, l'espressione definitiva

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \lambda_\alpha^2 \partial \ln \lambda_\beta^2} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\beta \\ &- \sum_{\alpha=1}^3 2 \sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 2 \frac{\sigma_{\alpha\alpha} \lambda_\beta^2 - \sigma_{\beta\beta} \lambda_\alpha^2}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta \end{aligned} \quad (4.41)$$

Per esprimere anche questo tensore nella più comoda forma indiciale è conveniente introdurre la stessa trasformazione utilizzata nella valutazione del tensore $\boldsymbol{\sigma}$. Utilizzando a tal proposito la stessa notazione e sostituendo la triade $T_{\alpha j}$ nella (4.41) si ottiene infine

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \lambda_\alpha^2 \partial \ln \lambda_\beta^2} T_{\alpha i} T_{\alpha j} T_{\beta k} T_{\beta l} - \sum_{\alpha=1}^3 2 \sigma_{\alpha\alpha} T_{\alpha i} T_{\alpha j} T_{\beta k} T_{\beta l} \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 2 \frac{\sigma_{\alpha\alpha} \lambda_\beta^2 - \sigma_{\beta\beta} \lambda_\alpha^2}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} T_{\alpha i} T_{\alpha j} T_{\beta k} T_{\beta l} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Un'ulteriore applicazione del teorema di de L'Hôpital permette di risolvere l'indeterminazione che si presenta nel caso in cui $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$

$$\lim_{\lambda_\beta \rightarrow \lambda_\alpha} 2 \frac{\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \lambda_\beta^2 - \partial \ln \lambda_\beta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \lambda_\alpha^2 - \partial \ln \lambda_\beta^2} \right) - 2 \sigma_{\beta\beta} \quad (4.43)$$

4.5 Il legame costitutivo di Neo-Hookean

Per lo studio del comportamento meccanico della protesi, si sviluppa il modello di Neo-Hookean per materiali compressibili, un legame costitutivo iperelastico frequentemente utilizzato per la caratterizzazione di materiali polimerici.

In particolare si analizzeranno e si confronteranno 3 tipologie di versioni le cui funzioni energetiche sono reperibili nelle segnalazioni bibliografiche [27], [33], [3].

Seguendo il procedimento esposto nei capitoli 4 e 5, (per la stesura delle relazioni analitiche), le 3 formulazioni vengono sintetizzate in altrettante tabelle, dando particolare enfasi alla notazione indiciale, molto comoda in vista di una implementazione in FORTRAN.

Mantenendo le stesse notazioni è necessario tuttavia, introdurre il tensore \mathbf{i} , una ulteriore grandezza, indispensabile per il calcolo del tensore di elasticità spaziale di ogni modello proposto.

Per definizione si ha che

$$\mathbf{i}_{ijkl} = \sum_{I,J,K,L=1}^3 F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathcal{I}_{IJKL} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.44)$$

essendo \mathcal{I}_{IJKL} la quantità (già definita)

$$\mathcal{I} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{da cui} \quad \mathcal{I}_{IJKL} = -\frac{\partial (\mathbf{C}^{-1})_{IJ}}{\partial C_{KL}} \quad (4.45)$$

avendo applicato la definizione di derivata direzionale di un tensore inverso. Nelle successive pagine sono proposti i modelli studiati. Per ognuno sono state ricavate tutte le quantità statiche che caratterizzano un legame costitutivo iperelastico: in particolare

- secondo tensore degli sforzi di Piola Kirchhoff
- tensore degli sforzi di Kirchhoff
- tensore degli sforzi di Cauchy
- tensore di elasticità materiale
- tensore di elasticità spaziale

Occorre ricordare, comunque, che il tensore di Cauchy e il tensore di elasticità spaziale possono essere determinati programmando l'operazione di push-forward, ed applicandola rispettivamente sul secondo tensore di Piola-Kirchhoff e sul tensore di elasticità materiale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (J - 1)^2 \quad (4.46)$$

$$\mathbf{S} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda J (J - 1) \mathbf{C}^{-1} \quad (4.47)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \lambda J (J - 1) \mathbf{I} \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \lambda (J - 1) \mathbf{I} \quad (4.49)$$

$$\mathcal{C} = \lambda J (2J - 1) \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} + 2 [\mu - \lambda (J^2 - J)] \boldsymbol{\mathcal{I}} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{c} = \lambda (2J - 1) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{2}{J} [\mu - \lambda (J^2 - J)] \mathbf{i} \quad (4.51)$$

Tabella 4.1: il modello iperelastico di Neo-Hookean: prima versione. Espressioni scritte in forma tensoriale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (J - 1)^2 \quad (4.52)$$

$$S_{ij} = \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \lambda J (J - 1) C_{ij}^{-1} \quad (4.53)$$

$$\tau_{ij} = \mu (b_{ij} - \delta_{ij}) + \lambda J (J - 1) \delta_{ij} \quad (4.54)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{J} (b_{ij} - \delta_{ij}) + \lambda (J - 1) \delta_{ij} \quad (4.55)$$

$$\mathcal{C} = \lambda J (2J - 1) C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 2 [\mu - \lambda (J^2 - J)] C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \quad (4.56)$$

$$c_{ijkl} = \lambda (2J - 1) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{J} [\mu - \lambda (J^2 - J)] \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.57)$$

Tabella 4.2: Il modello iperelastico di Neo-Hookean: prima versione. Espressioni scritte in forma indiciale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} \ln^2 J \quad (4.58)$$

$$\mathbf{S} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln J \mathbf{C}^{-1} \quad (4.59)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \lambda \ln J \mathbf{I} \quad (4.60)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{J} \ln J \mathbf{I} \quad (4.61)$$

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) \mathcal{I} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\lambda}{J} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{2}{J} (\mu - \lambda \ln J) \mathbf{i} \quad (4.63)$$

Tabella 4.3: Il modello iperelastico di Neo-Hookean: seconda versione. Espressioni scritte in forma tensoriale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} \ln^2 J \quad (4.64)$$

$$S_{ij} = \mu (b_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \lambda \ln J C_{ij}^{-1} \quad (4.65)$$

$$\tau_{ij} = \mu (b_{ij} - \delta_{ij}) + \lambda \ln J \delta_{ij} \quad (4.66)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{J} (b_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{J} \ln J \delta_{ij} \quad (4.67)$$

$$C_{ijkl} = \lambda C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J) C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \quad (4.68)$$

$$c_{ijkl} = \frac{\lambda}{J} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{J} (\mu - \lambda \ln J) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.69)$$

Tabella 4.4: Il modello iperelastico di Neo-Hookean: seconda versione. Espressioni scritte in forma indiciale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J) \quad (4.70)$$

$$\mathbf{S} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) \mathbf{C}^{-1} \quad (4.71)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) \mathbf{I} \quad (4.72)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda}{2J} (J^2 - 1) \mathbf{I} \quad (4.73)$$

$$\mathbf{C} = \lambda J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + [2\mu - \lambda (J^2 - 1)] \boldsymbol{\mathcal{I}} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{c} = \lambda J \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{J} [2\mu - \lambda (J^2 - 1)] \mathbf{i} \quad (4.75)$$

Tabella 4.5: Il modello iperelastico di Neo-Hookean: terza versione. Espressioni scritte in forma tensoriale.

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J) \quad (4.76)$$

$$S_{ij} = \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) C_{ij}^{-1} \quad (4.77)$$

$$\tau_{ij} = \mu (b_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{2} (J^2 - 1) \delta_{ij} \quad (4.78)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{J} (b_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{2J} (J^2 - 1) \delta_{ij} \quad (4.79)$$

$$C_{ijkl} = \lambda J^2 C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + [2\mu - \lambda (J^2 - 1)] C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \quad (4.80)$$

$$c_{ijkl} = \lambda J \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{J} [2\mu - \lambda (J^2 - 1)] \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.81)$$

Tabella 4.6: Il modello iperelastico di Neo-Hookean: terza versione. Espressioni scritte in forma indiciale.

4.6 Prova di sforzo uniassiale

Per tutte le simulazioni numeriche si utilizza il codice di calcolo ad elementi finiti FEAP nella versione 7.1 ([28], [25], [26], [27]).

In continua evoluzione, il software permette l'analisi strutturale anche in regime di grandi deformazioni con varie opzioni circa i tipi di elementi finiti utilizzabili. Essendo un programma fortemente indirizzato verso la ricerca scientifica, l'utente, seguendo le indicazioni suggerite dal "*Programmer Manual*" ([26]), può implementare un proprio legame costitutivo fornendo così un originale contributo allo sviluppo del programma stesso.

La prova è simulata su un singolo elemento cubico di lato 10 mm, in cui le condizioni al contorno sono scelte in modo da produrre uno stato di sforzo uniassiale. Il provino è modellato utilizzando un unico elemento solido e caricato imponendo un ciclo di spostamenti.

Le proprietà elastiche del materiale sono relative a quelle di una protesi a palloncino ed in particolare si è considerato un valore di modulo elastico di 25,8 N/mm² con un modulo di Poisson pari a 0,3.

Tali dati sono stati reperiti in letteratura ([22]), non avendo a disposizione parametri attendibili in merito.

Per ciascuna delle 3 versioni del legame costitutivo di Neo-Hookean, vengono valutate le seguenti grandezze

1. reazione totale agente sull'elemento lungo la direzione dello spostamento (Tabella 4.7)
2. spostamento trasversale dell'elemento per lo studio del fenomeno della strizione (Tabella 4.8)
3. sforzo complessivo agente sull'elemento lungo la direzione dello spostamento (Tabella 4.9)

Come ulteriore confronto tra le formulazioni si ritiene opportuno fare anche un'analisi della convergenza.

Viene predisposta allora, una tabella riepilogativa, in cui si indica il numero massimo di iterazioni per ciascun passo di carico su un valore dello spostamento imposto di 50 mm. Si noti come a tale valore di spostamento corrisponda un valore di deformazione del 500 %.

L'utilizzo del simbolo di asterisco indicherà un messaggio di WARNING segnalato dal codice, indicante un problema di cambio di segno nella diagonale principale della matrice di rigidezza.

Spost. [mm]	Deform. [%]	Versione 1	Versione 2	Versione 3
5	50	985,60	975,96	982,84
10	100	1683,12	1668,60	1679,04
15	150	2280,44	2265,40	2276,92
20	200	2834,32	2820,32	2831,24
25	250	3366,48	3353,88	3363,80
30	300	3886,52	3875,36	3884,28
35	350	4399,20	4389,60	4397,60
40	400	4907,60	4898,80	4906,00
45	450	5412,80	5405,20	5411,60
50	500	5916,00	5909,20	5914,80

Tabella 4.7: Andamento della reazione vincolare totale [N]

Spost. [mm]	Deform. [%]	Versione 1	Versione 2	Versione 3
5	50	-1,2813	-1,1983	-1,2557
10	100	-2,2050	-2,0192	-2,1574
15	150	-2,8959	-2,6338	-2,8335
20	200	-3,4343	-3,1189	-3,3633
25	250	-3,8679	-3,5157	-3,7920
30	300	-4,2265	-3,8488	-4,1478
35	350	-4,5292	-4,1340	-4,4491
40	400	-4,7891	-4,3819	-4,7085
45	450	-5,0153	-4,6002	-4,9348
50	500	-5,2145	-4,7945	-5,1344

Tabella 4.8: Andamento dello spostamento trasversale [mm]

Spost. [mm]	Deform. [%]	Versione 1	Versione 2	Versione 3
5	50	12,97	12,60	12,85
10	100	27,70	26,20	27,30
15	150	45,19	41,75	44,33
20	200	65,75	59,56	64,28
25	250	89,53	79,77	87,28
30	300	116,60	102,42	113,42
35	350	146,98	127,57	142,72
40	400	180,74	155,21	175,21
45	450	217,84	185,38	210,93
50	500	258,33	218,07	249,84

Tabella 4.9: Andamento dello stato di sforzo [N/mm²]

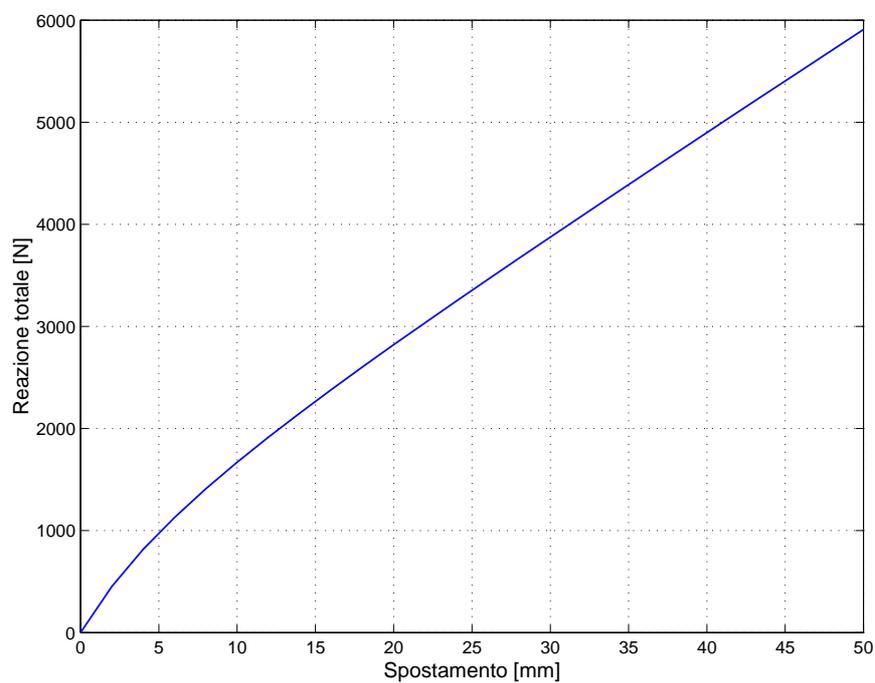


Figura 4.1: prova uniassiale. Grafico spostamenti-reazione totale per la versione 2.

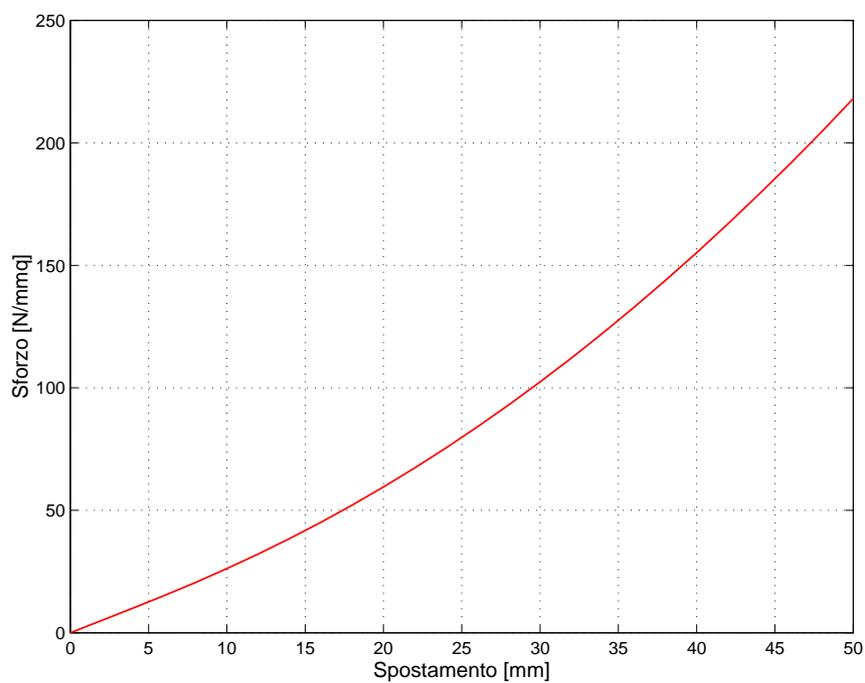


Figura 4.2: prova uniassiale. Grafico spostamenti-sforzo per la versione 2.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	5	5(*)	5
5	6(*)	6(*)	5(*)
10	5	5	5
25	4	4	4
50	4	4	4

Tabella 4.10: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico.

4.7 Generalizzazione del legame costitutivo di Neo-Hookean

Seguendo le indicazioni di Pister e di Simo ([22]) si è trovato un modo per generalizzare il legame costitutivo di Neo-Hookean.

Osservando infatti che per tutte le versioni analizzate il potenziale poteva essere scritto come

$$\psi = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) - \mu \log(J) + \lambda U(J) \quad (4.82)$$

imponendo per la funzione $U(J)$, variabile ovviamente da modello a modello, le condizioni

$$U(J) \geq 0; \quad \left[\frac{dU(J)}{dJ} \right]_{J=1} = 0 \quad (4.83)$$

è possibile quindi disporre di infinite formulazioni di tale legame, che si è dimostrato essere ottimale (dal punto di vista della convergenza) anche per analisi in grandissime deformazioni (ad esempio nel caso del test uniassiale).

In base a queste considerazioni vengono ora proposte le formule generali per il calcolo dei tensori di Piola-Kirchhoff, di Cauchy e di elasticità spaziale.

$$S_{ij} = \mu(\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \lambda J \frac{dU(J)}{dJ} C_{ij}^{-1} \quad (4.84)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{dU(J)}{dJ} \delta_{ij} + \frac{\mu}{J} (b_{ij} - \delta_{ij}) \quad (4.85)$$

$$c_{ijkl} = \lambda \frac{d}{dJ} \left(J \frac{dU(J)}{dJ} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{J} \left(\mu - \lambda J \frac{dU(J)}{dJ} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.86)$$

Dall'analisi di queste ultime espressioni di evince la correttezza delle relazioni per i tre modelli studiati (Tabelle 4.1 - 4.6) ricavate invece con il metodo classico (cioè per differenziazioni successive).

$$U_1 = \frac{1}{2} (J - 1)^2 \quad (4.87)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \ln^2 J \quad (4.88)$$

$$U_3 = \frac{1}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J) \quad (4.89)$$

Tabella 4.11: riepilogo delle funzioni $U(J)$ per le tre versioni del legame costitutivo iperelastico di Neo-Hookean.

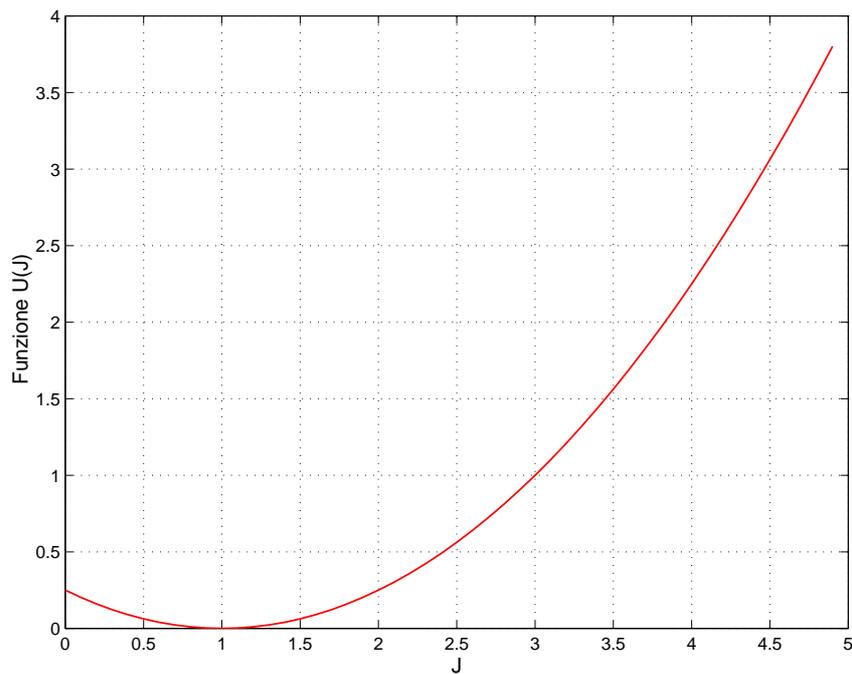


Figura 4.3: Grafico della funzione $U(J)$ per la versione 1

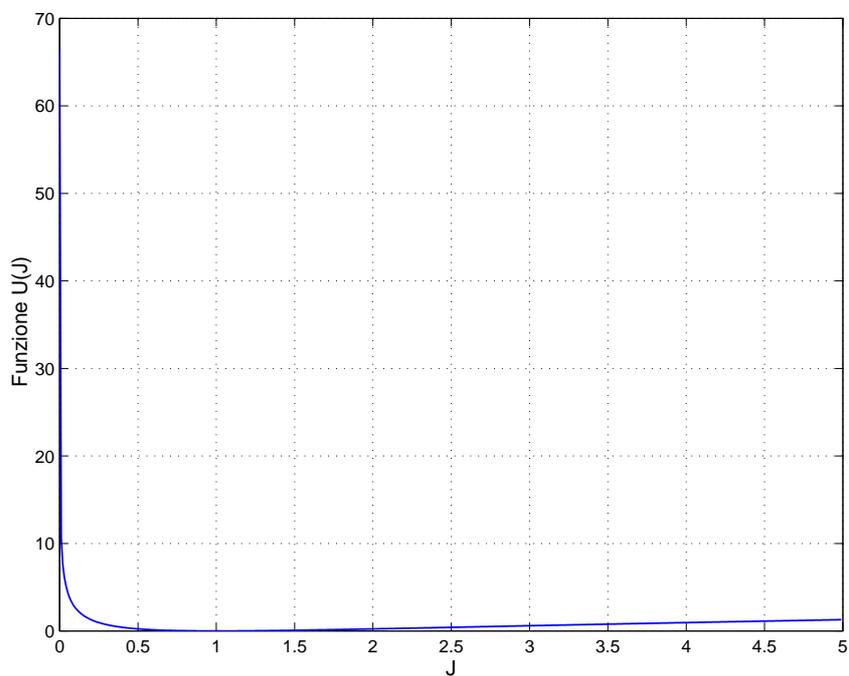


Figura 4.4: Grafico della funzione $U(J)$ per la versione 2

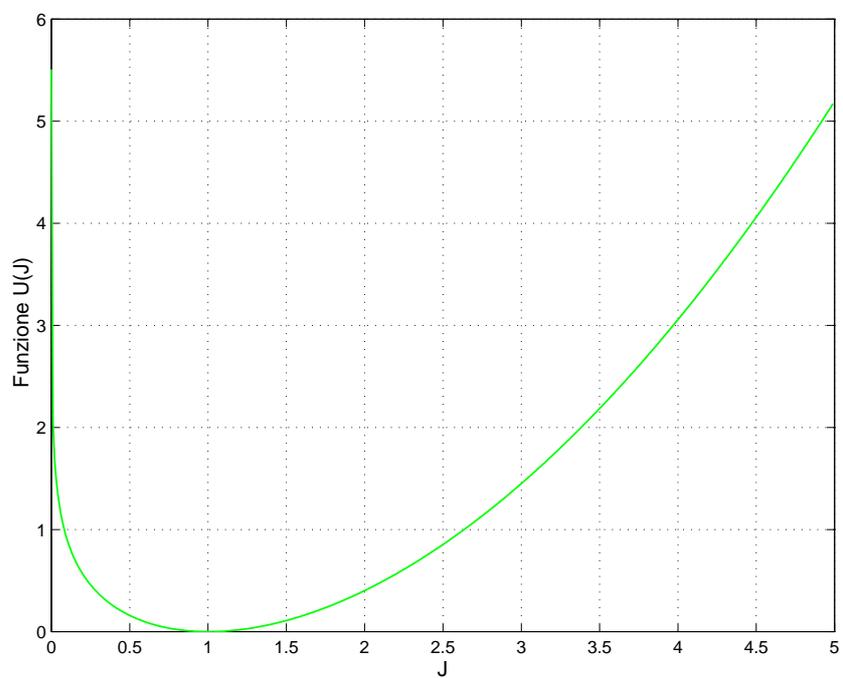


Figura 4.5: Grafico della funzione $U(J)$ per la versione 3

Capitolo 5

Comportamento meccanico di protesi a palloncino

5.1 Introduzione

In questo Capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni numeriche condotte sulla protesi a palloncino sulla base dei legami costitutivi di Neo-Hookean implementati ([3], [27], [33]).

Occorre perciò ricordare che sino ad ora sono stati effettuati pochissimi studi riguardanti la tecnica PTCA, e la chirurgia non invasiva in generale, proprio per difficoltà nella modellazione del problema e per insufficienza di dati sperimentali attendibili a riguardo.

Come per i test uniassiali proposti nel Capitolo precedente, per gestire la notevole mole di calcoli si è utilizzato il codice di calcolo agli elementi finiti FEAP nella versione 7.1 ([28], [25], [26], [27]).

Le analisi riguardano due differenti condizioni di carico:

- a) protesi sottoposta a prova di gonfiaggio
- b) protesi sottoposta a prova combinata di gonfiaggio e flessione

Mentre la prima permette di ricavare la relazione pressione-diametro, con la seconda si simula l'inserzione della protesi all'interno di un tratto di arteria non rettilineo, condizione usuale negli ordinari interventi di angioplastica.

5.2 Il modello geometrico

Si è deciso di studiare il comportamento meccanico di una protesi commerciale le cui caratteristiche geometriche sono state reperite da alcuni cataloghi richiesti direttamente ad alcune ditte produttrici.

Così nella configurazione indeformata si è assegnata alla protesi una lunghezza di 20 mm, un diametro interno ed esterno rispettivamente di 1,03 e 1,13 mm,

per uno spessore perciò di 0,1 mm.

I parametri elastici del materiale con cui la protesi è realizzata sono, invece, stati presi in prestito dalla letteratura ([21]) non avendo avuto a disposizione dati più precisi in merito.

In particolare si è considerato un modulo elastico di 25,8 N/mm² con un modulo di Poisson di 0,3.

Il fatto di utilizzare un modulo elastico così basso permetterà inoltre di testare i legami costitutivi implementati essendo la protesi soggetta a notevoli deformazioni già in condizioni di normale utilizzo.

5.3 Prova di gonfiaggio

Si sottopone la protesi ad un range di pressione interna compreso tra 1 e 20 atmosfere per definire, in modo numerico, la cosiddetta curva di compliance. Tale curva, che caratterizza univocamente ogni protesi commerciale, viene fornita dalle ditte produttrici e si riferisce alla campagna di prove sperimentali effettuate durante la fase di realizzazione della protesi stessa.

La modellazione viene effettuata impiegando elementi finiti solidi a 8 nodi (brick elements) aventi 3 gradi di libertà per nodo, che corrispondono ai 3 spostamenti u_x , u_y , u_z lungo le direzioni cartesiane principali.

Nonostante il problema sia a simmetria polare, non è possibile con il codice di calcolo utilizzato definire gli spostamenti nodali secondo un riferimento dello stesso tipo.

La protesi è schematizzata come un guscio cilindrico di spessore non trascurabile e studiata per 1/4, data l'evidente condizione di assialsimmetria, sia nella geometria, sia nella condizione di carico.

In particolare essendo tale problema, piano nella deformazione, si presta ad essere ulteriormente semplificabile, ad esempio considerando in senso trasversale solo un anello di materiale.

Lungo il settore di circonferenza considerato (90 gradi) sono stati disposti 23 elementi, mentre 3 ed 1 sono stati disposti rispettivamente nella direzione dello spessore e lungo l'asse longitudinale.

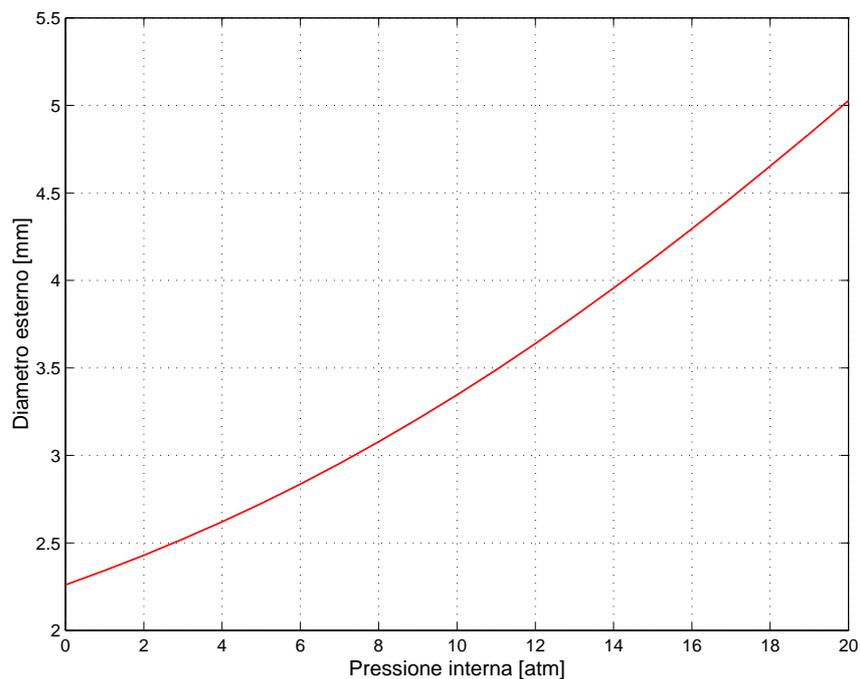


Figura 5.1: costruzione della curva di compliance numerica. Grafico ottenuto impiegando la versione 2 del legame di Neo-Hookean.

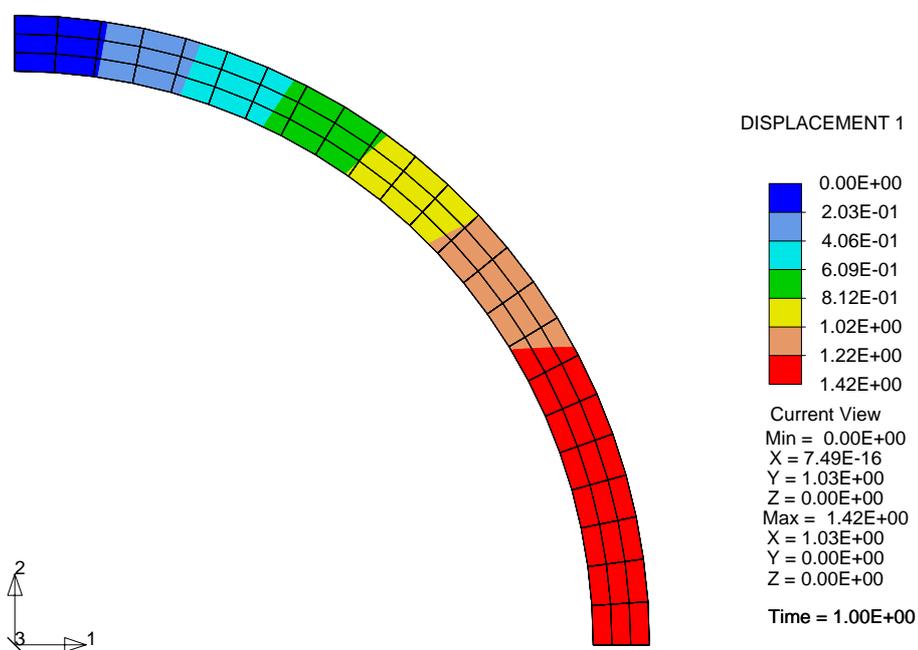


Figura 5.2: campo di spostamenti lungo la direzione 1 per una pressione interna di 20 atm. Valori ottenuti impiegando la versione 2 del legame di Neo-Hookean.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	4	4	4
5	4	4	4
10	4	4	4
25	3	3	3
50	3	3	3

Tabella 5.1: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 1 atm.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	5	5	5
5	4	4	4
10	4	4	4
25	4	4	4
50	4	4	4

Tabella 5.2: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 10 atm.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	6	6	6
5	5	5	5
10	4	4	4
25	4	4	4
50	4	4	4

Tabella 5.3: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 20 atm.

5.4 Prova combinata di gonfiaggio e flessione

La protesi, oltre che alla pressione di gonfiaggio interna, è soggetta ad un campo di spostamenti imposto che ruota le sezioni estremali attorno al loro diametro principale. I momenti che nascono con questa condizione di carico, inflettono la protesi nel piano verticale (Figure 5.9-5.14).

Le simulazioni sono state condotte imponendo angoli di rotazioni delle superfici estreme di 5, 10 e 15 gradi. Per ciascun angolo si è studiato l'andamento delle reazioni assiali (rappresentate per semplicità nella configurazione indeformata e relative, per simmetria, a metà protesi) lungo il contorno esterno delle stesse superfici e di quella di mezzeria per pressioni di gonfiaggio di 1, 10 e 20 atmosfere.

Dal punto di vista della modellazione agli elementi finiti, la prova combinata, rispetto alla precedente, prevede minori semplificazioni.

In senso trasversale si studia un settore circolare di 90 gradi formato sia da una parte di semicirconferenza superiore (45 gradi) sia da una parte di semicirconferenza inferiore (45 gradi).

Anche longitudinalmente è lecito studiare solamente metà protesi: per ripristinare le reali condizioni di spostamento occorre però vincolare i nodi degli elementi della sezione di mezzeria nella stessa direzione dell'asse della protesi stessa.

Sempre rispetto alla prova di gonfiaggio, non ci sono differenze per quel che riguarda il numero di elementi finiti disposti all'interno della sezione trasversale. L'asse, invece, è stato suddiviso in 20 strisce, per un totale quindi di 2760 elementi.

Per poter valutare in modo appropriato la resistenza della protesi alla sollecitazione di flessione, si sono calcolati i momenti flettenti (Tabelle 5.7 e 5.8) che nascono in corrispondenza del campo di spostamenti imposto.

A tal proposito si è aggiunto al programma sorgente di FEAP una nuova subroutine per tale operazione di calcolo le cui principali istruzioni FORTRAN sono proposte nella Tabella 5.9.

Note le coordinate nodali (x_i) e i corrispondenti valori di reazione (r_i) nelle 3 direzioni, i rispettivi momenti sono valutabili con l'espressione

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} M_1 = x_3 r_2 - x_2 r_3 \\ M_2 = x_1 r_3 - x_3 r_1 \\ M_3 = x_1 r_2 - x_2 r_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Nelle pagine seguenti sono riportati i grafici relativi a tale simulazione, ottenuti impiegando la **versione 2** del legame costitutivo di Neo-Hookean.

Oltre alle Tabelle 5.7, 5.8, relative al calcolo dei momenti flettenti, (valutati anch'essi con la versione 2 del legame implementato), sono proposte quelle (Tabelle 5.4-5.6) relative all'analisi della convergenza, per un utile confronto tra le 3 versioni dello stesso modello iperelastico programmato.

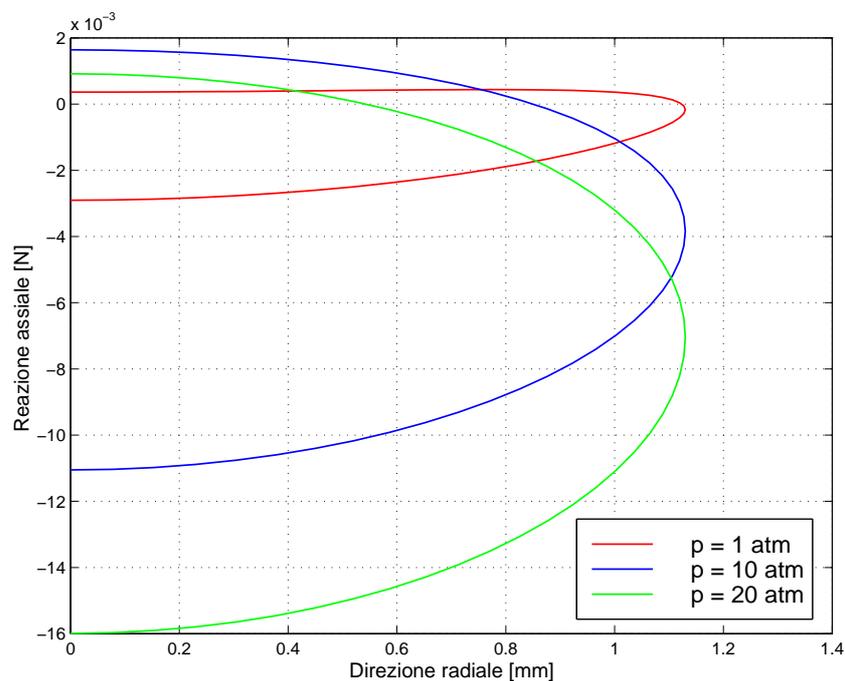


Figura 5.3: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 5$ gradi.

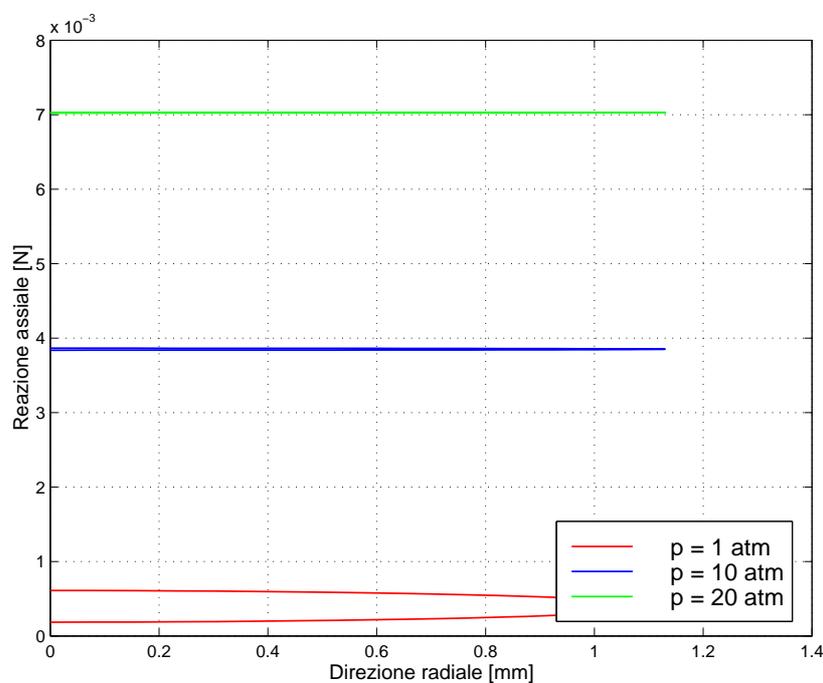


Figura 5.4: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezzera. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 5$ gradi.

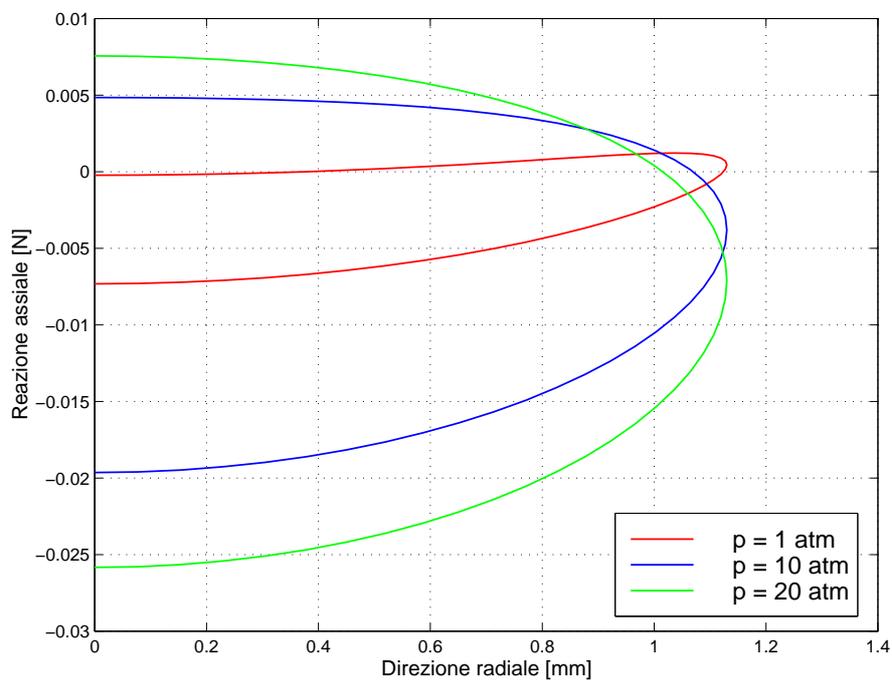


Figura 5.5: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 10$ gradi.

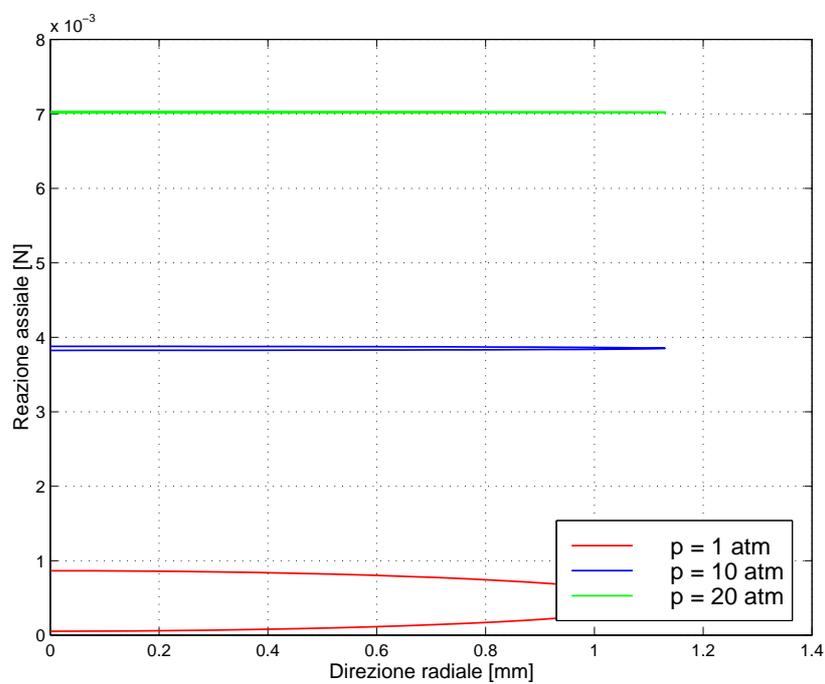


Figura 5.6: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezzeria. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 10$ gradi.

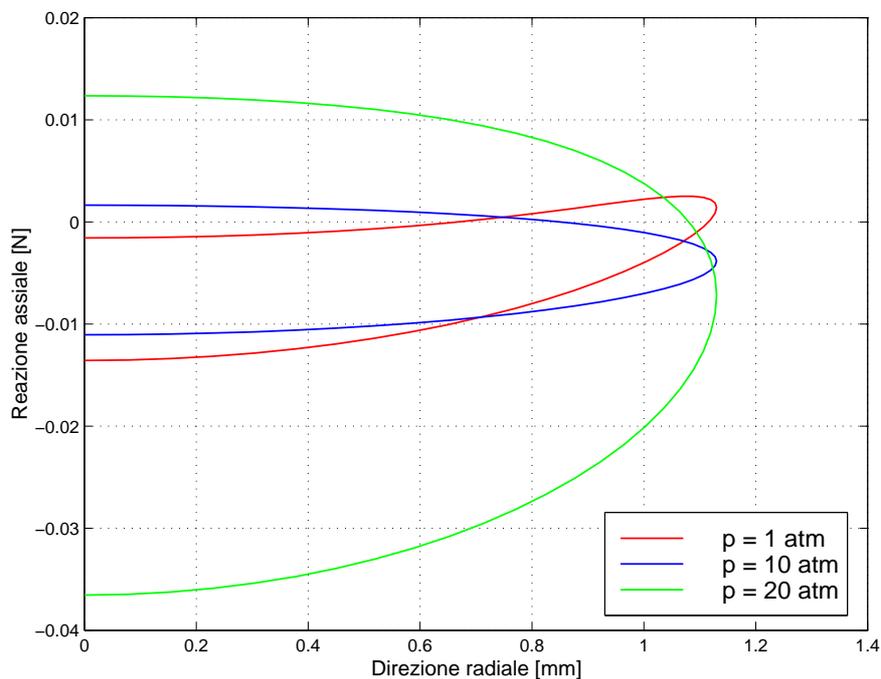


Figura 5.7: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 15$ gradi.

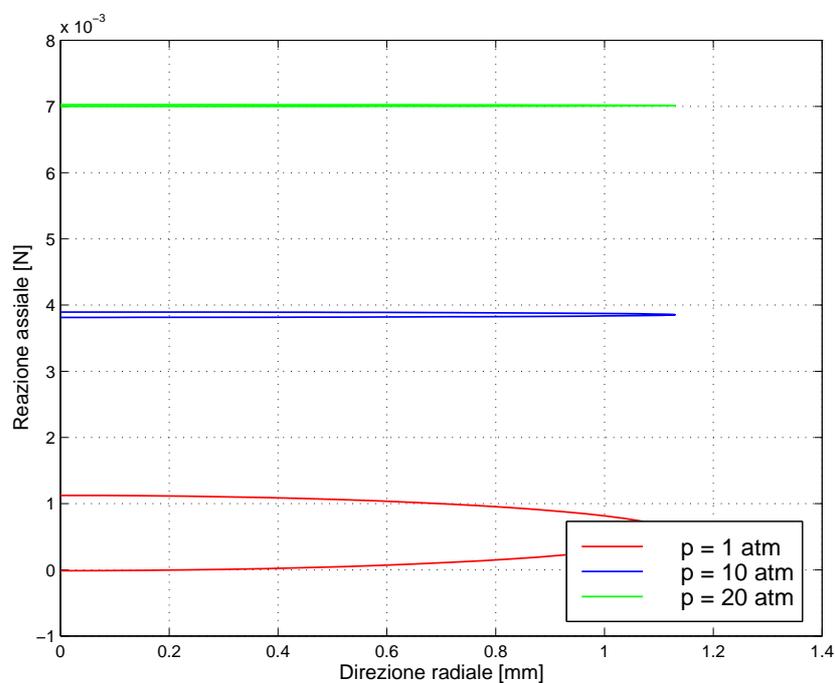


Figura 5.8: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezzeria. Caso con $L = 20$ mm e $\theta = 15$ gradi.

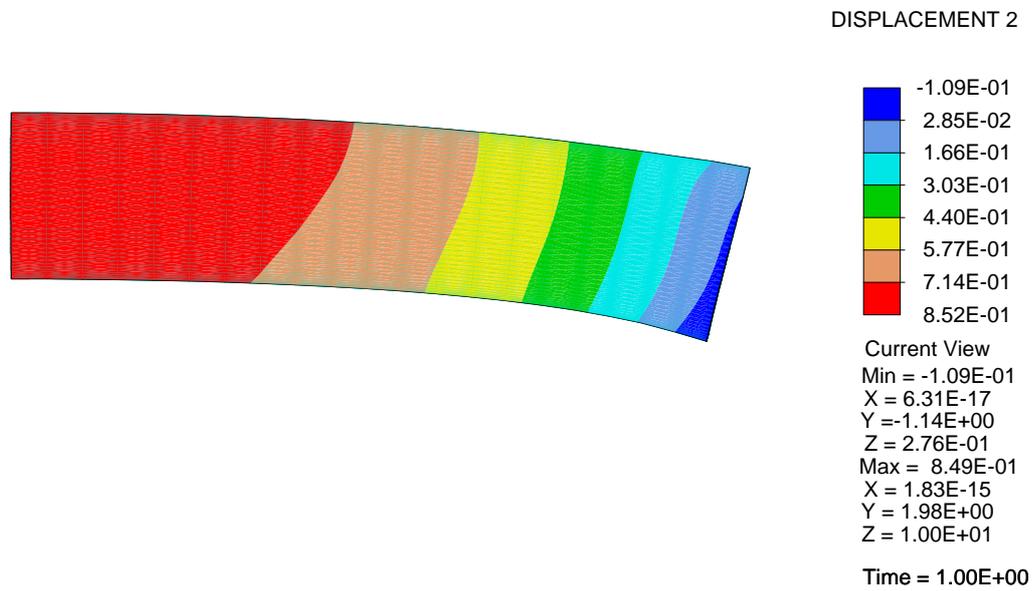


Figura 5.9: andamento degli spostamenti lungo la direzione verticale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 1$ atm.

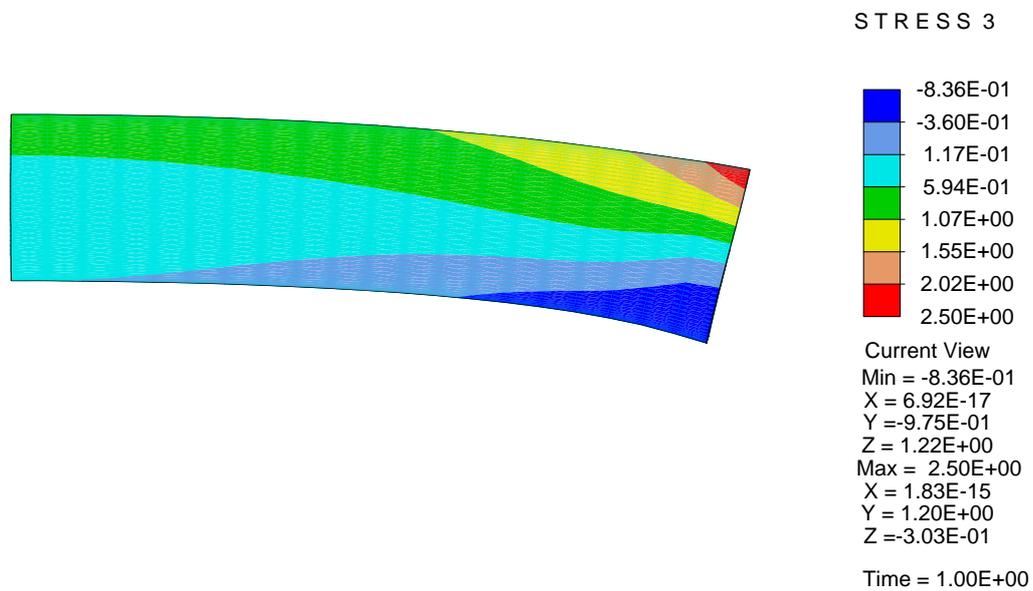


Figura 5.10: andamento dello sforzo assiale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 1$ atm.

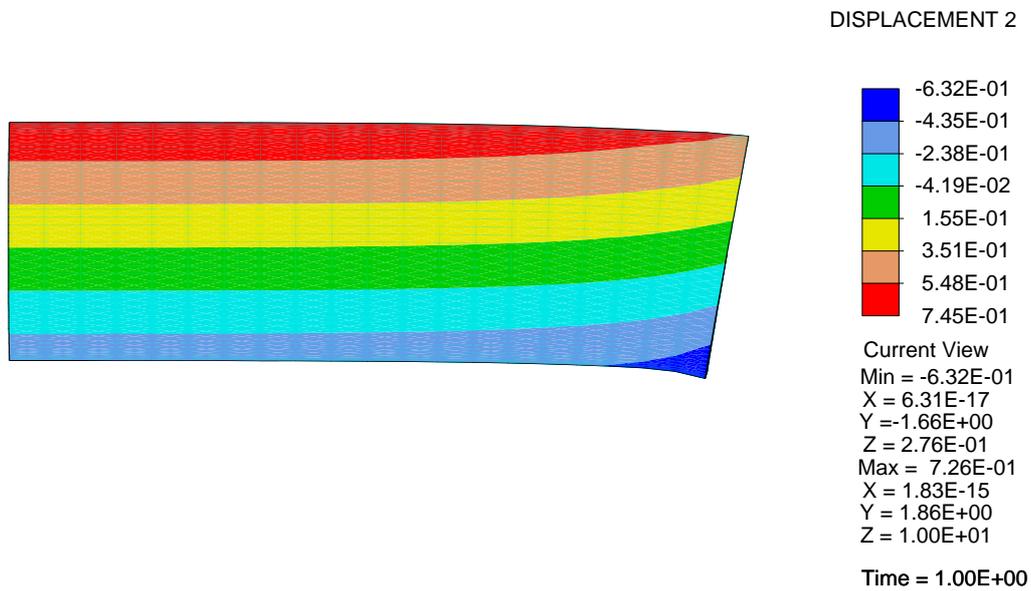


Figura 5.11: andamento degli spostamenti lungo la direzione verticale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 10$ atm.

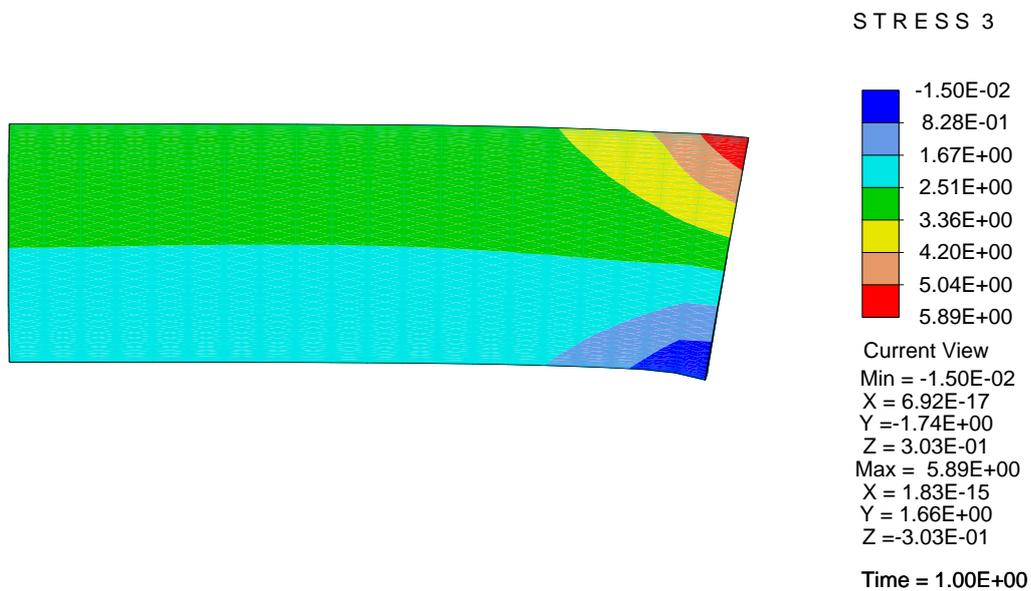


Figura 5.12: andamento dello sforzo assiale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 10$ atm.

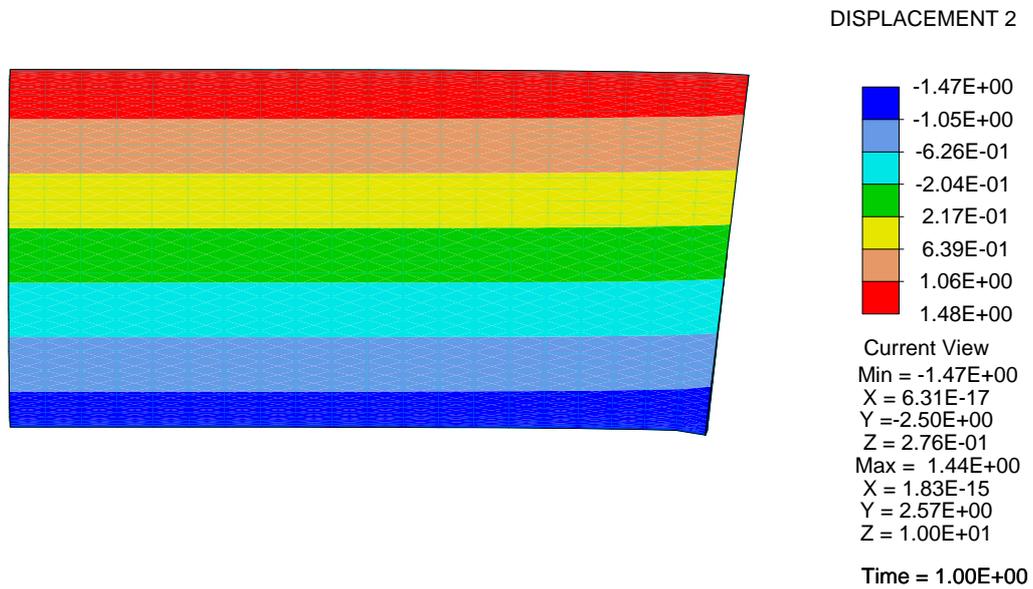


Figura 5.13: andamento degli spostamenti lungo la direzione verticale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 20$ atm.

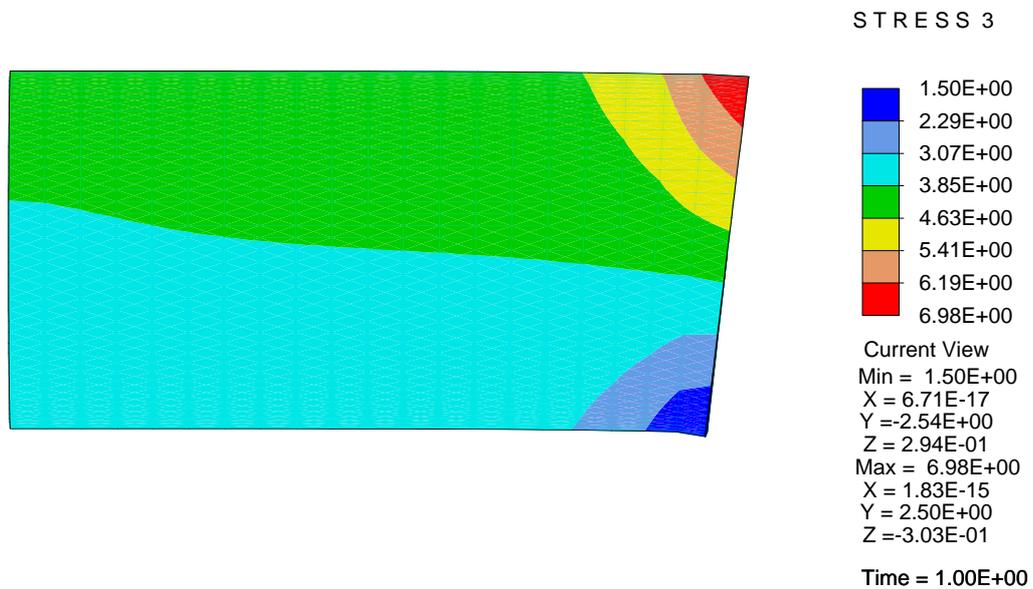


Figura 5.14: andamento dello sforzo assiale. Caso con $L = 20$ mm, $\theta = 15$ gradi, $p = 20$ atm.

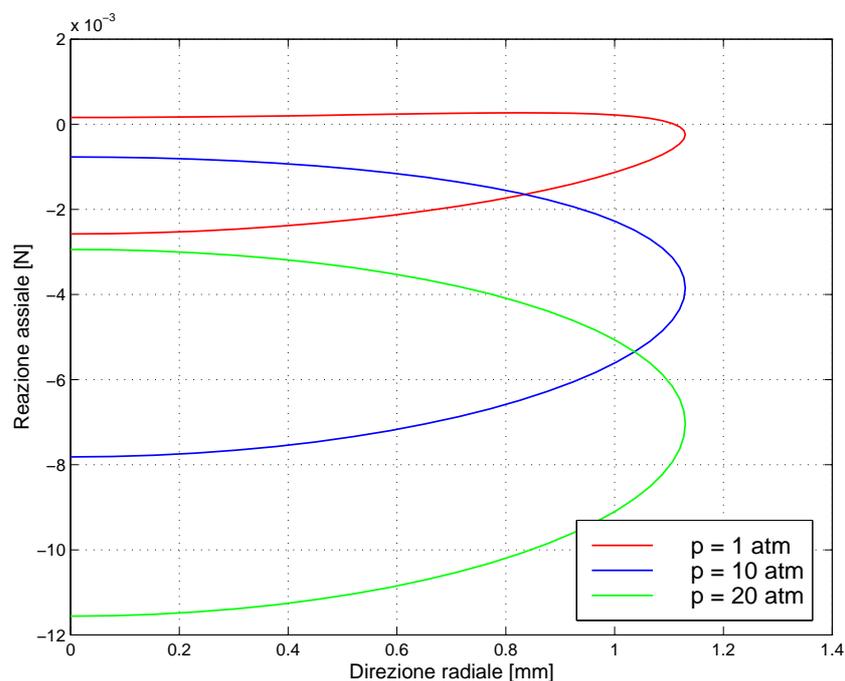


Figura 5.15: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 5$ gradi.

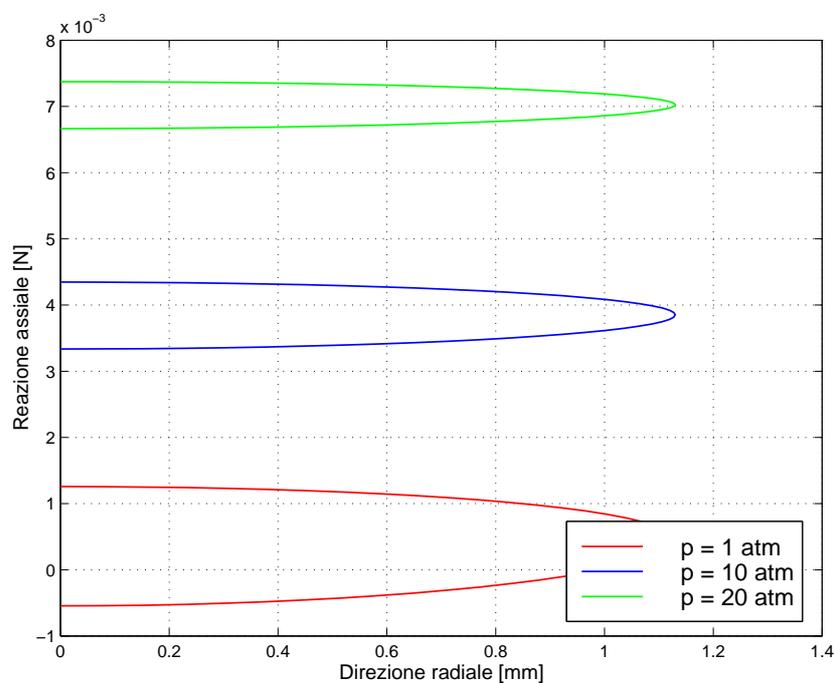


Figura 5.16: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezziera. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 5$ gradi.

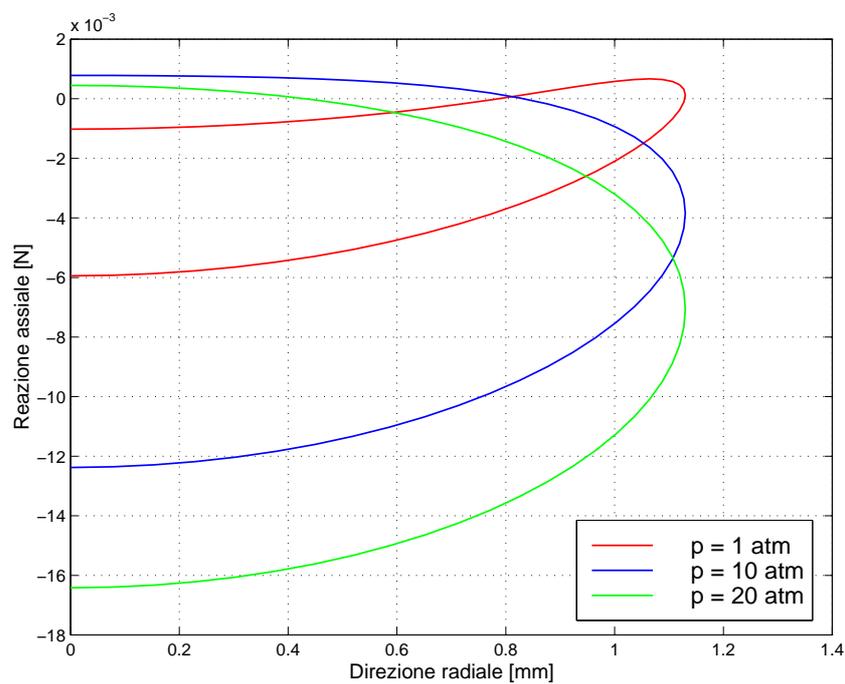


Figura 5.17: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 10$ gradi.

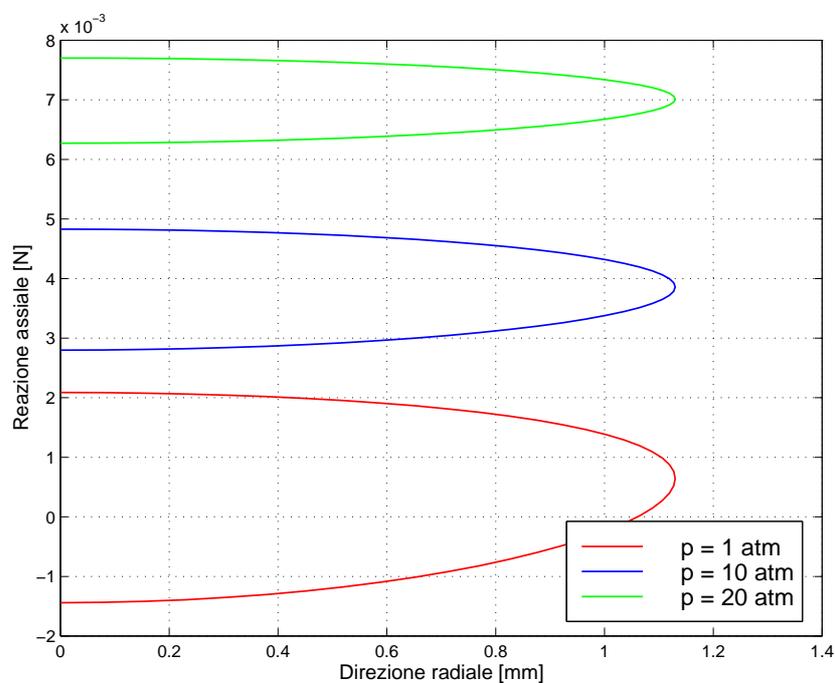


Figura 5.18: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezzeria. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 10$ gradi.

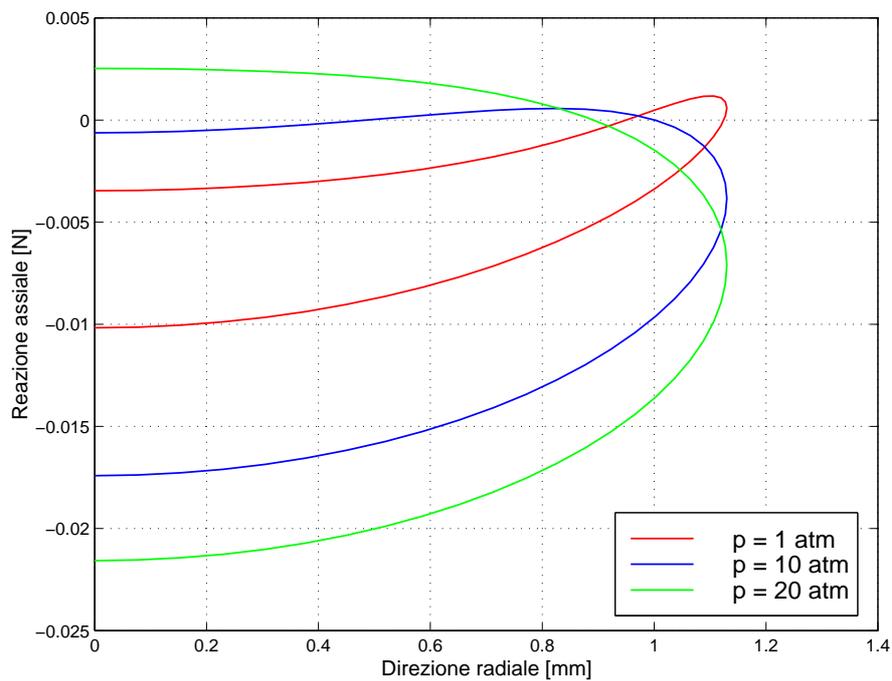


Figura 5.19: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione iniziale. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 15$ gradi.

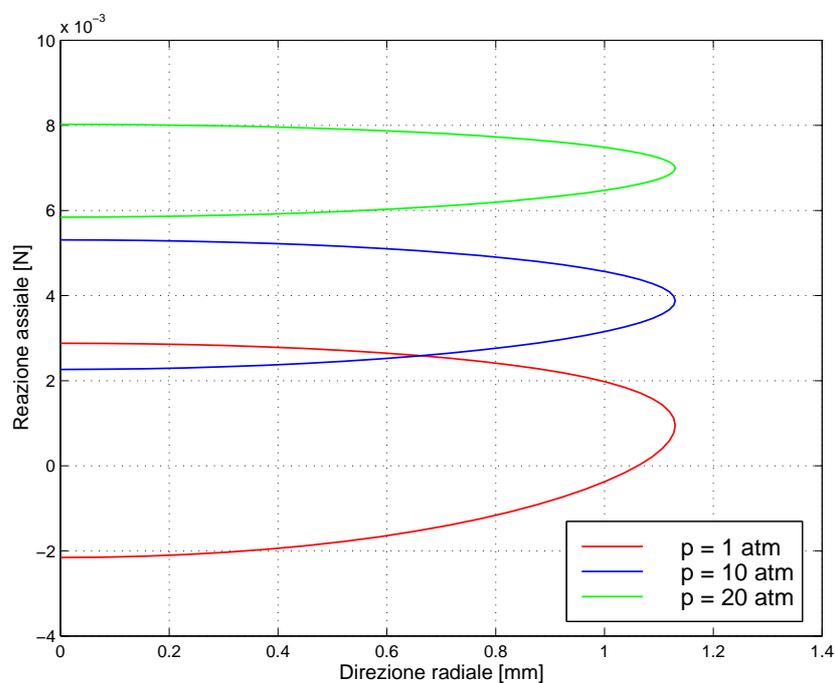


Figura 5.20: evoluzione della reazione assiale lungo il contorno esterno della sezione di mezzeria. Caso con $L = (20/3)$ mm e $\theta = 15$ gradi.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	7	6	7
5	5	5	5
10	5	5	5
25	4	4	4
50	4	4	4

Tabella 5.4: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 1 atm e angolo θ pari a 15 gradi.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	6	6	6
5	5	5	5
10	5	5	5
25	4	4	4
50	4	4	4

Tabella 5.5: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 10 atm e angolo θ pari a 15 gradi.

N.ro passi	Versione 1	Versione 2	Versione 3
1	8	10	8
5	5	5	5
10	5	5	5
25	4	5	5
50	4	4	4

Tabella 5.6: analisi della convergenza. Numero massimo di iterazioni per passi di carico. Pressione interna di 20 atm e angolo θ pari a 15 gradi.

Pressione [atm]	Rotazione	Sez. iniziale	Sez. mezzeria
1	5	$-2,0464 \cdot 10^{-1}$	$4,2796 \cdot 10^{-2}$
	10	$-4,1290 \cdot 10^{-1}$	$8,1892 \cdot 10^{-2}$
	15	$-6,3040 \cdot 10^{-1}$	$1,1501 \cdot 10^{-1}$
10	5	$-4,6078 \cdot 10^{-1}$	$3,2144 \cdot 10^{-3}$
	10	$-9,2180 \cdot 10^{-1}$	$6,4502 \cdot 10^{-3}$
	15	$-13,804 \cdot 10^{-1}$	$9,6504 \cdot 10^{-3}$
20	5	$-4,7246 \cdot 10^{-1}$	$1,2224 \cdot 10^{-3}$
	10	$-9,4936 \cdot 10^{-1}$	$2,4628 \cdot 10^{-3}$
	15	$-14,344 \cdot 10^{-1}$	$3,7378 \cdot 10^{-3}$

Tabella 5.7: Valutazione dei momenti flettenti [N·mm] nelle sezioni studiate. La lunghezza della protesi è di 20 mm.

Pressione [atm]	Rotazione	Sez. iniziale	Sez. mezzeria
1	5	$-3,0884 \cdot 10^{-1}$	$2,4060 \cdot 10^{-1}$
	10	$-5,9812 \cdot 10^{-1}$	$4,6996 \cdot 10^{-1}$
	15	$-8,6440 \cdot 10^{-1}$	$6,7590 \cdot 10^{-1}$
10	5	$-4,7040 \cdot 10^{-1}$	$1,4080 \cdot 10^{-1}$
	10	$-9,4034 \cdot 10^{-1}$	$2,8284 \cdot 10^{-1}$
	15	$-13,977 \cdot 10^{-1}$	$4,2374 \cdot 10^{-1}$
20	5	$-4,6468 \cdot 10^{-1}$	$1,0115 \cdot 10^{-1}$
	10	$-9,3500 \cdot 10^{-1}$	$2,0416 \cdot 10^{-1}$
	15	$-14,151 \cdot 10^{-1}$	$3,1068 \cdot 10^{-1}$

Tabella 5.8: valutazione dei momenti flettenti [N·mm] nelle sezioni studiate. La lunghezza della protesi è di (20/3) mm.

```

do n = n1, n2, n3

    mom(1) = mom(1) + r(2,n)*x(3,n) - r(3,n)*x(2,n)
    mom(2) = mom(2) + r(3,n)*x(1,n) - r(1,n)*x(3,n)
    mom(3) = mom(3) + r(1,n)*x(2,n) - r(2,n)*x(1,n)

end do
    
```

Tabella 5.9: istruzioni FORTRAN per la valutazione dei momenti flettenti nella protesi. Con n1, n2, n3 si denota il numero di elementi finiti rispettivamente nelle 3 direzioni cartesiane.

Capitolo 6

Legami costitutivi esistenti per tessuti aortici

6.1 Classificazione dei legami costitutivi

In questo Capitolo viene fatto un resoconto sull'effettivo stato dell'arte della biomeccanica delle arterie.

In particolare si analizzano dettagliatamente le varie tipologie di legami costitutivi esistenti per lo studio del tessuto biologico.

Si distinguono 3 tipologie di modelli di calcolo:

- modelli monoassiali
- modelli multiassiali
- modelli pressione-diametro

I *modelli monoassiali* si basano sulla definizione di una espressione analitica, che correli nel modo più semplice possibile lo stato di sforzo unidirezionale interno al tessuto, ad una opportuna misura di deformazione: ad esempio l'allungamento (o stretch) a cui le fibre sono sottoposte, in seguito all'applicazione del carico esterno.

I *modelli multiassiali* si basano invece sulla definizione di un potenziale elastico (strain energy function), funzione delle componenti di deformazione del tensore di Green-Lagrange, che identifica il contenuto di energia elastica immagazzinata dal tessuto durante la storia deformativa.

Differenziando tali funzioni rispetto a queste variabili, si ricavano le corrispondenti componenti di tensione nelle varie direzioni.

Per descrivere il comportamento meccanico dei tessuti arteriosi, sono state fatte dai ricercatori biomeccanici diverse considerazioni preliminari (sulla base delle numerose esperienze sperimentali effettuate sui tessuti biologici), allo scopo di semplificare il più possibile le relative formulazioni analitiche. Alcune

di queste sono comuni ai vari modelli e sono l'omogeneità del materiale e l'incompressibilità, altre variano tra i diversi modelli e sono ad esempio l'ipotesi di ortotropia cilindrica e l'indipendenza del materiale dalla tensione radiale, vincolando così lo studio alla classica teoria membranale.

Oltre all'utilizzo di modelli iperelastici, caratteristica comune della maggior parte dei modelli multiassiali è l'indipendenza del potenziale dalla deformazione tagliante, data l'evidente condizione di assialsimmetria sia nella geometria sia nella condizione di carico.

I *modelli pressione-diametro*, come quelli monoassiali, sono modelli semplificati perchè permettono di studiare la meccanica del tessuto arterioso sulla base di un numero esiguo di parametri in gioco. Per questi, infatti, viene fornita una semplice relazione che correla il diametro del vaso alla relativa pressione sanguigna. In particolare si darà conto della formula di Hayashi, che è peraltro l'unica reperita nella letteratura recente. Essa, nonostante abbia, come si vedrà, un campo di applicazione limitato, conduce tuttavia, a risultati sufficientemente precisi, tali da poter essere utilizzati come dati di input per studi più raffinati.

6.2 Modelli monoassiali

I test monoassiali ([9]), usualmente condotti su strisce di tessuto, anche se di base, forniscono utili informazioni sulle proprietà del materiale.

Le curve tensione/allungamento (Figura 6.1-a) hanno un comportamento non lineare, presentando infatti una elevata distensibilità per bassi valori di sforzo (50-100 KPa) e perdendola man mano che ci si sposta nel dominio delle deformazioni finite (per corrispondenti valori di sforzo anche ≥ 2000 KPa). Le curve ottenute derivando le precedenti espressioni rispetto all'allungamento, (Figura 6.1-b), mostrano invece, un chiaro andamento lineare a tratti. Ciascuna curva è descritta matematicamente dall'espressione:

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = B\sigma + C \quad (6.1)$$

da cui si deduce, per integrazione, la formula

$$\sigma = \frac{C}{B} \exp[B(\lambda - 1)] \quad (6.2)$$

essendo

- A, B le costanti del materiale
- σ lo stato di sforzo del provino
- λ l'allungamento del provino

Una successiva taratura dei parametri A e B permetterà di trovare il best fitting tra valori analitici e dati sperimentali.

Questo tipo di formulazione esponenziale è stato largamente utilizzato per descrivere il comportamento elastico di una vasta gamma di tessuti biologici.

6.3 Modelli multiassiali

I numerosi modelli multiassiali disponibili in letteratura possono essere distinti in 4 differenti categorie:

1. modelli polinomiali
2. modelli esponenziali
3. modelli logaritmici
4. modelli misti

Come già rimarcato in precedenza, sono tutti definiti da un potenziale elastico la cui espressione è fortemente variabile da autore ad autore.

Poichè la casistica è enorme, vengono riportati i contributi più originali e significativi, evidenziandone per ognuno le ipotesi di base e il relativo campo di applicazione.

Modelli polinomiali

Klosmer e Segal ([10]) introdussero, per solidi isotropi e incompressibili la seguente espressione cubica:

$$\psi = b_1(I_1 - 3) + b_2(I_2 - 3)^2 + b_3(I_2 - 3)^2 + b_4(I_2 - 3)^3 \quad (6.3)$$

Questo tipo di formulazione, recentemente ripresa da Hyashi e Imai (1997), si è dimostrata particolarmente efficace sia per lo studio della parete della tunica media aortica, sia per la modellazione biomeccanica della placca aterosclerotica.

Sotto le stesse ipotesi Vito e Hickey ([10]) proposero invece un potenziale polinomiale differente da quello di Klosmer e Segal, ottenuto espandendo in serie di Taylor una funzione dipendente solo dall'invariante I_1 . Tale espressione assumeva la forma:

$$\psi = b_1(I_1 - 3) + b_2(I_1 - 3)^2 + \dots + b_n(I_1 - 3)^n \quad (6.4)$$

Per entrambi i potenziali (6.3) e (6.4) si indicano con b_1, \dots, b_n le costanti del materiale da definire con un procedimento di identificazione parametrica sulla base dei dati sperimentali a disposizione. Questo ultimo tipo di formulazione, introdotta per cercare di interpolare i risultati derivanti da prove di gonfiaggio

condotte su segmenti di aorte di cane, si rilevò particolarmente efficace per $n \leq 4$.

Sempre in condizioni di isotropia e incompressibilità, una formulazione alternativa del potenziale elastico espresso in forma polinomiale può essere la seguente

$$\psi = \sum_{i+j=1}^n b_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (6.5)$$

con b_{ij} le costanti del materiale.

Si osservi come, ponendo $n=1$, si ottenga il modello di Mooney-Rivlin ([11], [3]):

$$\psi = b_{01}(I_1 - 3) + b_{10}(I_2 - 3) \quad (6.6)$$

frequentemente utilizzata per lo studio del comportamento meccanico di materiali elastomerici (*rubber-like materials*) in regime di grandi deformazioni.

Con la condizione aggiuntiva $b_{10}=0$ è possibile inoltre ricavare l'espressione del potenziale di Neo-Hookean:

$$\psi = b_{01}(I_1 - 3) \quad (6.7)$$

nella sua formulazione adattata per materiali incompressibili. Numerosi codici di calcolo commerciali ad elementi finiti (ABAQUS, FEAP, LS-DYNA, etc.) consentono di utilizzare, per le analisi, questi ultimi tipi di espressioni polinomiali.

Modelli esponenziali

Il modello di potenziale esponenziale è quello che ha trovato il maggior sviluppo nel campo della biomeccanica delle arterie.

Proposto per la prima volta da Fung ([4]) con 2 diverse formulazioni, è stato studiato dall'autore sotto le ipotesi di materiale omogeneo, incompressibile, iperelastico e ad ortotropia cilindrica.

Nella più recente (1986), il segmento di arteria studiato, è modellato come un cilindro cavo di spessore non trascurabile.

La sua espressione analitica contiene al suo interno una funzione quadratica delle componenti principali di deformazione del tensore di Green-Lagrange

$$\psi = c (\exp Q - 1) \quad (6.8)$$

avendo Q la forma seguente

$$Q = a_1 E_r^2 + a_2 E_\theta^2 + a_3 E_z^2 + a_4 E_r E_\theta + a_5 E_\theta E_z + a_6 E_r E_z \quad (6.9)$$

Tuttavia, inizialmente, il modello analitico era semplificato poichè la parete arteriosa era assimilata ad una membrana. Con tale ipotesi perciò si consideravano solo le deformazioni contenute nel piano della membrana stessa. Pur rimanendo identica l'equazione (6.8), la nuova formula di Q si scriveva come:

$$Q = a_2 E_\theta^2 + a_3 E_z^2 + a_5 E_\theta E_z \quad (6.10)$$

ottenuta, evidentemente, imponendo nulli i coefficienti di a_1 , a_2 e a_6 .

Modelli logaritmici

Il modello proposto da Takamizava e Hayashi ([24]) è di tipo logaritmico ed in analogia con il modello di Fung contiene solamente 4 costanti del materiale. Anche le ipotesi di base sono identiche a quelle relative al caso precedentemente trattato.

La funzione densità di energia di deformazione è del tipo

$$\psi = -c \ln(1 - Q) \quad (6.11)$$

avendo Q la stessa espressione della (6.10).

Non si sono trovate in letteratura varianti a questo particolare tipo di formulazione.

Modelli misti

Holzapfel et al. ([13], [14], [12]) propongono una equazione mista, costituita da una parte polinomiale e da una parte esponenziale, con l'intento di descrivere accuratamente sia il comportamento meccanico delle arterie muscolari, sia quello delle arterie elastiche.

Il potenziale in questione assume una espressione del tipo

$$\psi = c_1(I_1 - 3) + c_2(\exp Q - 1) \quad (6.12)$$

essendo Q la stessa funzione utilizzata nel modello logaritmico. Anche in questo caso perciò, lo studio condotto è essenzialmente di tipo membranale. Si noti inoltre come il modello sia caratterizzato da 5 costanti di cui 3 adimensionali (contenute nell'espressione di Q) e 2 con le unità di misura di uno sforzo (c_1 e c_2).

Il primo termine rappresenta il contributo isotropo (secondo le caratteristiche meccaniche delle componenti della parete il primo termine potrebbe descrivere il comportamento dell'elastina, mentre il secondo del collagene) ed è specificato dalla formula di Neo-Hookean, già discussa nel paragrafo relativo ai modelli polinomiali.

Il secondo termine, invece, rappresenta il contributo anisotropo ed è descritto dalla più concisa forma di potenziale utilizzata in letteratura (originariamente proposta da Fung) per i biotessuti.

L'idea di combinare due forme differenti di potenziale che lavorano in parallelo (Figura 6.2) si dimostra particolarmente interessante in quanto riesce a descrivere il comportamento elastico delle arterie in un largo range di deformazioni. Mentre il termine isotropo legato alla formula di Neo-Hookean, risulta predominante nel dominio delle piccole deformazioni, la parte esponenziale governa il regime delle deformazioni finite. La combinazione di questi due contributi, garantisce inoltre, in un grafico sforzo circonferenziale-deformazione circonferenziale, (Figure 6.3 e 6.4) quella forma bifasica (*sigma shaped*) che caratterizza le sole arterie elastiche e che è impossibile da definire con il solo contributo esponenziale (che descriverebbe invece, il solo comportamento delle arterie muscolari).

Un ulteriore interessante esempio di modello misto può essere senz'altro quello studiato da Demiray et al. ([5]) sulla base di dati sperimentali ottenuti conducendo tests su aorte addominali di ratto. A differenza di quello precedente di Holzapfel è isotropo e contiene sia nella parte polinomiale che in quella esponenziale la formula di Neo-Hookean elevata al quadrato. Chiamando con a, b e c le uniche costanti sperimentali che compaiono, il potenziale presenta la seguente espressione

$$\psi = \frac{a}{4} (I_1 - 3)^2 + \frac{b}{4c} \{ \exp [c (I_1 - 3)^2] - 1 \} \quad (6.13)$$

Infine, una opportuna taratura delle costanti del materiale, permetterà di trovare la miglior curva interpolante.

6.4 Modelli pressione-diametro

A volte, per ragioni di utilità pratica e di misura, è conveniente caratterizzare l'elasticità delle arterie con un solo parametro, evitando così di dover necessariamente utilizzare i ben più complessi legami costitutivi discussi in precedenza. In particolare, per le diagnosi non invasive, la caratterizzazione di materiali, oltre che semplice dovrebbe essere anche quantitativa. A tale scopo, sono stati proposti e frequentemente utilizzati diversi parametri, tra i quali si ricordano sia il “*modulo elastico pressione-deformazione* E_p , (Peterson et al., 1960), sia la “*deformabilità vascolare* C_v , (Gow and Taylor, 1968), nota in letteratura con il termine di *vascular compliance*. Talvolta è stata utilizzata anche la “*velocità dell'onda pulsante* c , essendo fortemente dipendente dal modulo elastico della parete stessa.

Questi parametri sono rispettivamente descritti dalle seguenti formule

$$E_p = D \left(\frac{\Delta P}{\Delta D} \right) \quad (6.14)$$

$$C_v = \frac{\Delta V}{V \Delta P} \quad (6.15)$$

$$c^2 = \left(\frac{S}{\rho}\right) \left(\frac{\Delta P}{\Delta S}\right) \quad (6.16)$$

essendo

- D il diametro esterno del vaso sanguigno
- V il volume del vaso sanguigno
- S la superficie iniziale del vaso sanguigno
- p la pressione sanguigna
- ρ la densità
- $\Delta(*)$ la variazione relativa alla quantità (*)

Si noti come per definire queste grandezze occorra solo conoscere il diametro del vaso corrispondente ad un determinato valore di pressione.

Comunque, occorre altresì ricordare, che questi parametri, anche se definiscono in modo univoco la rigidità e la flessibilità dell'arteria, non ne definiscono però rigorosamente le effettive proprietà meccaniche.

Così sono state proposte alcune relazioni pressione-diametro dipendenti da un numero limitato di fattori. Tra queste si ricorda sicuramente quella di Hayashi ([9] che, però, ha validità solo nel range delle pressioni fisiologiche

$$\ln\left(\frac{P}{P_s}\right) = \beta\left(\frac{D}{D_s} - 1\right) \quad (6.17)$$

dove

- P_s è la pressione standard (corrispondente a 100 mmHg)
- D_s è il diametro alla pressione P_s
- β è il parametro di rigidità

Il coefficiente β , che è l'unica grandezza non misurata, rappresenta la rigidità della parete ed è quindi un parametro che, in qualche modo, dà conto delle proprietà elastiche del materiale.

Alla pressione standard P_s , inoltre, è possibile esprimere B in funzione delle grandezze introdotte dalle formule (6.14), (6.15), (6.16) come segue

$$\beta = \frac{E_p}{P_s} = \frac{2}{C_v P_s} = \frac{2 \rho c^2}{P_s} \quad (6.18)$$

Alcuni ricercatori, sulla base di precedenti esperienze, pensarono di esprimere le proprietà elastiche della parete del vaso sanguigno in funzione di un modulo elastico incrementale, per tenere conto quindi, dell'alta non linearità della

relazione sforzi-deformazioni. Hudetz (1979), propose una formula che poteva essere applicata ad un vaso sanguigno cilindrico e con caratteristiche ortotrope. Con le stesse notazioni della (6.17) la nuova equazione assumeva la forma

$$H_{\theta} = 2 D \left(\frac{\Delta P D_i^2}{\Delta D + P \Delta D} \right) \frac{1}{(D^2 - D_i^2)} \quad (6.19)$$

essendo D il diametro esterno del vaso stesso e D_i il diametro interno.

Occorre ricordare che la misura dello spessore della parete o la valutazione del diametro interno presenta più difficoltà se comparata con la misura del diametro esterno.

Anche Demiray (1983) e Demiray et al. (1988) si occuparono dello studio del modulo elastico incrementale.

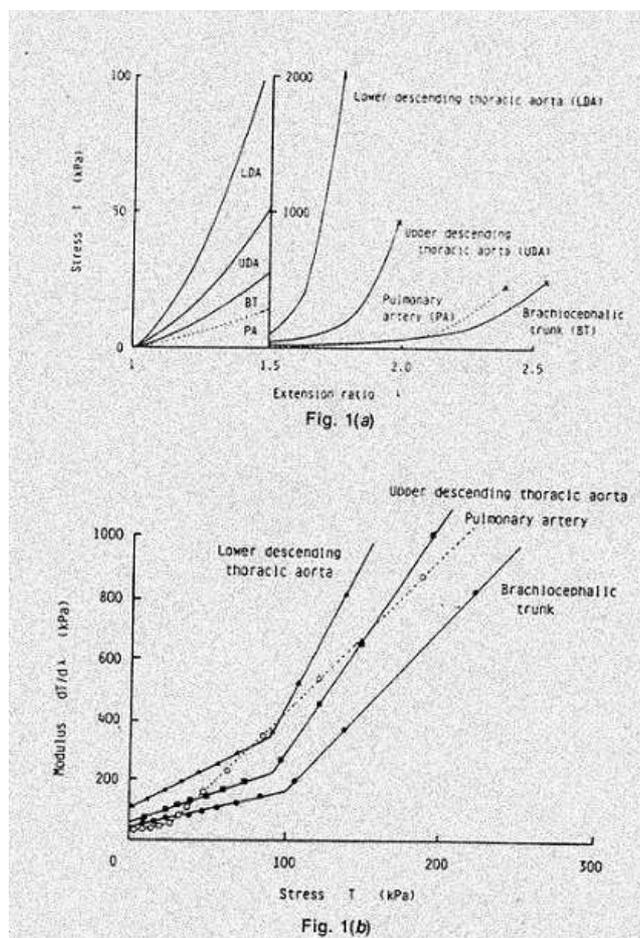


Figura 6.1: modelli monoassiali: curve allungamento-sforzo (Fig. 1-a) e curve derivate (Fig. 1-b).

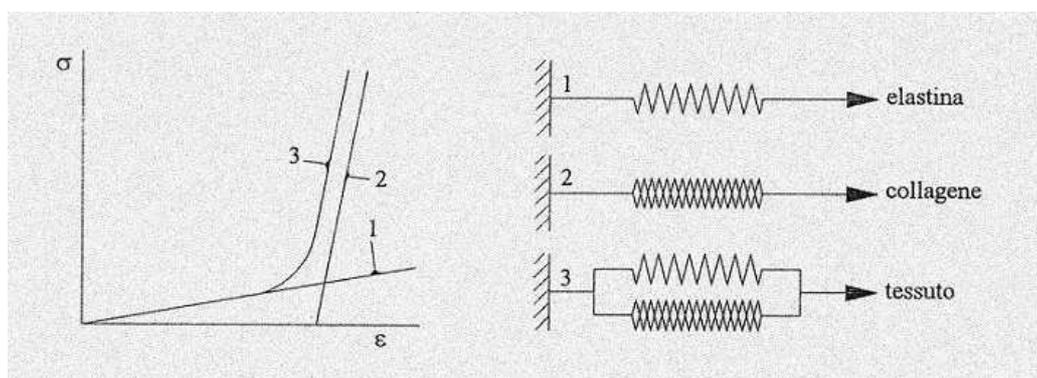


Figura 6.2: il modello reologico del potenziale misto di Holzapfel.

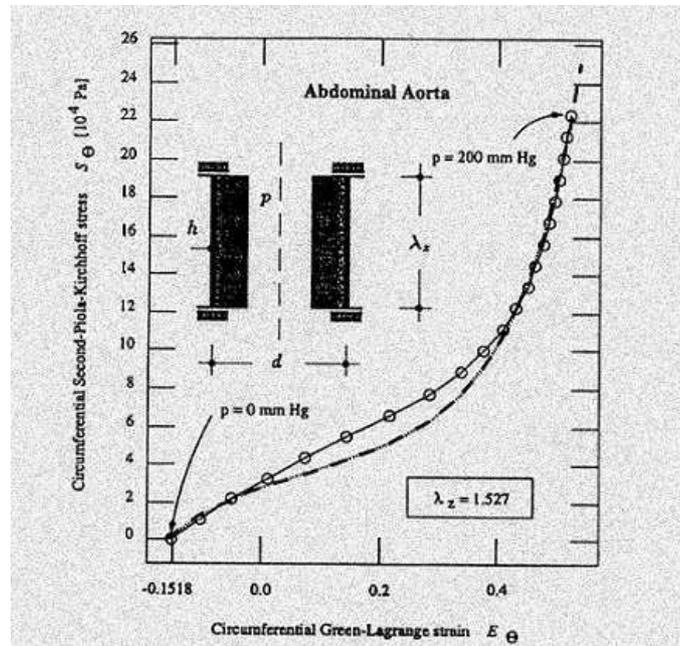


Figura 6.3: grafico deformazione circonferenziale-sforzo circonferenziale. Confronto tra valori sperimentali, soluzioni teoriche e soluzione agli elementi finiti.

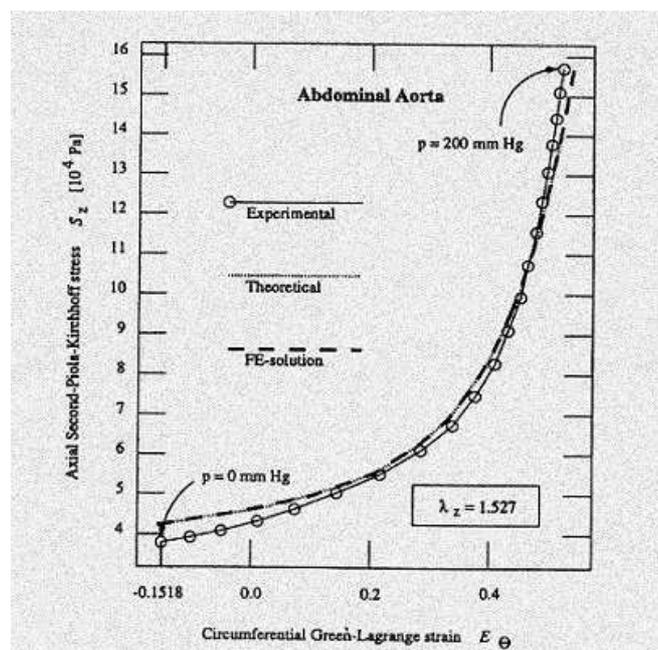


Figura 6.4: grafico deformazione circonferenziale-sforzo assiale. Confronto tra valori sperimentali, soluzioni teoriche e soluzione agli elementi finiti.

Capitolo 7

Modellazione del sistema arteria-placca aterosclerotica

7.1 Introduzione

In questo capitolo si studia il comportamento meccanico di un'arteria stenotica.

Oltre alla caratterizzazione del tessuto aortico, di cui si sviluppa un nuovo funzionale, ampio spazio è dato alla modellazione della placca aterosclerotica, analizzata con un legame costitutivo elasto-plastico.

Occorre ricordare che non si sono reperite in letteratura informazioni riguardanti simulazioni numeriche condotte sul sistema arteria-placca.

7.2 Un modello iperelastico per il tessuto aortico

Prima di trattare la formulazione adottata, occorre puntualizzare le ipotesi sul comportamento meccanico del tessuto arterioso.

Sulla base delle indicazioni fornite in letteratura, in particolare Fung e Hayashi ([4], [9], [10], [24]), la parete dell'arteria viene considerata isotropa e comprimibile, come dimostrato dalle numerose esperienze sperimentali.

Non si terrà conto della disomogeneità macroscopica della parete (la stratificazione della tunica intima, media e avventizia), molto difficile da modellizzare, viste le scarse informazioni a riguardo.

Si decide di implementare il legame costitutivo di Mooney-Rivlin ([11], [3]) adattato però a materiali comprimibili, utilizzato anche dalla maggior parte dei ricercatori del settore.

Si studia un'espressione del tipo

$$\psi(I_1, I_2, J) = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3) + \gamma(J - 1)^2 \quad (7.1)$$

con le costanti α , β , γ scelte in modo tale da ottenere, in piccole deformazioni, la stessa risposta del classico legame costitutivo elastico lineare.

È possibile notare come tale espressione contenga tutti e 3 gli invarianti che caratterizzano univocamente un potenziale iperelastico isotropo ([3]).

Seguendo le indicazioni di Ogden ([18]) e ricordando le formule (4.29), (4.30), (4.31), che esprimevano gli invarianti del tensore \mathbf{C} in funzione degli allungamenti principali, le costanti del materiale si determinano risolvendo le seguenti equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \lambda + 2\mu \delta_{ij} \quad (7.2)$$

essendo λ e μ le note costanti elastiche di Lamè.

Dalle (7.2) è possibile ricavare quindi il seguente sistema algebrico lineare

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 2\gamma = \lambda + 2\mu \\ 4\beta + 2\gamma = \lambda \end{cases} \quad (7.3)$$

le cui soluzioni sono

$$\boxed{\alpha = \mu \quad \beta = -\mu/2 \quad \gamma = -\lambda/2 + \mu}$$

Ne consegue che la formula sviluppata ha come espressione definitiva

$$\psi(I_1, I_2, J) = \mu (I_1 - 3) - \frac{\mu}{2} (I_2 - 3) + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (J - 1)^2 \quad (7.4)$$

L'implementazione in FEAP di questo legame costitutivo, verrà effettuata con il metodo dell' "Update Lagrangian Formulation" (Appendice D), di cui si dispone già dell' algoritmo sviluppato per altre formulazioni (tra cui quella relativa alla stenosi).

Per ampliarlo è necessario definire solamente gli sforzi di Kirchhoff ($\boldsymbol{\tau}$), valutati nelle direzioni principali, e la matrice tangente (\mathbf{dtde}) del modello studiato (con gli indici i e j variabili da 1 a 3)

$$\tau_i = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} \lambda_i; \quad dtde(i, j) = \frac{\partial \tau_i}{\partial \lambda_j^2} \lambda_j^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_i}{\partial \lambda_j} \lambda_j \quad (7.5)$$

Sviluppando le precedenti formule è possibile scrivere

$$\tau_1 = 2\mu \lambda_1^2 - \frac{\mu}{2} (2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_3^2) + (\lambda + 2\mu)(J - 1)J \quad (7.6)$$

$$\tau_2 = 2\mu \lambda_2^2 - \frac{\mu}{2} (2\lambda_2^2 \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) + (\lambda + 2\mu)(J - 1)J \quad (7.7)$$

$$\tau_3 = 2\mu \lambda_3^2 - \frac{\mu}{2} (2\lambda_2^2 \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_3^2) + (\lambda + 2\mu)(J - 1)J \quad (7.8)$$

$$dtde(1, 1) = \tau_1 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (2 J^2 - J) \quad (7.9)$$

$$dtde(2, 2) = \tau_2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (2 J^2 - J) \quad (7.10)$$

$$dtde(3, 3) = \tau_3 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (2 J^2 - J) \quad (7.11)$$

$$dtde(1, 2) = dtde(1, 3) = dtde(2, 3) = -\mu \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) (2 J^2 - J) \quad (7.12)$$

Sarebbe inoltre possibile dimostrare come tale matrice sia simmetrica e definita positiva ([1]).

7.3 Un modello elasto-plastico per la placca aterosclerotica

Il potenziale energetico scelto per la modellazione della placca aterosclerotica (considerata isotropa e comprimibile) è di tipo elasto-plastico, condizione indispensabile in vista di uno studio del fenomeno di danneggiamento del materiale.

A differenza degli altri legami costitutivi già trattati, che sono stati integralmente sviluppati analiticamente e poi implementati, tale modello è già disponibile all'interno del codice FEAP ed è stato programmato dal Prof. R.L. Taylor (University of California at Berkeley) e dal Prof. F. Auricchio (Università degli Studi di Pavia).

Rimandando quindi alla segnalazione bibliografica [1] per un approfondimento sulla parte computazionale, si ritiene opportuno in questa sede descrivere solamente, in modo sintetico, il tipo di formulazione adottata.

L'energia di deformazione elastica è di tipo logaritmico ed è scomposta nella sua parte volumetrica e deviatorica

$$\psi = U(J^e) + W(\overline{\lambda}_i^e) \quad (7.13)$$

essendo

$$J^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e \quad \text{e} \quad \overline{\lambda}_i^e = (J^e)^{-1/3} \lambda_i \quad (7.14)$$

rispettivamente, il volume elastico di materiale e la parte deviatorica degli allungamenti.

In particolare U e W hanno espressioni quadratiche

$$U = \frac{1}{2} K [\log(J^e)]^2; \quad W = G \sum_{j=1}^3 [\log(\bar{\lambda}_j)]^2 \quad (7.15)$$

dove K e G rappresentano il modulo volumetrico e il modulo di taglio del materiale considerato

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.16)$$

Come nel caso precedente, anche tale modello è stato programmato con il metodo dell' "Update Lagrangian Formulation" (Appendice D).

È necessario perciò specificare sia l'espressione degli sforzi di Kirchhoff (scomposti nella loro parte isotropa p e deviatorica t), sia gli elementi che costituiscono la matrice tangente (simmetrica). In particolare, per $i = 1, 2, 3$, si ha

$$\tau_i = p + t_i = \frac{\partial \psi}{\partial J^e} J^e + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\lambda}_i^e} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\lambda}_i^e} \bar{\lambda}_i^e \quad (7.17)$$

Dalle (7.5) si deducono quindi le seguenti relazioni definitive

$$\tau_i = K \log(J^e) + 2G \log[\bar{\lambda}_i^e] \quad (7.18)$$

$$dtde(1,1) = dtde(2,2) = dtde(3,3) = \frac{1}{2} K + \frac{2}{3} G \quad (7.19)$$

$$dtde(1,2) = dtde(1,3) = dtde(2,3) = \frac{1}{2} K - \frac{1}{3} G \quad (7.20)$$

Sotto l'ipotesi di risposta plastica isotropa, la funzione di snervamento F viene scelta per essere funzione isotropa degli sforzi di Kirchhoff.

In particolare si ha

$$F(I_1, J_2, J_3) = f(I_1, J_2, J_3) - \sigma_Y \quad (7.21)$$

dove I_1, J_2, J_3 , sono i 3 invarianti di sforzo così definiti

$$I_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad (7.22)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \quad (7.23)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3) \quad (7.24)$$

Per le successive simulazioni, si sceglie il criterio di snervamento di Mises, in cui la funzione f è così definita

$$f = [2J_2]^{1/2} = [t_1^2 + t_2^2 + t_3^2]^{1/2} \quad (7.25)$$

7.4 Il modello geometrico

Si effettua lo studio di un tratto di arteria rettilinea, di lunghezza 16 mm, diametro interno di 3 mm, e spessore della parete costante di 1,5 mm, pari cioè ad $1/2$ del lume, in accordo con le classiche dimensioni delle arterie di medio calibro ([2], [20]).

Riguardo alla lesione, viene esaminata una stenosi simmetrica, di forma trapezoidale che in sezione (Figura 7.1) presenta le seguenti caratteristiche

- base maggiore 8 mm
- base minore 6 mm
- altezza 1,25 mm

Per evidenti motivi di simmetria, in direzione longitudinale viene studiato solo il 50% del modello geometrico completo (le dimensioni geometriche citate sono riferite al 50% del modello).

Una massiccia semplificazione del problema, può essere fatta anche in direzione trasversale.

Il sistema arteria-placca, ha infatti un numero finito di assi di simmetria, pari al numero di strutture elementari (elementi finiti) che ripetute in senso circolare lo compongono.

Per le simulazioni, si considera solamente un unico settore tridimensionale di 5 gradi, a vantaggio quindi di una sensibile riduzione del tempo di calcolo.

7.5 Il modello ad elementi finiti

Per la modellazione dell'arteria e della placca si adottano ancora elementi finiti solidi a 8 nodi.

Nel tratto longitudinale di arteria, si dispongono 33 elementi, mentre 4 lungo la direzione radiale per un totale quindi di 132 elementi finiti.

La placca aterosclerotica complessivamente conta di 319 elementi ripartiti tra i 3 blocchi poligonali utilizzati per la sua generazione.

Per assicurare la correttezza della discretizzazione è possibile notare (Figura 7.1) come il sistema arteria-placca abbia lo stesso numero di elementi nelle sezioni comuni.

7.6 Condizioni di carico

Le analisi eseguite riguardano due differenti condizioni di carico

1. sistema arteria-placca sottoposto a pressione fisiologica (100 e 200 mmHg)
2. arteria sottoposta a pressione fisiologica di 100 mmHg e placca sottoposta alla pressione di gonfiaggio (10 e 20 atmosfere) della protesi (solo nel tratto orizzontale di 6 mm della stenosi)

Non si studia il problema di contatto tra protesi e tessuto biologico.

I parametri elastici e plastici dei materiali sono stati presi in prestito dalla letteratura, non avendo a disposizione dati sperimentali riguardanti arterie stenotiche.

Inesistenti, per ora, invece, prove riguardanti la sola placca le cui caratteristiche meccaniche si sono dovute ipotizzare.

In particolare, sulla base delle indicazioni fornite dalle pubblicazioni [21], [32], [30], [31], [29] si considera per l'arteria un valore di modulo elastico di 0,55 N/mm² con un modulo di Poisson di 0,3 (valore scelto anche per la placca).

I dati relativi alla placca vengono proposti invece in base a un confronto fatto con le caratteristiche meccaniche del tessuto aortico.

Essendo la stenosi formata da materiale fibroso molto compatto ([6], [20]), si ritiene possa avere un modulo elastico maggiore di quello dell'arteria: si simuleranno perciò casi in cui il modulo elastico sia pari al triplo di quello dell'arteria e pari cioè a 1,65 N/mm².

In base alle considerazioni qualitative di Hayashi ([10]), si considera, per la placca, una tensione di snervamento di 0,8 N/mm².

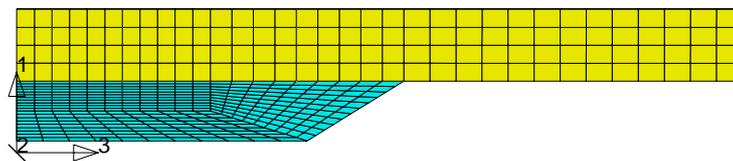


Figura 7.1: sistema arteria-placca aterosclerotica. Schema della mesh ad elementi finiti adottata.

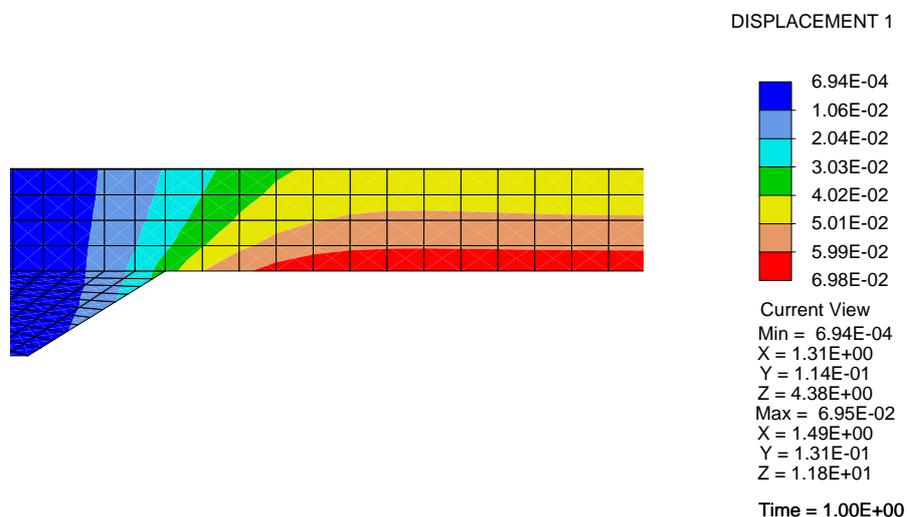


Figura 7.2: particolare del tratto di arteria. Andamento dello spostamento verticale per una pressione sanguigna di 100 mmHg.

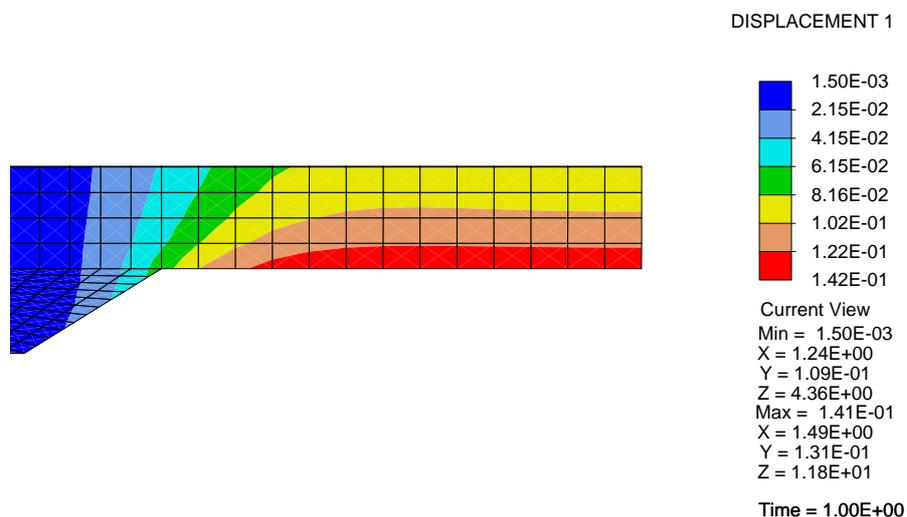


Figura 7.3: particolare del tratto di arteria. Andamento dello spostamento verticale per una pressione sanguigna di 200 mmHg.

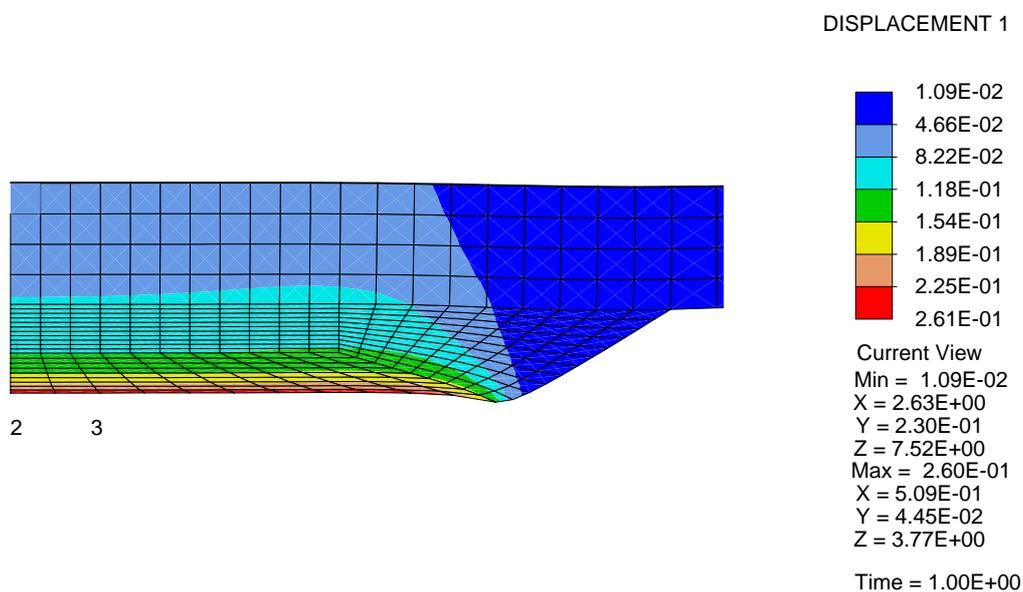


Figura 7.4: particolare della placca. Andamento dello spostamento verticale al termine della fase di gonfiaggio della protesi ($p = 10 \text{ atm}$).

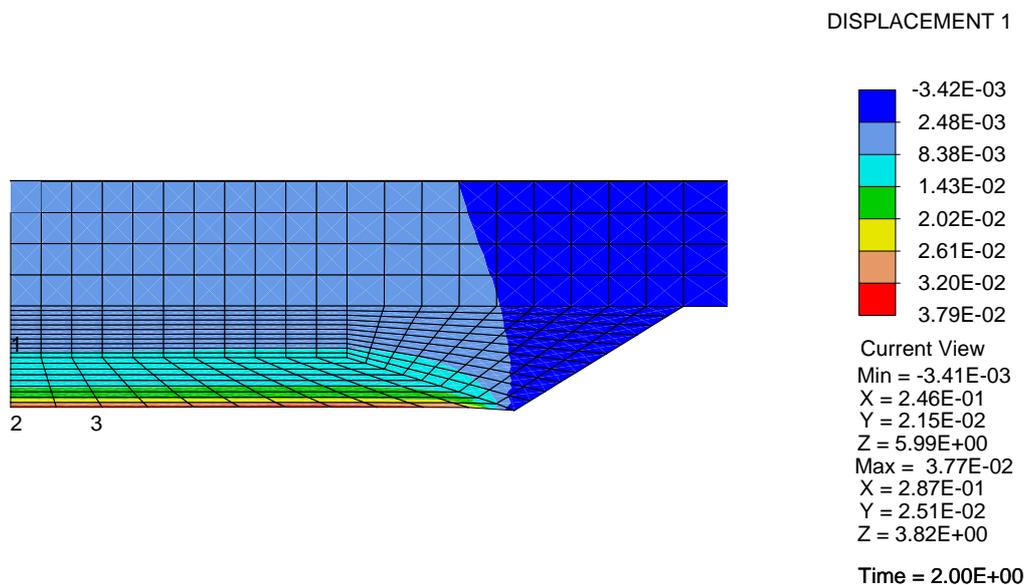


Figura 7.5: particolare della placca. Andamento dello spostamento verticale al termine della fase di gonfiaggio-sgonfiaggio ($p = 10 \text{ atm}$).

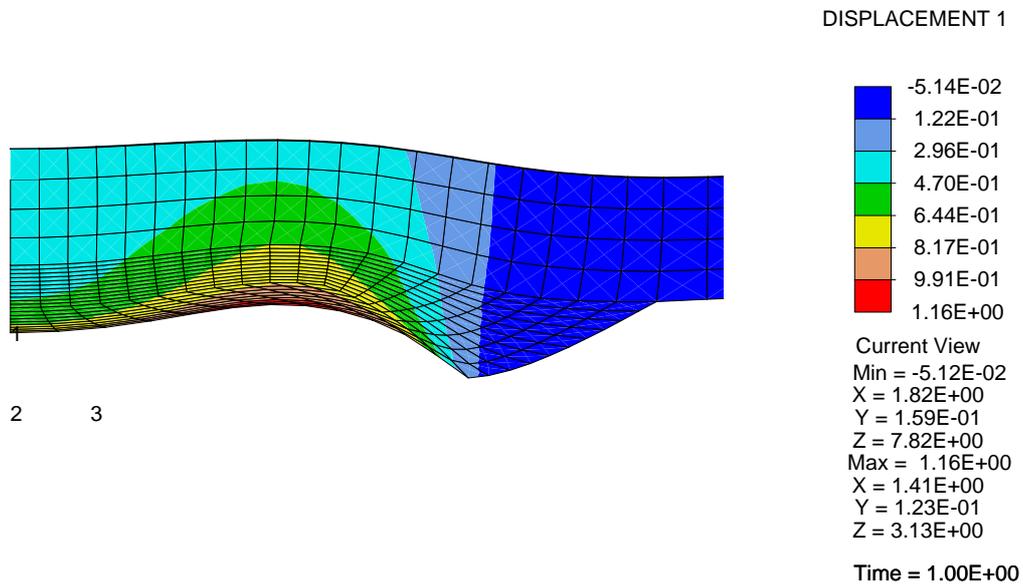


Figura 7.6: particolare della placca. Andamento dello spostamento verticale al termine della fase di gonfiaggio ($p = 20 \text{ atm}$).

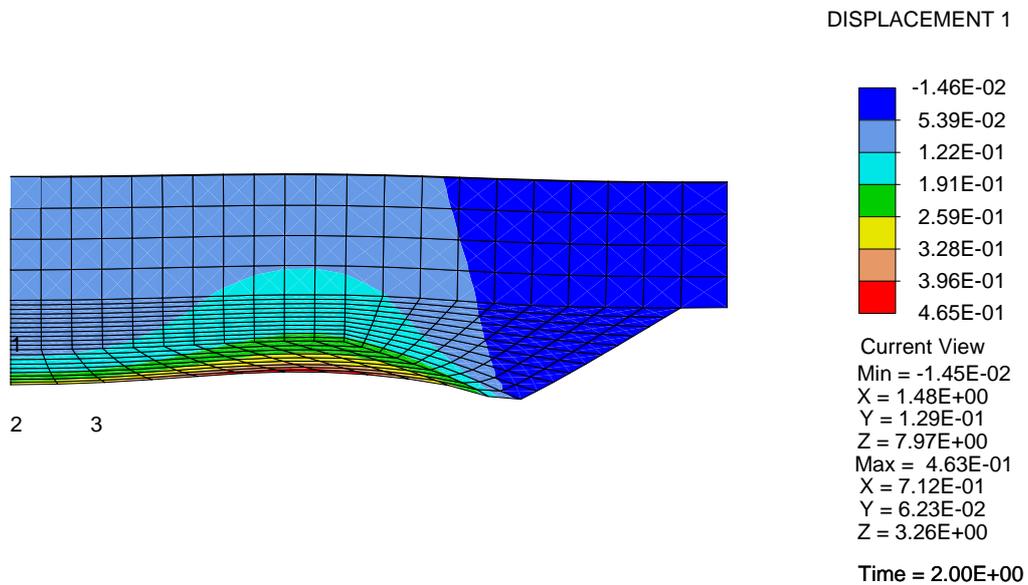


Figura 7.7: particolare della placca. Andamento dello spostamento verticale al termine della fase di gonfiaggio-sgonfiaggio ($p = 20 \text{ atm}$).

Capitolo 8

Sviluppo di un modello pressione-diametro semplificato

8.1 Introduzione

L'utilizzo di modelli pressione diametro nasce dall'esigenza di caratterizzare il comportamento meccanico della parete aortica senza dover necessariamente imbattersi nei difficili legami costitutivi iperelastici di cui al Capitolo 6.

Lo scopo di questo capitolo, a tal proposito è duplice: da un lato studiare un modello esistente, in tal caso quello di Hayashi ([9]), dall'altro sviluppare una formulazione semplificata, alternativa alla prima.

Non avendo a disposizione dati sperimentali recenti, necessari per effettuare una taratura delle formule, si utilizzano allora quelli relativi al lavoro di Holzapfel et al. contenuti nell'articolo "*A new axisymmetrical membrane element for anisotropic, finite strain analysis of arteries*" segnalato in bibliografia ([13]).

L'elaborazione di tali dati e una descrizione completa delle relative prove sperimentali sono contenute nell' Appendice B.

Oltre che ad un confronto tra i due modelli studiati, viene data una breve descrizione del metodo dei minimi quadrati, utilizzato per la determinazione dei parametri del materiale caratterizzanti le relazioni analitiche.

8.2 Una taratura del modello di Hayashi

Il modello di Hayashi ([9]), già diffusamente descritto nel Capitolo 6, è un modello di tipo logaritmico, caratterizzato da un solo parametro del materiale. È valido nel range delle pressioni fisiologiche, anche se l'autore non specifica gli estremi di tale intervallo.

Sulla scorta dei dati sperimentali a disposizione (raccolti nell' Appendice B), si ritiene opportuno fissare inferiormente tale range a 100 mmHg (0,0133 N/mmq) e superiormente a 200 mmHg (0,0266 N/mmq), non considerando quindi, la parte di valori relativi a pressioni < 100 mmHg.

Partendo dalla formula (6.17) è conveniente esplicitare la relazione di Hayashi rispetto al diametro (variabile dipendente)

$$D = D_{100} \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{P}{P_{100}} \right) + 1 \right] \quad (8.1)$$

essendo

- P_{100} la pressione di 100 mmHg
- D_{100} il diametro corrispondente alla pressione P_{100}
- P la pressione sanguigna
- D il diametro esterno del vaso alla corrispondente pressione sanguigna
- β il parametro di rigidità del tessuto biologico

Impiegando il codice MATLAB, si risale facilmente al valore di β che soddisfa il principio dei minimi quadrati: esso viene valutato in

$$\beta = 11,3077$$

In definitiva la formula di Hayashi assume l'espressione

$$D = D_{100} \left[\frac{1}{11.3077} \log \left(\frac{P}{P_{100}} \right) + 1 \right] \quad (8.2)$$

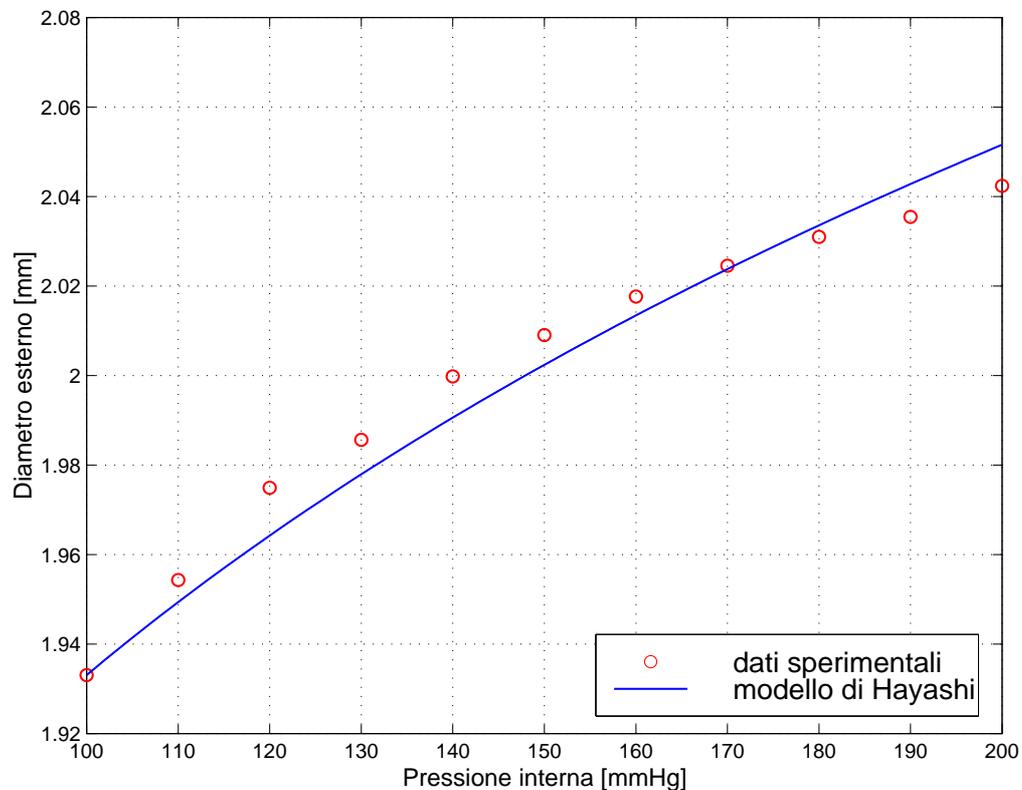


Figura 8.1: il modello pressione-diametro di Hayashi.

Pressione [mmHg]	Sperimentale [mm]	Hayashi [mm]	Errore [%]
100	1,933084	1,933084	0,000000
110	1,954323	1,949378	0,253052
120	1,974943	1,964252	0,541312
130	1,985660	1,977936	0,388993
140	1,999795	1,990605	0,459552
150	2,009035	2,002399	0,330286
160	2,017659	2,013432	0,209476
170	2,024533	2,023796	0,036382
180	2,031003	2,033568	0,126284
190	2,035463	2,042811	0,360988
200	2,042371	2,051580	0,450874

Tabella 8.1: confronto numerico tra dati sperimentali e modello di Hayashi.

8.3 Sviluppo di un nuovo modello

Si cerca di sviluppare un nuovo modello pressione-diametro per poterlo confrontare con il precedente modello logaritmico di Hayashi.

L'idea è quella utilizzare una funzione del tipo

$$D = AP^B \quad (8.3)$$

essendo al solito

- P la pressione sanguigna
- D il diametro esterno del vaso alla corrispondente pressione sanguigna
- A, B le costanti del materiale

Anche per questa proposta si effettua un taratura dei parametri A e B per valori di pressione compresi tra 100 mmHg e 200 mmHg.

Solo così è possibile effettuare un paragone tra i due modelli che devono avere evidentemente lo stesso campo di esistenza.

Utilizzando il medesimo algoritmo MATLAB, impiegato in precedenza, si deducono i valori delle due costanti sperimentali

$A = 1,3674$	$B = 0,0763$
--------------	--------------

La formula definitiva di questo nuovo modello risulta quindi essere

$$D = 1,3674P^{0.0763} \quad (8.4)$$

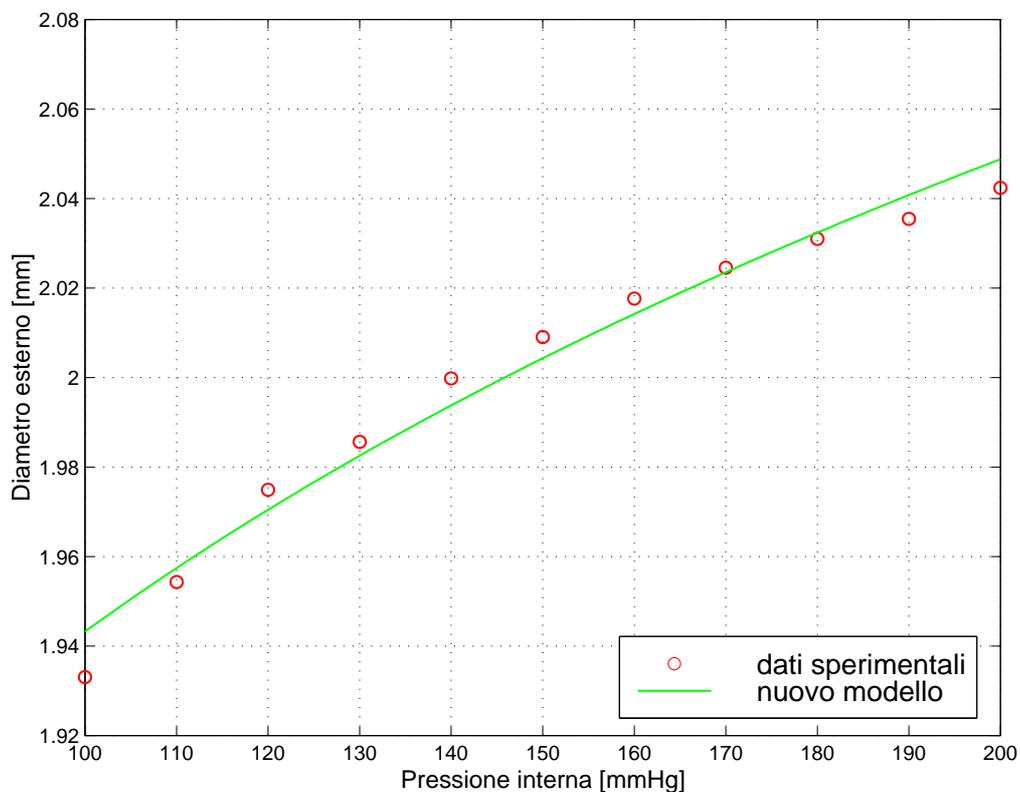


Figura 8.2: il nuovo modello pressione-diametro

Pressione [mmHg]	Sperimentale [mm]	Nuovo [mm]	Errore [%]
100	1,933084	1,943102	0,518234
110	1,954323	1,957284	0,151508
120	1,974943	1,970322	0,234005
130	1,985660	1,982392	0,164599
140	1,999795	1,993633	0,308147
150	2,009035	2,004155	0,242895
160	2,017659	2,014049	0,178944
170	2,024533	2,023386	0,056635
180	2,031003	2,032230	0,060416
190	2,035463	2,040631	0,253897
200	2,042371	2,048633	0,306604

Tabella 8.2: confronto numerico tra dati sperimentali e nuovo modello.

8.4 Un confronto tra i modelli studiati

Dalla Figura 8.3 è possibile stabilire che il nuovo modello meglio interpola i dati sperimentali sia a pressioni basse che per alti valori della pressione.

Ad eccezione del punto iniziale, punto in cui la formula di Hayashi fornisce lo stesso valore del dato sperimentale, con la nuova proposta si è ottenuto un sensibile miglioramento che appare ancora più evidente osservando l'errore percentuale esistente tra i dati sperimentali e i due modelli.

Nonostante la nuova formula sia caratterizzata da un parametro aggiuntivo, i tempi di calcoli sono comunque ininfluenti, dato il numero contenuto dei valori da interpolare.

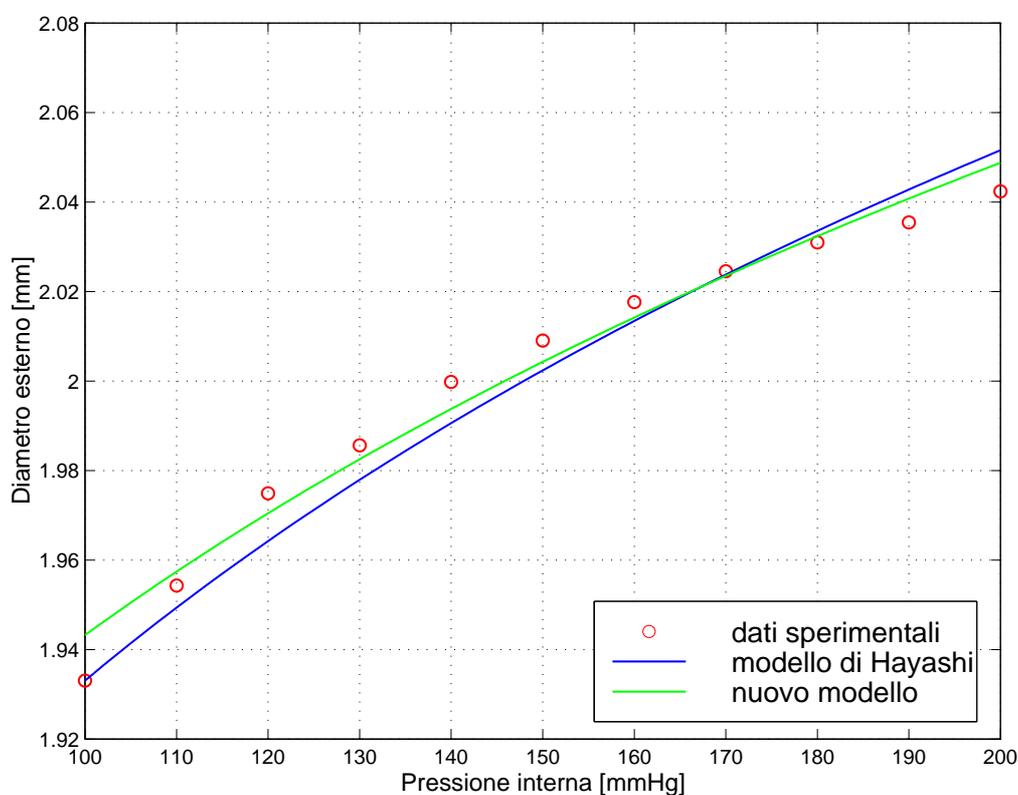


Figura 8.3: confronto tra il modello di Hayashi e il nuovo modello.

8.5 Cenni sul metodo dei minimi quadrati

Si supponga che un certo fenomeno sia caratterizzato dalle n variabili indipendenti z_1, z_2, \dots, z_n e dalla variabile dipendente y , legate tra loro dalla funzione lineare

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_n z_n = \sum_{j=1}^n c_j z_j \quad (8.5)$$

essendo i c_i con $i = 1, n$ i vari coefficienti numerici.

Si supponga ora di sapere che il fenomeno è retto da una legge di tipo (8.5) e di voler determinare sperimentalmente i coefficienti c_i .

Basterebbe a questo scopo eseguire n distinte osservazioni del fenomeno e risolvere il risultante sistema di n equazioni lineari nelle n incognite c_1, c_2, \dots, c_n ; ma, essendo ogni misura affetta da errore, ne segue che i coefficienti così calcolati sono pur essi affetti da errore.

Per ridurre allora il valore dell'errore probabile, si usa compiere un numero $m > n$ di osservazioni e determinare, con il metodo dei minimi quadrati, la n -pla dei c_i che meglio approssima il complesso di tutte le osservazioni.

La (8.5) prende il nome di *equazione di regressione* e i vari c_i sono detti *coefficienti della regressione*.

Siano dunque date le grandezze

$$(z_{ij}, y_i) \quad \text{con} \quad \begin{cases} i = 1, m \\ j = 1, n \\ m > n \end{cases} \quad (8.6)$$

avendo indicato con z_{ij} e y_i i valori misurati nella osservazione i -esima rispettivamente per la j -esima variabile indipendente e per la variabile dipendente; sia inoltre c_j $j=1, n$ la n -pla incognita dei coefficienti della regressione e sia infine

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^n c_j z_{ij} \quad \text{con } i = 1, m \quad (8.7)$$

il *valore calcolato* per la variabile dipendente in base ai valori delle variabili indipendenti misurati durante l'osservazione i -esima: tale valore differirà del valore osservato y_i per l'*errore* e_i .

Si ha pertanto

$$e_i = \sum_{j=1}^n c_j z_{ij} - y_i \quad (j = 1, m) \quad (8.8)$$

Posto quindi

$$S = \sum_{i=1}^m e_i^2 \quad (8.9)$$

il principio dei minimi quadrati consente la determinazione dei vari c_i in base alle seguenti equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, n) \quad (8.10)$$

Lo sviluppo della (8.10) porta immediatamente alle

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_j z_{ij} - y_i \right) z_{ik} \quad (k = 1, n) \quad (8.11)$$

ovvero alle

$$\sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m z_{ij} z_{ik} = \sum_{i=1}^m y_i z_{ik} \quad (8.12)$$

Indicando con \mathbf{A} la matrice quadrata il cui elemento generico è dato da

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^m z_{ij} z_{ik} \quad (j, k = 1, n) \quad (8.13)$$

indicando con \mathbf{B} il vettore il cui elemento generico vale

$$b_k = \sum_{i=1}^m y_i z_{ik} \quad (k = 1, n) \quad (8.14)$$

e indicando con \mathbf{C} il vettore dei coefficienti della regressione, e notando infine la simmetria della matrice \mathbf{A} , si ricava l'espressione matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (8.15)$$

equivalente alla (8.12).

Risolviendo il sistema lineare (8.15) si ricavano i valori cercati per i coefficienti della regressione a cui può essere associato, come misura della bontà del risultato la media quadratica degli errori (cioè il valore $\sqrt{S/m}$).

Si rimanda ad una letteratura specializzata per una più esauriente analisi della bontà dei c_i .

Riassumendo, un'analisi di regressione comprende le seguenti fasi:

1. si dispone dei valori misurati in m osservazioni;
2. si ipotizza una determinata espressione analitica per la legge che lega fra loro variabili indipendenti e variabile dipendente;
3. si eseguono opportune trasformazioni sulle variabili, in modo da ricondursi ad un'espressione analitica di tipo (8.5). Nel caso che nella (8.5) sia previsto un termine costante ci si riconduce al caso generale associando a questo termine dei valori di z costanti ed uguali ad 1;

4. mediante il metodo dei minimi quadrati sopra illustrato si ricavano i coefficienti della regressione;
5. in base al risultante valore dello scarto quadratico medio, o in base ad altre considerazioni per cui si rinvia alla letteratura specializzata, si decide se considerare soddisfacenti i valori dei c_i o modificare il modello e ripetere l'intero procedimento.

Appendice A

Glossario medico

È sembrato opportuno predisporre un glossario medico per chiarire meglio, durante il corso della lettura, il significato di alcuni vocaboli tecnici.

Elencati in ordine alfabetico, essi si riferiscono alla maggior parte dei termini chimico-medici citati all'interno dei primi due Capitoli della Tesi.

A.1 Terminologia

Albero arterioso - Insieme delle arterie principali e delle loro diramazioni.

Amminoacido - Unità costitutiva della proteina.

Angiografia - Esame che utilizza un sottile tubicino (catetere) che viene introdotto, attraverso un'arteria del braccio o della gamba, sino al sito d'interesse. Dopo l'iniezione di un liquido opaco da parte del catetere nelle coronarie, viene eseguito un filmato radiografico (ai raggi X), che permette di evidenziare l'arteria in esame e le sue ramificazioni. Si può così rilevare il numero, la sede e la gravità della stenosi.

Angioplastica - Tecnica di chirurgia non invasiva per il trattamento di stenosi vascolari, che riapre il vaso tramite il gonfiaggio di una protesi a palloncino contro la lesione aterosclerotica.

Aorta - È la più grande arteria del corpo, ha inizio dal cuore stesso e con le sue innumerevoli diramazioni fornisce di sangue ogni cellula.

Arteriole - Rami delle arterie di piccolo diametro.

Arteria - Vaso a carattere centrifugo, che porta il sangue dal cuore ai tessuti. Alle arterie è associato il sangue arterioso, tranne nell'arteria polmonare.

Arteriosclerosi - Patologia, comunemente chiamata irrigidimento delle arterie, che include varie condizioni che causano l'ispessimento e perdita di elasticità della parete arteriosa.

Aterectomia - Tecnica chirurgica non invasiva per il trattamento di stenosi vascolari, con cui il materiale ostruente il vaso è asportato.

Aterosclerosi - Processo che porta l'accumulo di lipidi all'interno della parete vascolare, provocandone l'ispessimento e, nel tempo, la probabile calcificazione. La zona ispessita, prende il nome di ateroma, placca o lesione aterosclerotica.

Avventizia - Strato più esterno dei vasi, formato soprattutto da collagene e matrice extracellulare in genere.

Capillari - Vasi sanguigni microscopici che fanno da tramite tra le arterie e le vene nella distribuzione di ossigeno e principi nutritivi alle cellule del corpo.

Carotidi - Arterie del collo che provvedono all'apporto di sangue per la testa.

Catetere - Sonda inserita nei condotti del corpo per diagnosi o trattamento. In cardiocirurgia è spesso utilizzato per angiografie e nella chirurgia non invasiva.

Cellule muscolari lisce - Cellule allungate, strette e fusiformi prive di striature trasversali. Tali cellule vanno a costituire i muscoli della parete del tubo digerente, delle vie respiratorie e della maggior parte dei vasi sanguigni.

Chirurgia non invasiva - Trattamento chirurgico che, nell'inserzione degli strumenti nel corpo, non comporta danni a tessuti diversi da quelli trattati.

Colesterolo - Sostanza lipidica trasportata dal sangue, essenziale per lo sviluppo delle membrane cellulari, ma accumulato in lesioni aterosclerotiche se presente in quantità eccessive.

Coronarie - Arterie (destra e sinistra) che, partendo dall'aorta con le varie diramazioni irrorano i tessuti cardiaci.

Denaturazione - È uno stato di disordine, a livello di strutture proteiche, causato nelle proteine dall'alta temperatura.

Endotelio - Strato liscio di cellule (endoteliali) che costituisce la parete interna dei vasi sanguigni.

Fibroblasti - Cellule molto lunghe e sottili con contorni irregolari e provvisti di prolungamenti. Insieme ai macrofagi costituiscono il reticolo fibroso del tessuto connettivo.

Glicina - È l'amminoacido con la struttura chimica più semplice. Fa parte dei 20 amminoacidi standard che costituiscono la proteina.

Glicosaminoglicano - Costituente della matrice extracellulare, insieme con le proteine fibrose, costituito a sua volta da una ripetizione di unità disaccaridiche.

Idrossiprolina - È uno degli amminoacidi non standard ed uno dei costituenti delle fibre extracellulari.

Intima - Strato più interno dei vasi, formato essenzialmente da endotelio.

Lamina elastica - Detta anche membrana, è un sottile strato interposto tra le varie tuniche che costituiscono la parete del vaso arterioso.

Lesione - Si veda *aterosclerosi*.

LDL - Sigla che indica le lipoproteine a bassa densità. Sono molecole primarie per il trasporto del colesterolo.

Lipidi - Grassi insolubili nel sangue.

Lume - Sezione di passaggio di un vaso in cui il sangue può scorrere liberamente.

Macrofagi - Cellule che si muovono nel labirinto delle fibre. Il loro compito è quello di rimuovere batteri e detriti cellulari che vengono assunti tramite fagocitosi.

Matrice extracellulare - Chiamata anche sostanza di base, è un materiale gelatinoso che riempie lo spazio extracellulare. La sua funzione principale è quella di tenere unite le cellule di un tessuto.

Media - Strato centrale di vasi, di composizione diversa secondo il tipo di vaso.

Mucopolisaccaridi - Vecchia terminologia utilizzata per definire i glicosaminoglicani.

Necrosi - Morte di un tessuto biologico.

Placca - Si veda *aterosclerosi*.

Prolina - Amminoacido appartenente ai 20 amminoacidi standard che costituiscono le proteine. A causa della particolare struttura chimica, conferisce rigidità.

Proteina - Macromolecola costituita da catene di amminoacidi uniti tra loro da uno specifico legame covalente.

PTCA - Acronimo di Percutaneous Transluminal Coronary Angioplasty: si veda *angioplastica*

Stenosi - Restringimento della sezione di un vaso.

Stent - Protesi metalliche a carattere permanente, utilizzate per rivascolarizzare arterie occluse. Sono portate nel sito lesionato tramite un sistema con catetere e fanno parte, quindi, delle tecniche di chirurgia non invasiva.

Trombo - Massa gelatinosa di materiale sanguigno, derivato da fattori coagulanti presenti nel sangue. I trombi proteggono i vasi danneggiati, ma in concomitanza di aterosclerosi, possono occludere totalmente il vaso causando ischemia e/o infarto.

Appendice B

Elaborazione dei dati sperimentali

B.1 Elaborazione dei dati sperimentali

In questa parte di Tesi vengono elaborati i dati sperimentali necessari per lo studio dei modelli pressione-diametro di cui al Capitolo 8.

Non avendo a disposizione informazioni più precise in merito, si utilizzano quelli relativi al lavoro di Holzapfel et al. contenuti nell'articolo "*A new axisymmetrical membrane element for anisotropic, finite strain analysis of arteries*" ([13]), già segnalato in bibliografia.

Essendo riportati in forma grafica (Figura 6.3, Capitolo 6), tali dati sono stati prima acquisiti tramite scanner e poi letti mediante il programma AutoCAD 14, riferendosi solamente ai valori relativi all'aorta addominale.

Le prove sperimentali sono state condotte dal gruppo di ricerca in biomeccanica al Dipartimento di Meccanica Computazionale della University of Technology di Graz, in Austria.

I tests sono stati avviati su provini cilindrici, ricavati da arterie di ratto, soggetti a diversi livelli di deformazione assiale e di pressione interna, imposti con una speciale macchina.

Mediante trasduttori e riprese con video-camera si sono poi determinati rispettivamente, sia le forze assiali all'estremità di ciascun provino, sia i diametri esterni per ciascun valore della pressione di gonfiaggio.

Sotto l'ipotesi di incomprimibilità della parete dell'arteria (condizione di deformazione isovolumetrica), noti il valore del raggio medio e della lunghezza del provino sia nelle condizioni iniziali (R e L), sia alle varie condizioni di carico (r e l) è immediato calcolare le componenti principali di deformazione del tensore di Green-Lagrange

$$E_{\theta} = \frac{1}{2} (\lambda_{\theta}^2 - 1), \quad E_z = \frac{1}{2} (\lambda_z^2 - 1) \quad (\text{B.1})$$

ricordando che

$$\lambda_\theta = \lambda_1 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_z = \lambda_2 = \frac{l}{L} \quad (\text{B.2})$$

denotano i rispettivi allungamenti della superficie media della parete del vaso nella direzione circonferenziale ed assiale.

Lo spessore della parete nelle varie configurazioni deformate viene calcolato con la seguente formula, valida per tubi cilindrici incompressibili

$$h = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{V}{\pi l}} \quad (\text{B.3})$$

dove

$$V = \pi LH(D - H) \quad (\text{B.4})$$

denota il volume totale di tessuto.

I parametri D e d indicano rispettivamente i valori di diametro esterno del provino nella condizione iniziale e nelle condizioni deformate: essi sono legati ai rispettivi raggi dalle relazioni seguenti

$$R = \frac{1}{2} (D - H) \quad r = \frac{1}{2} (d - h) \quad (\text{B.5})$$

essendo h ed H i rispettivi spessori della parete.

Viene ora proposta una tabella che riepiloga tutte le grandezze elaborate a partire dai valori (misurati) di E_θ .

Di seguito, inoltre, sono indicate le dimensioni geometriche del provino nella situazione iniziale

H = 0,1230 mm	D = 1,5126 mm
----------------------	----------------------

Prima della prova di gonfiaggio vera e propria, il provino tubolare viene anche sottoposto ad uno stretch assiale pari a $\lambda_z = 1,527$.

P [mmHg]	E_θ	λ_θ	λ_r	r [mm]	d [mm]	h [mm]
0	-0,1518	0,834506	0,784750	0,579815	1,256154	0,096524
10	-0,1032	0,890842	0,735123	0,618957	1,328335	0,090420
20	-0,0499	0,948789	0,690226	0,659218	1,403335	0,084898
30	0,0111	1,011039	0,647729	0,702470	1,484610	0,079671
40	0,0737	1,071168	0,611369	0,744247	1,563693	0,075198
50	0,1440	1,134901	0,577036	0,788529	1,648034	0,070975
60	0,2168	1,197330	0,546949	0,831905	1,731085	0,067275
70	0,2849	1,252917	0,522684	0,870526	1,805343	0,064290
80	0,3381	1,294681	0,505822	0,899545	1,861305	0,062216
90	0,3757	1,323405	0,494844	0,919502	1,899869	0,060866
100	0,4087	1,348110	0,485776	0,936667	1,933084	0,059750
110	0,4301	1,363891	0,480155	0,947632	1,954323	0,059059
120	0,4511	1,379203	0,474824	0,958270	1,974943	0,058403
130	0,4621	1,387155	0,472102	0,963796	1,985660	0,058069
140	0,4767	1,397641	0,468560	0,971081	1,999795	0,057633
150	0,4863	1,404493	0,466274	0,975842	2,009035	0,057352
160	0,4953	1,410886	0,464161	0,980284	2,017659	0,057092
170	0,5025	1,415980	0,462492	0,983823	2,024533	0,056886
180	0,5093	1,420774	0,460931	0,987154	2,031003	0,056695
190	0,5140	1,424079	0,459861	0,989450	2,035463	0,056563
200	0,5213	1,429196	0,458215	0,993005	2,042371	0,056360

Tabella B.1: elaborazione dei dati sperimentali. Noto il valore di E_θ si risale facilmente alla valutazione di tutte le altre grandezze contenute in questa tabella riepilogativa.

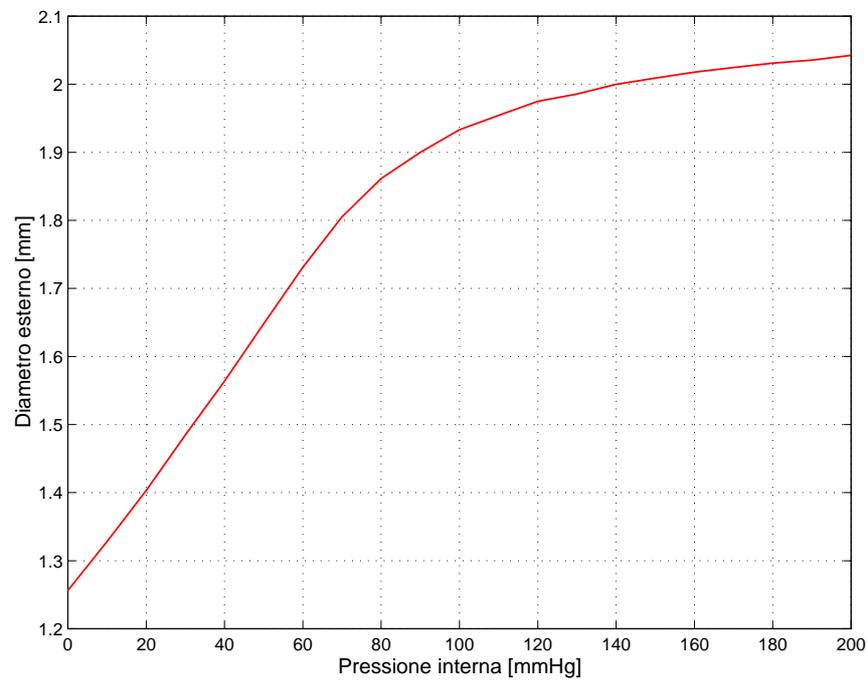


Figura B.1: costruzione della curva sperimentale pressione-diametro.

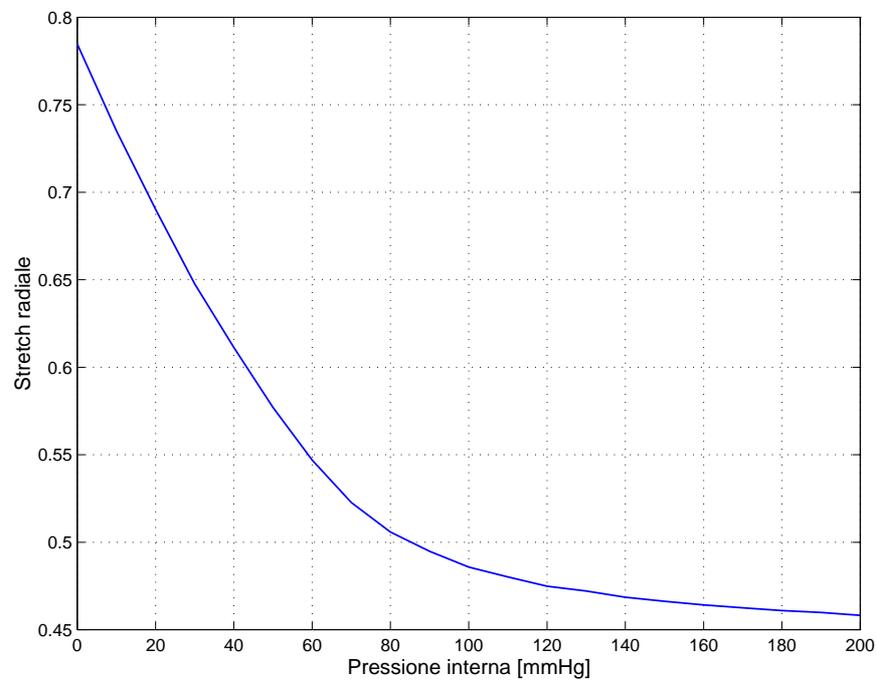


Figura B.2: costruzione della curva sperimentale pressione-stretch radiale.

Appendice C

Il modello del “balanced angle-ply reinforcement

Il modello del “balanced angle-ply reinforcement, sviluppato da Spencer ([23]) e successivamente ripreso da altri ricercatori, ([15], [16]) è stato inizialmente studiato e applicato su problemi riguardanti materiali compositi.

Si voleva, infatti, caratterizzare il comportamento meccanico di laminati rinforzati mediante una matrice di fibre disposte lungo alcune direzioni preferenziali.

Dal punto di vista analitico, il problema, trattato in regime di grandi deformazioni, si presentava particolarmente complicato, in quanto bisognava tenere conto di come la disposizione di tali fibre intervenisse sul calcolo delle quantità statiche.

Tale modello è stato sviluppato in differenti versioni e quella relativa al “balanced angle-ply reinforcement è la più generale.

Si ipotizza che il materiale studiato sia realizzato mediante 2 famiglie di fibre, non necessariamente ortogonali tra loro, ma sfasate di un angolo 2α .

Matematicamente questa condizione si traduce considerando due vettori di norma unitaria, che definiscono la direzione delle fibre nella configurazione di riferimento (configurazione iniziale) e il cui prodotto scalare individua proprio l'angolo 2α .

Tali vettori, indicati in seguito con i simboli \mathbf{a}_0 e \mathbf{b}_0 , in linea generale non sono costanti ma possono dipendere dalle loro coordinate spaziali sempre rispetto alla configurazione iniziale.

In letteratura poco spazio è dato a tale metodo che solo recentemente sembra essere in evoluzione, con massicce trattazioni anche in campo biomeccanico.

Oltre a studi effettuati sul legame costitutivo della cornea dell'occhio umano ([17]), particolari interessi sono rivolti alla modellazione dei vasi sanguigni che per la loro struttura presentano senz'altro intrecci strutturali a livello microscopico (fibre di collagene).

C.1 Trattazione analitica

Come in ogni problema di analisi strutturale in regime di grandi deformazioni, anche per tale metodo occorre definire una energia di deformazione.

Il potenziale iperelastico su cui si basa tale tecnica è funzione di 8 invarianti fondamentali del tensore di deformazione desto di Cauchy-Green (tensore \mathbf{C})

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \quad (\text{C.1})$$

Il calcolo della quantità statiche di interesse, secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff e tensori di elasticità materiale e spaziale, occorre seguire il metodo valido per materiali isotropi (Capitolo 4).

In particolare si ricorda che

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \dots + \frac{\partial \psi_8}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{C.3})$$

Nelle successive pagine sono riportati le relazione analitiche relative a tale modello di calcolo.

In particolare vengono indicate sia in forma compatta (o tensoriale), sia in forma indiciale, le formule relative agli 8 invarianti e alle rispettive derivate prime.

Per quanto riguarda il calcolo delle derivate seconde, si propone solo la forma indiciale, molto utile nel caso di eventuali implementazioni con un linguaggio di programmazione.

Solo nel recente lavoro di Kaliske ([17]) si sviluppa in parte questo nuovo approccio computazionale.

Invarianti: notazione compatta

$$\mathbf{I}_1 = tr\mathbf{C} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \left((tr\mathbf{C})^2 - tr\mathbf{C}^2 \right) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{I}_3 = det(\mathbf{C}) \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{I}_4 = \lambda_a^2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{I}_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_0 \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{I}_6 = \lambda_b^2 = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0 \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{I}_7 = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{b}_0 \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{I}_8 = \cos(2\alpha) \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0 \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{I}'_4 = \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_6 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0 = \lambda_a^2 + \lambda_b^2 \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{I}'_5 = \mathbf{I}_4 \mathbf{I}_6 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0)(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0) = \lambda_a^2 \lambda_b^2 \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{I}'_6 = \mathbf{I}_5 + \mathbf{I}_7 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_0) + (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{b}_0) \quad (\text{C.14})$$

essendo λ_a e λ_b gli allungamenti delle fibre in seguito alla storia deformativa, rispettivamente nelle direzioni \mathbf{a}_0 e \mathbf{b}_0 .

Invarianti: notazione indiciale

$$\mathbf{I}_1 = \sum_{i=1}^3 C_{ii} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ji}) \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{I}_3 = J^2 \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{I}_4 = \sum_{i,j=1}^3 (a_i C_{ij} a_j) \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{I}_5 = \sum_{i,j,k=1}^3 (a_i C_{ij} C_{jk} a_k) \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{I}_6 = \sum_{i,j=1}^3 (b_i C_{ij} b_j) \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{I}_7 = \sum_{i,j,k=1}^3 (b_i C_{ij} C_{jk} b_k) \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{I}_8 = \cos(2\alpha) \sum_{i,j=1}^3 (a_i C_{ij} b_j) \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{I}'_4 = \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_6 = \sum_{i,j=1}^3 (a_i C_{ij} a_j) + \sum_{i,j=1}^3 (b_i C_{ij} b_j) \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{I}'_5 = \mathbf{I}_4 \mathbf{I}_6 = \left(\sum_{i,j=1}^3 (a_i C_{ij} a_j) \right) \left(\sum_{i,j=1}^3 (b_i C_{ij} b_j) \right) \quad (\text{C.24})$$

$$\mathbf{I}'_6 = \mathbf{I}_5 + \mathbf{I}_7 = \sum_{i,j,k=1}^3 (a_i C_{ij} C_{jk} a_k) + \sum_{i,j,k=1}^3 (b_i C_{ij} C_{jk} b_k) \quad (\text{C.25})$$

Derivate degli invarianti: notazione compatta

$$\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a} \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_8}{\partial \mathbf{C}} = (\cos 2\alpha)(\mathbf{b} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{b}) \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}'_4}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}'_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}_4 \frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{I}_6 \frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}_4(\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}) + \mathbf{I}_6(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}'_6}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{C.36})$$

Derivate degli invarianti: notazione indiciale

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{C.37})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I}_1 - C_{ij} \quad (\text{C.38})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = J^2 C_{ij}^{-1} \quad (\text{C.39})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = a_i a_j \quad (\text{C.40})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \left(\sum_{m=1}^3 C_{jm} a_m\right) a_i + \left(\sum_{m=1}^3 C_{ki} a_k\right) a_j \quad (\text{C.41})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = b_i b_j \quad (\text{C.42})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \left(\sum_{m=1}^3 C_{jm} b_m\right) b_i + \left(\sum_{m=1}^3 C_{ki} b_k\right) b_j \quad (\text{C.43})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}_8}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = (\cos 2\alpha) a_i b_j \quad (\text{C.44})$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{I}'_4}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = a_i a_j + b_i b_j \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{I}'_5}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} &= \mathbf{I}_4 \left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} + \mathbf{I}_6 \left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} \\ &= \mathbf{I}_4 \sum_{k,l=1}^3 (a_k C_{kl} a_l) a_i a_j + \mathbf{I}_6 \sum_{k,l=1}^3 (b_k C_{kl} b_l) b_i b_j \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{I}'_6}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} &= \left(\frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}}\right)_{ij} = \left(\sum_{m=1}^3 C_{jm} a_m\right) a_i + \left(\sum_{k=1}^3 C_{ki} a_k\right) a_j + \\ &\quad \left(\sum_{m=1}^3 C_{jm} b_m\right) b_i + \left(\sum_{k=1}^3 C_{ki} b_k\right) b_j \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Derivate seconde degli invarianti: notazione indiciale

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_1}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.48})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_2}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_3}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = J^2 \left(C^{-1}(i, j) C^{-1}(k, l)\right) \\ &\quad - J^2 \left(C^{-1}(i, k) C^{-1}(j, l)\right) \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.51})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = a_i \delta_{jk} a_l + a_k \delta_{il} a_j \quad (\text{C.52})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.53})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = b_i \delta_{jk} b_l + b_k \delta_{il} b_j \quad (\text{C.54})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}_8}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_8}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.55})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}'_4}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}'_4}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.56})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}'_5}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}'_5}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = \mathbf{I}_4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_4}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) + \mathbf{I}_6 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_6}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = 0 \quad (\text{C.57})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{I}'_6}{\partial \mathbf{C}^2}\right)_{ijkl} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}'_6}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_5}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_7}{\partial \mathbf{C}_{ij}}\right) \\ &= a_i \delta_{jk} a_l + a_k \delta_{il} a_j + b_i \delta_{jk} b_l + b_k \delta_{il} b_j \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Appendice D

Programmazione in FEAP di legami costitutivi

In questa ultima parte della tesi vengono presentate le procedure seguite per l'implementazione in FEAP dei legami costitutivi studiati.

Le 3 versioni del modello di Neo-Hookean e il modello di Mooney-Rivlin sono state programmate con il metodo dell' "Update Lagrangian Formulation" andando ad ampliare una subroutine estratta dal sorgente del codice contenente le istruzioni FORTRAN riguardanti altri legami disponibili in FEAP.

In accordo con il metodo del "Total Lagrangian Formulation", con cui generalmente la maggior parte degli autori tratta i problemi in grandi deformazioni, si è sviluppato integralmente un ulteriore algoritmo, concettualmente differente dal primo, per lo studio dei soli legami di Neo-Hookean.

Da un confronto effettuato tra i 2 algoritmi, applicati a tutte le simulazioni numeriche condotte sulla protesi, si è potuto verificare la perfetta coincidenza dei risultati tra le rispettive versioni di ogni formula.

D.1 Il metodo dell' "Update Lagrangian Formulation"

Viene ora proposto, in modo schematico, l'algoritmo alla base di tale metodo di programmazione.

Non avendolo sviluppato integralmente, perchè già disponibile in FEAP, vengono solo proposti i passaggi effettuati dal programma per ogni passo di carico, rimandando per un maggiore approfondimento al riferimento bibliografico [1]. Si ricorda inoltre che le formule analitiche per il calcolo delle quantità relative ai punti successivi sono state diffusamente trattate all'interno del Capitolo 5.

1. inizializzazione del tensore \mathbf{b} al tempo t_n ;
2. valutazione del tensore \mathbf{b} al tempo t_{n+1} ;
3. calcolo degli autovalori ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) e delle direzioni principali ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ del tensore) del tensore \mathbf{b}_{n+1} ;
4. definizione degli sforzi di Kirchhoff per il modello studiato;
5. definizione della matrice tangente per il modello studiato;
6. calcolo del tensore degli sforzi di Cauchy;
7. calcolo del tensore di elasticità spaziale nel riferimento principale;
8. calcolo del tensore di elasticità spaziale nel riferimento generico.

Nella pagina seguenti le istruzioni FORTRAN per la definizione dei punti 4 e 5 dell'algoritmo.

Si indicherà con `112(1)`, `112(2)`, `112(3)` il valore degli stretches principali elevati al quadrato, con `dett` l'invariante J e con `dsa` e `dsb` rispettivamente le costanti di Lamé μ e λ .

c.... Kirchhoff stresses for Neo-Hookean model version 1

```
tau(1) = dsa*(l12(1) - 1) + dsb*(dett - 1)*dett
tau(2) = dsa*(l12(2) - 1) + dsb*(dett - 1)*dett
tau(3) = dsa*(l12(3) - 1) + dsb*(dett - 1)*dett
```

c.... Kirchhoff stresses for Neo-Hookean model version 2

```
tau(1) = dsa*(l12(1) - 1) + dsb*log(dett)
tau(2) = dsa*(l12(2) - 1) + dsb*log(dett)
tau(3) = dsa*(l12(3) - 1) + dsb*log(dett)
```

c.... Kirchhoff stresses for Neo-Hookean model version 3

```
tau(1) = dsa*(l12(1) - 1) + 0.5*dsb*(dett*dett - 1)
tau(2) = dsa*(l12(2) - 1) + 0.5*dsb*(dett*dett - 1)
tau(3) = dsa*(l12(3) - 1) + 0.5*dsb*(dett*dett - 1)
```

c.... Kirchhoff stresses for Mooney-Rivlin model

```
tau(1) = 2*dsa*l12(1)
&      - dsa*(l12(1)*l12(2) + l12(1)*l12(3))
&      + (2*dsa + dsb)*(dett-1)*dett
tau(2) = 2*dsa*l12(2)
&      - dsa*(l12(1)*l12(2) + l12(2)*l12(3))
&      + (2*dsa + dsb)*(dett-1)*dett
tau(3) = 2*dsa*l12(3)
&      - dsa*(l12(2)*l12(3) + l12(1)*l12(3))
&      + (2*dsa + dsb)*(dett-1)*dett
```

c.... Tangent matrix for Neo-Hookean model version 1

```
dtde(1,1) = dsa*l12(1) + 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(2,2) = dsa*l12(2) + 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(3,3) = dsa*l12(3) + 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(1,2) = 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(1,3) = 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(2,3) = 0.5*dsb*(2*dett - 1)*dett
dtde(2,1) = dtde(1,2)
dtde(3,1) = dtde(1,3)
dtde(3,2) = dtde(2,3)
```

c.... Tangent matrix for Neo-Hookean model version 2

```

dtde(1,1) = dsa*ll2(1) + 0.5*dsb
dtde(2,2) = dsa*ll2(2) + 0.5*dsb
dtde(3,3) = dsa*ll2(3) + 0.5*dsb
dtde(1,2) = 0.5*dsb
dtde(1,3) = 0.5*dsb
dtde(2,3) = 0.5*dsb
dtde(2,1) = dtde(1,2)
dtde(3,1) = dtde(1,3)
dtde(3,2) = dtde(2,3)

```

c.... Tangent matrix for Neo-Hookean model version 3

```

dtde(1,1) = dsa*ll2(1) + 0.5*dsb*dett*dett
dtde(2,2) = dsa*ll2(2) + 0.5*dsb*dett*dett
dtde(3,3) = dsa*ll2(3) + 0.5*dsb*dett*dett
dtde(1,2) = 0.5*dsb*dett*dett
dtde(1,3) = 0.5*dsb*dett*dett
dtde(2,3) = 0.5*dsb*dett*dett
dtde(2,1) = dtde(1,2)
dtde(3,1) = dtde(1,3)
dtde(3,2) = dtde(2,3)

```

c.... Tangent matrix for Mooney-Rivlin model

```

dtde(1,1) = tau(1)
&          + 0.5*(2.d0*dsa + dsb)*(2*dett-1)*dett
dtde(2,2) = tau(2)
&          + 0.5*(2.d0*dsa + dsb)*(2*dett-1)*dett
dtde(3,3) = tau(3)
&          + 0.5*(2.d0*dsa + dsb)*(2*dett-1)*dett
dtde(1,2) = - dsa*ll2(1)*ll2(2)
&          + 0.5*(2*dsa + dsb)*(2*dett - 1)*dett
dtde(1,3) = - dsa*ll2(1)*ll2(3)
&          + 0.5*(2*dsa + dsb)*(2*dett - 1)*dett
dtde(2,3) = - dsa*ll2(2)*ll2(3)
&          + 0.5*(2*dsa + dsb)*(2*dett - 1)*dett
dtde(2,1) = dtde(1,2)
dtde(3,1) = dtde(1,3)
dtde(3,2) = dtde(2,3)

```

D.2 Il metodo del “Total Lagrangian Formulation”

Come nel caso precedente si esamina per punti l’algoritmo in questione. Con questo metodo la configurazione di riferimento è quella relativa al tempo 0 (configurazione iniziale).

Per ogni passo di carico le operazioni svolte sono le seguenti

1. calcolo del tensore \mathbf{C} ;
2. calcolo del tensore \mathbf{C}^{-1} ;
3. definizione delle componenti del tensore \mathbf{S} per il modello studiato;
4. calcolo degli sforzi di Cauchy con l’operazione di push-forward;
5. definizione del tensore di elasticità spaziale nel riferimento generico per il modello studiato.

Si rimanda al Capitolo 5 circa le altre formule analitiche relative ai vari punti trattati.

Nelle pagine successive è raccolto integralmente il listato FORTRAN sviluppato per l’implementazione di tale metodo.

```

C*****
C      -----
C      COMPRESSIBLE NEO - HOOKEAN STORED ENERGY FUNCTIONS
C      -----
C
C      Version 1 (dv = 1)
C
C      PSI = 0.5*mu*(I_c - 3) - mu*lnJ + 0.5*lambda*(J - 1)^2
C
C      Version 2 (dv = 2)
C
C      PSI = 0.5*mu*(I_c - 3) - mu*lnJ + 0.5*lambda*(lnJ)^2
C
C      Version 3 (dv = 3)
C
C      PSI = 0.5*mu*(I_c - 3) - mu*lnJ
C              + 0.25*lambda*(J^2 - 1 - 2*lnJ)
C
C      where :
C
C      mu      - Constant of Lamé'  $E/[2*(1+\nu)]$ 
C      lambda  - Constant of Lamé'  $(\nu*E)/[(1+\nu)*(1-2*\nu)]$ 
C      nu      - Modulus of Poisson
C      E       - Modulus of Young
C      I_c     - First invariant of right Cauchy-Green
C              strain tensor
C      J       - Square root of third invariant of the right
C              Cauchy-Green strain tensor
C
C      INPUT VARIABLES :
C
C      f(3,3)  - Deformation gradient (passed by FEAP)
C
C      VARIABLES :
C
C      detf    - Determinant of f
C      ct(6)   - Right Cauchy-Green strain tensor
C      dect    - Determinant of the Right Cauchy-Green
C              strain tensor
C      cti(6)  - Inverse of the right Cauchy-Green
C              strain tensor
C      st(6)   - Second Piola-Kirchhoff stress tensor

```

```

c      fs(3,3) - Matrix product between "f" and "st"
c
c MATERIAL CONSTANTS :
c
c      dv      - Number of version of the Neo-Hookean model
c      dsa     - Constant of Lam
c      dsb     - Constant of Lam
c
c OUTPUT VARIABLES :
c
c      sig(6)  - Cauchy stress tensor
c      dd(6,6) - Spatial elastic moduli
c
c Tensors ct, cti, st, sig are defined as follows
c
c      | ct(1)  ct(4)  ct(6) |      | cti(1)  cti(4)  cti(6) |
c      ct=| ct(4)  ct(2)  ct(5) |;  st=| cti(4)  cti(2)  cti(5) |
c      | ct(6)  ct(5)  ct(3) |      | cti(6)  cti(5)  cti(3) |
c
c
c      | st(1)  st(4)  st(6) |      | sig(1)  sig(4)  sig(6) |
c      st=| st(4)  st(2)  st(5) |;  sig=| sig(4)  sig(2)  sig(5) |
c      | st(6)  st(5)  st(3) |      | sig(6)  sig(5)  sig(3) |
c
c*****
c
c      subroutine protesi(f, sig, dd)
c
c      real*8  dsa, dsb, dv
c      real*8  d(*), f(3,3), sig(*), dd(6,6)
c      real*8  detf, ct(6), detct, cti(6), st(6), fs(3,3)
c
c      integer i, j
c
c=====
c.... Reading material parameters
c=====
c
c      dv = d(1)
c      dsa = d(2)
c      dsb = d(3)

```

c.... Determinant of F

```

detf = f(1,1)*(f(2,2)*f(3,3) - f(3,2)*f(2,3)) -
&      f(1,2)*(f(2,1)*f(3,3) - f(3,1)*f(2,3)) +
&      f(1,3)*(f(2,1)*f(3,2) - f(3,1)*f(2,2))

```

c.... Right Cauchy-Green strain tensor (C = Ft*F)

```

ct(1) = f(1,1)*f(1,1) + f(2,1)*f(2,1) + f(3,1)*f(3,1)
ct(2) = f(1,2)*f(1,2) + f(2,2)*f(2,2) + f(3,2)*f(3,2)
ct(3) = f(1,3)*f(1,3) + f(2,3)*f(2,3) + f(3,3)*f(3,3)
ct(4) = f(1,1)*f(1,2) + f(2,1)*f(2,2) + f(3,1)*f(3,2)
ct(5) = f(1,2)*f(1,3) + f(2,2)*f(2,3) + f(3,2)*f(3,3)
ct(6) = f(1,1)*f(1,3) + f(2,1)*f(2,3) + f(3,1)*f(3,3)

```

c.... Determinant of the right Cauchy-Green strain tensor

```

detct = ct(1)*(ct(2)*ct(3) - ct(5)*ct(5)) -
&      ct(4)*(ct(4)*ct(3) - ct(6)*ct(5)) +
&      ct(6)*(ct(4)*ct(5) - ct(6)*ct(2))

```

c.... Inverse of the right Cauchy-Green strain tensor

```

cti(1) = (ct(2)*ct(3) - ct(5)*ct(5))/detct
cti(2) = (ct(1)*ct(3) - ct(6)*ct(6))/detct
cti(3) = (ct(1)*ct(2) - ct(4)*ct(4))/detct
cti(4) = (ct(5)*ct(6) - ct(4)*ct(3))/detct
cti(5) = (ct(4)*ct(6) - ct(1)*ct(5))/detct
cti(6) = (ct(4)*ct(5) - ct(2)*ct(6))/detct

```

```

if (dv.eq.1) then

```

c.... Second Piola-Kirchhoff stress tensor for version 1

```

st(1) = dsa*(1 - cti(1)) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(1)
st(2) = dsa*(1 - cti(2)) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(2)
st(3) = dsa*(1 - cti(3)) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(3)
st(4) = - dsa*cti(4) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(4)
st(5) = - dsa*cti(5) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(5)
st(6) = - dsa*cti(6) + dsb*detf*(detf - 1)*cti(6)

```

```

else if (dv.eq.2) then

```

c.... Second Piola-Kirchhoff stress tensor for version 2

```

st(1) = dsa*(1 - cti(1)) + dsb*log(detf)*cti(1)
st(2) = dsa*(1 - cti(2)) + dsb*log(detf)*cti(2)
st(3) = dsa*(1 - cti(3)) + dsb*log(detf)*cti(3)
st(4) = - dsa*cti(4) + dsb*log(detf)*cti(4)
st(5) = - dsa*cti(5) + dsb*log(detf)*cti(5)
st(6) = - dsa*cti(6) + dsb*log(detf)*cti(6)

```

```

else if (dv.eq.3) then

```

c.... Second Piola-Kirchhoff stress tensor for version 3

```

st(1) = dsa*(1 - cti(1)) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(1)
st(2) = dsa*(1 - cti(2)) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(2)
st(3) = dsa*(1 - cti(3)) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(3)
st(4) = - dsa*cti(4) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(4)
st(5) = - dsa*cti(5) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(5)
st(6) = - dsa*cti(6) + 0.5*dsb*(detf*detf - 1)*cti(6)

```

```

end if

```

c.... Matrix product $F_s = F*S$

```

do i = 1,3
  fs(i,1) = f(i,1)*st(1) + f(i,2)*st(4) + f(i,3)*st(6)
  fs(i,2) = f(i,1)*st(4) + f(i,2)*st(2) + f(i,3)*st(5)
  fs(i,3) = f(i,1)*st(6) + f(i,2)*st(5) + f(i,3)*st(3)
end do

```

c=====

c.... Cauchy stresses: push forward transformation

c=====

```

sig(1) = fs(1,1)*f(1,1) + fs(1,2)*f(1,2) + fs(1,3)*f(1,3)
sig(2) = fs(2,1)*f(2,1) + fs(2,2)*f(2,2) + fs(2,3)*f(2,3)
sig(3) = fs(3,1)*f(3,1) + fs(3,2)*f(3,2) + fs(3,3)*f(3,3)
sig(4) = fs(1,1)*f(2,1) + fs(1,2)*f(2,2) + fs(1,3)*f(2,3)
sig(5) = fs(2,1)*f(3,1) + fs(2,2)*f(3,2) + fs(2,3)*f(3,3)
sig(6) = fs(1,1)*f(3,1) + fs(1,2)*f(3,2) + fs(1,3)*f(3,3)

```

```

do i = 1, 6
  sig(i) = sig(i)/detf
end do

```

```

=====
c      Spatial Elastic Moduli
=====

c.... Initialize of dd(6,6)

      do i = 1, 6
        do j = 1, 6
          dd(i,j) = 0.0d0
        end do ! i
      end do ! j

      if (dv.eq.1) then

c.... Spatial elastic moduli for version 1

c.... Upper 3x3 block of dd(6,6) [symmetric block]

      dd(1,1) = dsb*(2*detf - 1)
&          + 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf
      dd(2,2) = dsb*(2*detf - 1)
&          + 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf
      dd(3,3) = dsb*(2*detf - 1)
&          + 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf
      dd(1,2) = dsb*(2*detf - 1)
      dd(1,3) = dsb*(2*detf - 1)
      dd(2,3) = dsb*(2*detf - 1)
      dd(2,1) = dd(1,2)
      dd(3,1) = dd(1,3)
      dd(3,2) = dd(2,3)

c.... Lower 3x3 block of dd(6,6) [diagonal block]

      dd(4,4) = 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf
      dd(5,5) = 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf
      dd(6,6) = 2*(dsa - dsb*(detf*detf - detf))/detf

      else if (dv.eq.2) then

c.... Spatial elastic moduli for version 2

c.... Upper 3x3 block of dd(6,6) [symmetric block]

```

```

dd(1,1) = (dsb/detf) + 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf
dd(2,2) = (dsb/detf) + 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf
dd(3,3) = (dsb/detf) + 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf
dd(1,2) = (dsb/detf)
dd(1,3) = (dsb/detf)
dd(2,3) = (dsb/detf)
dd(2,1) = dd(1,2)
dd(3,1) = dd(1,3)
dd(3,2) = dd(2,3)

```

c.... Lower 3x3 block of dd(6,6) [diagonal block]

```

dd(4,4) = 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf
dd(5,5) = 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf
dd(6,6) = 2*(dsa - dsb*log(detf))/detf

```

```

else if (dv.eq.3) then

```

c.... Spatial elastic moduli for version 3

c.... Upper 3x3 block of dd(6,6) [symmetric block]

```

dd(1,1) = dsb*detf +
&          2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf
dd(2,2) = dsb*detf +
&          2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf
dd(3,3) = dsb*detf +
&          2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf
dd(1,2) = dsb*detf
dd(1,3) = dsb*detf
dd(2,3) = dsb*detf
dd(2,1) = dd(1,2)
dd(3,1) = dd(1,3)
dd(3,2) = dd(2,3)

```

c.... Lower 3x3 block of dd(6,6) [diagonal block]

```

dd(4,4) = 2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf
dd(5,5) = 2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf
dd(6,6) = 2*(dsa - 0.5*dsb*(detf*detf - 1))/detf

```

```

end if

```

```

end

```

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro di Tesi ci si è proposti di studiare una delle più efficaci ed interessanti tecniche di chirurgia non invasiva: la tecnica PTCA.

Dopo un'ampia disussione chimico-medica e biomeccanica sul problema dell'aterosclerosi e sulle possibili tecniche di trattamento, è stato condotto uno studio sulle teorie di analisi strutturale in regime di grandi deformazioni, propeutico e necessario alle simulazioni numeriche vere e proprie.

Dopo aver integralmente sviluppato e implementato 3 differenti versioni del legame costitutivo di Neo-Hookean, si sono condotte le analisi su una protesi commerciale a palloncino, simulandone sia la prova di gonfiaggio, sia la prova combinata di gonfiaggio e flessione.

Per tali tests, che ricalcano esattamente le normali condizioni di utilizzo della protesi, si sono trovati risultati interessanti dando anche spazio ad un confronto tra le varie formulazioni programmate.

Per quanto concerne lo studio relativo ad un tratto di arteria stenotica si sono volute modellizzare separatamente sia l'arteria che la placca.

Si è infatti affiancato al funzionale di Mooney-Rivlin, sviluppato per l'arteria, un legame costitutivo elasto-plastico per lo studio del fenomeno del danneggiamento della placca aterosclerotica, sottoposta alla pressione della protesi.

L'esito delle simulazioni, è stato soddisfacente, tenendo anche conto che non si sono reperite in letteratura informazioni relative a questo nuovo tipo di approccio computazionale.

È sembrato opportuno trattare anche una piccola parte sui modelli pressione-diametro (relativi ovviamente all'arteria), indicati per analisi preliminari di tipo qualitativo.

Dopo una taratura di un modello esistente (Hayashi) per capire le problematiche connesse, se ne è proposto uno alternativo, che si è dimostrato molto efficace, anche per un ampio intervallo di pressioni fisiologiche.

Il maggior sviluppo in questo settore è senz'altro legato allo studio di legami costitutivi sempre più accurati.

L'idea principale sembrerebbe quella indirizzata verso il modello del "balanced angle-ply reinforcement, spiegato nell'Appendice C, che permette di descrivere con maggior precisione le vere caratteristiche meccaniche dei materiali biologici.

Tale tecnica, inizialmente studiata per l'analisi strutturale di materiali a fi-

bre, appare particolarmente indicata anche per lo studio delle arterie che per loro natura sono costituite da elementi microscopici intrecciati. Sfruttando le nozioni di biomeccanica riportate e seguendo le indicazioni sulle possibili direzioni di uno studio futuro, si potrebbe senz'altro portare reali benefici sia nel campo della medicina, sia nello stesso campo ingegneristico.

Infine, una stretta collaborazione con una équipe medica sarebbe auspicabile, al fine di eseguire prove sperimentali sempre più innovative, per comprendere meglio la geometria e la composizione sia del tessuto arterioso sia della placca aterosclerotica.

Desidero ringraziare sentitamente il Prof. Ferdinando Auricchio per la sua infinita disponibilità.

La sua competenza e i suoi suggerimenti mi hanno permesso di affrontare sempre con entusiasmo questa importante esperienza di studio.

Saluto affettuosamente tutti gli amici e i compagni di corso, con in quali ho condiviso questi bellissimi anni.

Bibliografia

- [1] F. Auricchio and R.L. Taylor. A return-map algorithm for general associative elasto-plastic materials in large deformations regime. *International Journal of Plasticity*, 15:1359–1378, 1999.
- [2] G.C. Balboni. *Anatomia Umana*. Edizioni Ermes s.r.l., Milano, 1996.
- [3] J. Bonet and R.D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge Univesity Press, 1997.
- [4] C.J. Choung and Y.C. Fung. Compressibility and constitutive equation for arterial wall in radial compression experiments. *Journal of Biomechanics*, 17:35–40, 1984.
- [5] H. Demiray, H.W. Weizsacker, K. Pascal, and H.A. Erbay. A stress-strain relation for a rat abdominal aorta. *Journal of Biomechanics*, 21:369–374, 1988.
- [6] N. Dioguardi and G.P. Sanna. *Moderni aspetti di semiotica medica*. Societa Editrice Universo, Roma, 1998.
- [7] R. Dionigi. *Chirurgia*. Masson, Milano, 1999.
- [8] R. Fumero, F. Inzoli, and R. Pietrabissa. *Bioingegneria vascolare*. Patron Editore, Bologna, 1998.
- [9] K. Hayashi. Experimental approaches on measuring the mechanical properties and constitutive laws of arterial wall. *Journal of Biomechanical Engineering*, 121:259–262, 1999.
- [10] K. Hayashi and Y. Imai. Tensile property of atheromatous plaque and an analysis of stress in atherosclerotic wall. *Journal of Biomechanics*, 6:573–579, 1997.
- [11] K.D. Hjelmastad. *Fundamentals of structural mechanics*. Prentice Hall, 1997.

- [12] G.A. Holzapfel, R. Eberlein, P. Wriggers, and H.W. Weizsacker. Large strain analysis of soft biological membranes: formulation and finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 132:45–61, 1996.
- [13] G.A. Holzapfel, R. Eberlein, P. Wriggers, and H.W. Weizsacker. A new axisymmetrical membrane element for anisotropic, finite strain analysis of arteries. *Communications in numerical methods in engineering*, 12:507–517, 1996.
- [14] G.A. Holzapfel and H.W. Weizsacker. Biomechanical behavior of arterial wall and its numerical characterization. *Computer in Biology and Medicine*, 28:377–392, 1998.
- [15] J.D. Humphrey. An evaluation of pseudoelastic descriptors used in arterial mechanics. *Journal of Biomechanical Engineering*, 115:481–488, 1993.
- [16] J.D. Humphrey, R.K. Strumpt, and F.C.P. Yin. Determination of a constitutive relation for passive myocardium: I - a new functional form. *Journal of Biomechanical Engineering*, 112:333–339, 1990.
- [17] M. Kaliske. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 185:225–243, 2000.
- [18] R.W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [19] R. Pietrabissa. *Biomateriali per protesi ed organi artificiali*. Patron, Bologna, 1996.
- [20] G. Rindi and E. Manni. *Fisiologia Umana*. Utet, Torino, 1996.
- [21] C. Roger, D.Y. Tseng, J.C. Squire, and E.R. Edelman. Balloon-artery interactions during stent placement. a finite element analysis approach to pressure, compliance and stent. *Circulation Research*, 84:378–383, 1999.
- [22] J.C. Simo and K.S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 46:201–215, 1984.
- [23] A.J.M. Spencer. Modelling of finite deformations of anisotropic materials. *Large deformations of solids: physical basis and mathematical modelling*, 1:41–52, 1982.
- [24] K. Takamizawa and K. Hayashi. Strain energy density function and uniform strain analysis of stress in atherosclerotic wall. *Journal of Biomechanics*, 20:7–17, 1987.

- [25] R.L. Taylor. *FEAP - A Finite Element Analysis Program, Example Manual*. University of California at Berkeley, <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt>, 1998.
- [26] R.L. Taylor. *FEAP - A Finite Element Analysis Program, Programmer Manual*. University of California at Berkeley, <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt>, 1998.
- [27] R.L. Taylor. *FEAP - A Finite Element Analysis Program, Theory Manual*. University of California at Berkeley, <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt>, 1998.
- [28] R.L. Taylor. *FEAP - A Finite Element Analysis Program, User Manual*. University of California at Berkeley, <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt>, 1998.
- [29] W.W. von Maltzahn, R.G. Warriyar, and W.F. Keitzer. Experimental measurement of elastic properties of media and adventitia of bovine carotid arteries. *Journal of Biomechanics*, 11:839–847, 1984.
- [30] H.W. Weizsacker, H. Lambert, and K. Pascale. Analysis of the passive mechanical properties of rat carotid arteries. *Journal of Biomechanics*, 16:703–715, 1983.
- [31] H.W. Weizsacker and J.G. Pinto. Isotropy and anisotropy of the arterial wall. *Journal of Biomechanics*, 21:477–487, 1988.
- [32] K.H. Wesseling, G.J. Langewouters, and W.J.A. Goedhard. The static elastic properties of 45 human thoracic and 20 abdominal aortas in vitro and the parameters of a new model. *Journal of Biomechanics*, 17:425–435, 1984.
- [33] P. Wriggers and S. Reese. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 135:201–209, 1996.