

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI MECCANICA STRUTTURALE

SVILUPPO DI ELEMENTI FINITI
CON NONLINEARITÀ
MATERIALE E GEOMETRICA
PER TRAVI IN CALCESTRUZZO
ARMATO

Tesi di laurea di
GABRIELE ATTANASI

Relatori:
Chiar.mo Prof. FERDINANDO AURICCHIO
Chiar.mo Prof. GIAN MICHELE CALVI

Anno Accademico 2004-2005

*E benché sia la via molto lontana
e sia scagliosa e di grande asprezza
io la farò parer soave e piana.*

Federico Frezzi, Il Quadriregio, Foligno 1403

Indice

Indice	iii
Sommario	1
Capitolo 1. I modelli per il problema di trave in piccoli spostamenti	3
1.1. Le definizioni geometriche	3
1.2. Il modello alla Eulero - Bernoulli	4
1.2.1. Il problema bidimensionale	4
1.2.2. La formulazione agli elementi finiti	10
1.2.3. Il problema tridimensionale	17
1.2.4. La formulazione agli elementi finiti	19
1.3. Il modello alla Timoshenko	24
1.3.1. Il problema bidimensionale	24
1.3.2. La formulazione agli elementi finiti	26
1.3.3. Il problema tridimensionale	31
1.3.4. La formulazione agli elementi finiti	33
1.4. Gli elementi a fibre	38
1.4.1. Le caratteristiche generali degli elementi a fibre	38
1.4.2. L'implementazione di elementi a fibre	39
Capitolo 2. I modelli per il problema di trave in grandi spostamenti	43
2.1. La valutazione dei grandi spostamenti	43
2.1.1. Le relazioni cinematiche	43
2.2. Il problema della trave in grandi spostamenti	45
2.2.1. La formulazione del problema in spostamenti e rotazioni finite	45
2.2.2. La formulazione del problema in spostamenti finiti e rotazioni piccole	53
2.3. La verifica dell'elemento elastico in grandi spostamenti	56
2.3.1. Le prove per spostamenti piccoli	57
2.3.2. Le prove per spostamenti molto grandi	60
2.3.3. Il confronto con gli elementi elastici in grandi spostamenti di SeismoStruct	64
Capitolo 3. I legami costitutivi	67
3.1. I legami costitutivi dei materiali	67

INDICE

3.2. Il modello costitutivo del calcestruzzo	68
3.2.1. La schematizzazione del comportamento del calcestruzzo su una sezione	70
3.2.2. Il comportamento del calcestruzzo a compressione	71
3.2.3. Il comportamento del calcestruzzo a trazione	85
3.2.4. Il modello del calcestruzzo implementato	86
3.3. Il modello costitutivo dell'acciaio	100
3.3.1. I principali modelli proposti	101
3.3.2. Il modello dell'acciaio implementato	107
Capitolo 4. Le prove numeriche di verifica dei modelli	115
4.1. La verifica dell'elemento omogeneo in acciaio	119
4.1.1. Le caratteristiche del materiale	119
4.1.2. Le prove eseguite	119
4.1.3. I risultati ottenuti	119
4.2. La verifica dell'elemento omogeneo in calcestruzzo	129
4.2.1. Le caratteristiche del materiale	129
4.2.2. Le prove eseguite	129
4.2.3. I risultati ottenuti	130
4.3. La verifica dell'elemento in calcestruzzo armato	146
4.3.1. Le caratteristiche geometriche	146
4.3.2. Le caratteristiche dei materiali	146
4.3.3. Le prove eseguite	147
4.3.4. I risultati ottenuti	148
Capitolo 5. L'analisi strutturale pushover	163
5.1. La valutazione del comportamento non lineare degli edifici	163
5.2. I metodi di analisi non lineare	164
5.2.1. L'utilizzo del fattore di struttura	164
5.2.2. La valutazione diretta della non linearità strutturale	167
5.3. L'analisi pushover	167
5.3.1. L'analisi pushover classica	167
5.3.2. Le basi teoriche dell'analisi pushover	168
5.3.3. L'analogia con l'analisi dinamica non lineare	171
5.3.4. L'analisi pushover in controllo di forza o di spostamento	174
5.3.5. L'analisi pushover in controllo di risposta	175
5.3.6. Le evoluzioni proposte per l'analisi statica non lineare	176
5.3.7. L'implementazione dell'analisi pushover	179
5.3.8. L'utilizzo dell'analisi pushover	179
Capitolo 6. Le prove di analisi pushover	183
6.1. Le prove dell'elemento in piccoli spostamenti	183
6.1.1. La prova su un telaio ad una campata e un piano	184
6.1.2. La prova su un telaio ad una campata e tre piani	189

6.1.3. La prova di applicazione di due schemi di carico differenti su un telaio a tre piani	194
6.2. Le prove dell'elemento in grandi spostamenti	199
6.2.1. La prova su una mensola	199
6.2.2. La prova su un telaio ad un piano e una campata	205
Conclusioni	209
Ringraziamenti	211
Bibliografia	213

Sommario

Per molto tempo in ambito professionale si è ritenuto che un approccio lineare fosse sufficiente ed esaustivo per affrontare le problematiche legate alla progettazione strutturale. Oggi però si è diffusa la consapevolezza che in molti casi non può essere adottata esclusivamente una formulazione elastica.

Un ruolo importante in questo senso è stato svolto dalla sensibilizzazione verso le tematiche della progettazione in zona sismica, portate in primo piano sia dalle esperienze di eventi occorsi negli anni recenti che dalla emanazione di apposite norme. Infatti, la valutazione delle azioni sismiche in funzione dei differenti stati limite e quindi dei rispettivi tempi di ritorno degli eventi, induce a considerare il comportamento strutturale alla luce dei fenomeni non lineari. In teoria è possibile ricorrere in tutti i casi ad approcci elastici, ma questo solo accettando notevoli spese per la realizzazione di edifici caratterizzati da una elevata resistenza. Pertanto si ritiene più conveniente progettare le strutture basandosi sulla duttilità e sulla capacità prestazionale.

Per far questo non è però possibile prescindere dalla valutazione delle caratteristiche di non linearità che tipicamente governano il comportamento dei materiali e delle strutture e che può essere di vario tipo.

La non linearità è innanzi tutto caratteristica dei materiali, perché i legami costitutivi reali dei materiali tipici utilizzati nell'edilizia sono ben lontani dai modelli elastici utilizzati classicamente in fase di progettazione. L'approssimazione lineare, comunemente adottata e valida per verifiche nel caso di piccole deformazioni, è però inaccettabile nel momento in cui si spinga l'analisi fino alla rottura del materiale (come nel caso sismico).

Un secondo aspetto è quello della non linearità geometrica degli elementi considerati, tanto più importante quanto più si vuole spingere l'analisi strutturale per cogliere la capacità ultima. Nelle formulazioni in piccoli spostamenti infatti la valutazione delle equazioni di equilibrio è compiuta nella configurazione indeformata della struttura. I carichi sismici possono essere però di tale entità da procurare delle deformazioni notevoli e conseguentemente potrebbe essere causa di gravi errori fare riferimento soltanto alla configurazione indeformata. Si rende allora necessario considerare la valutazione dell'equilibrio nella configurazione deformata della struttura e per far ciò è necessario formulare il problema nell'ipotesi di spostamenti finiti.

In tale ambito si colloca questo lavoro, che è consistito nello studio delle nonlinearità materiale e geometrica partendo dalle formulazioni di base dei problemi di campo, fino a giungere allo sviluppo di elementi finiti.

Il percorso compiuto per giungere a tale risultato è stato contrassegnato dall'analisi, dalla implementazione e dalla verifica dei seguenti modelli:

- trave alla Eulero-Bernoulli bidimensionale con legame elastico
- trave alla Eulero-Bernoulli tridimensionale con legame elastico
- trave alla Eulero-Bernoulli bidimensionale a fibre con legame elastico
- trave alla Eulero-Bernoulli bidimensionale a fibre con legame elastoplastico
- trave alla Eulero-Bernoulli tridimensionale a fibre con legame elastico
- trave alla Eulero-Bernoulli tridimensionale a fibre con legame elastoplastico
- trave alla Timoshenko bidimensionale a fibre con legame elastico
- trave alla Timoshenko bidimensionale a fibre con legame elastoplastico
- trave alla Timoshenko tridimensionale a fibre con legame elastico
- trave alla Timoshenko tridimensionale a fibre con legame elastoplastico
- trave alla Eulero-Bernoulli tridimensionale a fibre con legami del materiale acciaio e calcestruzzo
- trave in spostamenti finiti e rotazioni infinitesime bidimensionale a fibre con legame elastico
- trave in spostamenti finiti e rotazioni infinitesime bidimensionale a fibre con legami del materiale acciaio e calcestruzzo

Gli elementi sviluppati sono stati implementati in *FEAPpv*, un programma agli elementi finiti sviluppato per usi didattici e di ricerca da Robert L. Taylor docente presso la University of California at Berkeley.

I risultati ottenuti sono stati verificati ricorrendo a altri programmi di analisi strutturale nonlineare, soprattutto *SeismoStruct*, che è un programma agli elementi finiti a fibre in grado di analizzare strutture in grandi spostamenti e tenendo conto della nonlinearità del materiale.

CAPITOLO 1

I modelli per il problema di trave in piccoli spostamenti

1.1. Le definizioni geometriche

Con il termine trave si intende un corpo tridimensionale per il quale due dimensioni sono trascurabili rispetto alla terza. Considerando di avere la sezione di trave posta nel piano yz e supponendo di traslarla in direzione x per descrivere il corpo, è possibile definire l'asse della trave come il luogo dei baricentri delle sezioni. Gli assi x , y e z sono assi locali della trave, ovvero

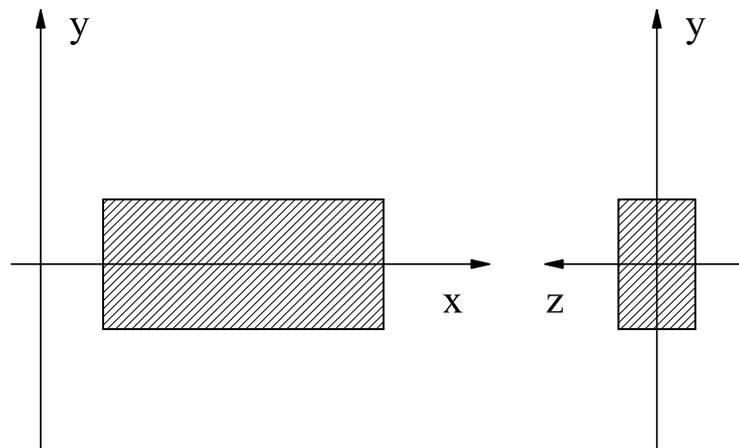


Figura 1.1: modello di trave tridimensionale e sistema di riferimento adottato.

relativi alla trave specifica oggetto di indagine; essi si distinguono dagli assi

del riferimento globale X, Y e Z ed il passaggio da un sistema di riferimento all'altro avviene attraverso un operatore matriciale di cambio di coordinate. Si definiscono u, v e w le componenti di spostamento rispettivamente nelle direzioni x, y e z , mentre ϑ_x, ϑ_y e ϑ_z le componenti di rotazione intorno agli assi x, y e z .

1.2. Il modello alla Eulero - Bernoulli

La formulazione del problema di trave alla Eulero-Bernoulli è caratterizzato dalla assunzione che le sezioni piane perpendicolari all'asse della trave rimangano piane e perpendicolari all'asse durante la deformazione (figura 1.2).

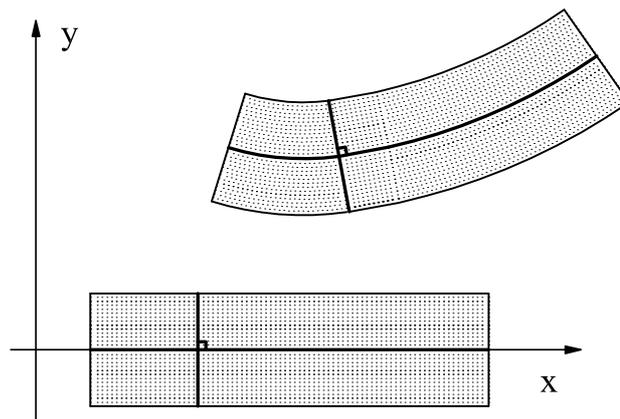


Figura 1.2: configurazione indeformata e deformata di una generica trave nel modello all'Eulero-Bernoulli.

1.2.1. Il problema bidimensionale. Assumendo che il piano xy sia di simmetria totale, sia rispetto alla geometria che rispetto ai carichi, è possibile limitare lo studio del problema al solo piano di simmetria.

1.2.1.1. *Le relazioni cinematiche.* Si ipotizza che il campo degli spostamenti di un generico punto sia funzione sia della coordinata preferenziale (x), che della posizione rispetto l'asse di simmetria (y); le singole componenti di spostamento, invece, si assumono funzione soltanto della coordinata preferenziale:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{s}(x, y) \\ u &= u(x) \\ v &= v(x) \\ \vartheta_z &= \vartheta_z(x) \end{aligned}$$

Valutando un generico campo di spostamenti (figura 1.3), è possibile porre:

$$(1.2) \quad \begin{cases} s_x(x, y) = u(x) - y\vartheta_z(x) \\ s_y(x, y) = v(x) \end{cases}$$

per la quale si ha che le sezioni rimangono piane, mentre non si sta richiedendo l'ortogonalità tra le sezioni e l'asse. Imporre anche questa condizione significa imporre che sia nulla la deformazione di taglio:

$$(1.3) \quad \gamma = v' - \vartheta_z = 0$$

Dato che le componenti della deformazione sono date dalle relazioni:

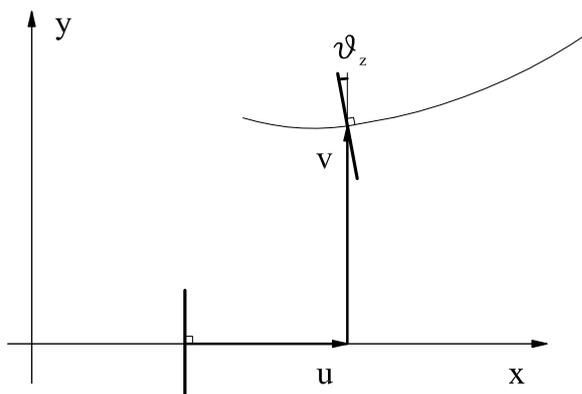


Figura 1.3: generico campo di spostamento.

$$(1.4) \quad \begin{cases} \varepsilon = \frac{du}{dx} \\ \gamma = v' - \vartheta_z \\ \chi = \frac{d\vartheta_z}{dx} \end{cases}$$

le uniche componenti della deformazione nel caso piano possono essere espresse come:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{ds_x}{dx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d\vartheta_z}{dx} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds_y}{dx} + \frac{ds_x}{dy} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \vartheta_z \right) = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon - y\chi \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases}$$

1.2.1.2. *Le relazioni statiche.* Assumendo che ci siano soltanto due componenti non nulle di tensione, ovvero $\sigma_{xx} \neq 0$ e $\sigma_{yx} \neq 0$, si hanno soltanto tre tipi di azioni agenti, ovvero (figura 1.4):

- azione assiale
- momento flettente attorno all'asse z
- azione tagliante in direzione y

e le formule che permettono di definirle sono relazioni di integrazione delle tensioni sulla generica sezione:

$$(1.7) \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA \\ M = - \int_A y \sigma_{xx} dA \\ V = \int_A \sigma_{yx} dA \end{cases}$$

Considerando di avere dei carichi distribuiti agenti assialmente (p) e trasversalmente (q), le equazioni di equilibrio del problema sono:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{dN}{dx} + p = 0 \\ \frac{dM_z}{dx} - V_y = 0 \\ \frac{dV_y}{dx} - q = 0 \end{cases}$$

1.2.1.3. *Le relazioni costitutive.* Le relazioni di legame tra le componenti di sforzo e di deformazione considerate nel caso bidimensionale perfettamente elastico sono:

$$(1.9) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(\varepsilon - y\chi) \\ \sigma_{yx} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma \end{cases}$$

che se sostituite nelle relazioni della (1.7) permettono di ricavare le relazioni costitutive locali della trave:

$$(1.10) \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA \Rightarrow N = EA\varepsilon \\ M = - \int_A y\sigma_{xx} dA \Rightarrow M = -EI_z\chi \\ V = \int_A \sigma_{yx} dA \Rightarrow V_y = \kappa GA\gamma \end{cases}$$

nella quale il κ è un fattore correttivo per il taglio che nasce da una inconsistenza teorica del modo di procedere. Da un lato infatti si ipotizza di avere una superficie laterale scarica, e quindi $\sigma_{xy} = 0$, ma dall'altro si pone una

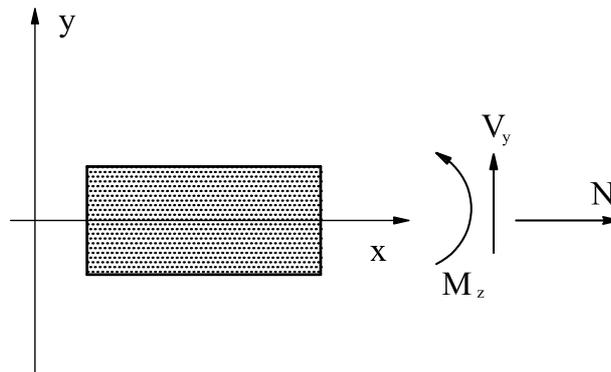


Figura 1.4: sollecitazioni agenti in una generica sezione di trave.

deformazione a taglio costante nella sezione: questo, per la relazione (1.9), genera una incongruenza sanabile attraverso l'impiego di tale fattore.

1.2.1.4. *L'equazione della linea elastica.* Utilizzando un approccio alla Eulero-Bernoulli fissando le ipotesi che:

- si conservino le sezioni piane
- si conservino le sezioni normali all'asse della trave e pertanto sia nulla la deformazione a taglio
- l'azione assiale sia disaccoppiata dalle altre

si ha che, come visto dalla (1.3) e dalle relazioni seguenti:

$$(1.11) \quad \gamma = 0 \Rightarrow \vartheta_z = \frac{dv}{dx}$$

inoltre:

$$(1.12) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d^2 M}{dx^2} - q = 0 \\ M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \end{array} \right\} \Rightarrow EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q = 0$$

1.2.1.5. *La formulazione diretta del problema della trave.* La formulazione della linea elastica permette di trovare la rigidezza di un elemento trave dato, intendendo per *rigidezza* il sistema di forze prodotte da uno spostamento unitario imposto. Dato un vettore \hat{v} di spostamenti nodali definito come:

$$(1.13) \quad \hat{v} = \{ \hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{\vartheta}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \hat{\vartheta}_2 \}^T$$

ed un vettore \mathbf{F} delle reazioni nodali corrispondenti (figura 1.5):

$$(1.14) \quad \mathbf{F} = \{ N_1, V_1, M_1, N_2, V_2, M_2 \}^T$$

è possibile costruire la relazione tra \hat{v} e \mathbf{F} definendo l'operatore \mathbf{K}^e , che è la matrice di rigidezza elastica della trave, tale da soddisfare la relazione:

$$(1.15) \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}^e \hat{v}$$

1.2.1.6. *La formulazione del problema della trave in forma residuale.* Per approccio residuale al problema di campo si intende quella formulazione che si basa sulla scrittura dell'equazione di equilibrio:

$$(1.16) \quad \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int} = \mathbf{0}$$

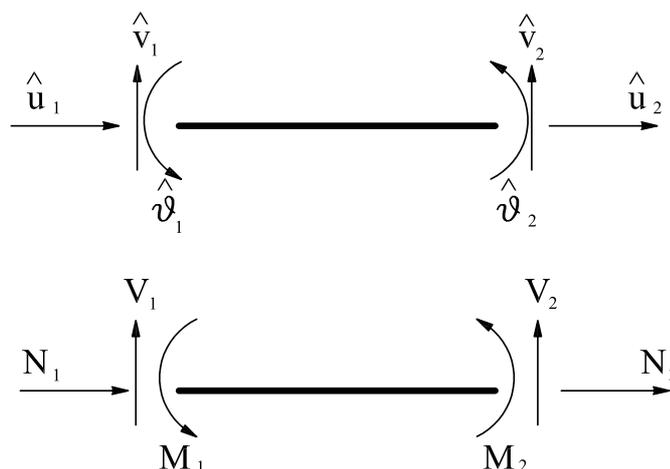


Figura 1.5: rappresentazione dei gradi di libertà nodali e delle reazioni nodali.

nella quale \mathbf{F}^{ext} è il vettore delle forze esterne, mentre \mathbf{F}^{int} è il vettore delle forze interne. L'equazione (1.16) definisce il residuo in funzione del vettore \mathbf{u} degli spostamenti nodali del sistema e l'obiettivo per la risoluzione è di minimizzare il residuo fino a farlo diventare in modulo minore della tolleranza ammissibile:

$$(1.17) \quad \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int} \leq \varepsilon$$

Il vettore \mathbf{u} soluzione è quello in funzione del quale il residuo soddisfa la condizione (1.17).

La scrittura di un problema in forma residuale ha senso ed è utile nel caso in cui si valutino relazioni non lineari, per le quali non è sempre possibile trovare la soluzione con un solo passaggio di inversione algebrica ma è necessario procedere per via iterativa.

Un possibile approccio che permette di procedere iterativamente fino a trovare la soluzione è quello di scrivere una approssimazione del residuo al

passo t_{n+1} utilizzando il metodo di Newton:

$$(1.18) \quad \mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{R}_n(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{R}_n(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u}$$

e arrivare a convergenza in corrispondenza della condizione:

$$(1.19) \quad \mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{R}_n(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{R}_n(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} \leq \varepsilon$$

1.2.1.7. *L'ambito statico e l'ambito dinamico.* La differenza tra la valutazione del problema in ambito statico ed in ambito dinamico è data dalla necessità di considerare o meno le forze d'inerzia nel contributo delle forze interne. Supponendo di proporre la relazione nel caso del continuo statico nella forma scalare del lavoro virtuale, si ha:

$$(1.20) \quad \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega}_{\delta L_e} - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla^S \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega}_{\delta L_i} = \mathbf{0} \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

nella quale \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti del sistema, \mathbf{b} è il vettore della forze esterne e $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore delle tensioni agenti.

Nel caso invece del continuo dinamico è necessario aggiungere il contributo delle forze d'inerzia, che porta a riscrivere l'equazione come:

$$(1.21) \quad \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{a} \, d\Omega}_{\delta L_e} - \underbrace{\int_{\Omega} (\nabla^S \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega}_{\delta L_i} = \mathbf{0} \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

essendo \mathbf{a} il vettore delle accelerazioni.

1.2.2. La formulazione agli elementi finiti. Il problema della trave comunemente descritto è un problema differenziale, retto nella formulazione dell'Eulero-Bernoulli da una equazione di quarto grado.

La filosofia di azione che è dietro al metodo agli elementi finiti è pensare di integrare tali relazioni differenziali e poi trasformarle in una forma algebrica introducendo un campo di approssimazioni opportune; evidentemente la scelta di tale campo presuppone un problema di discretizzazione.

1.2.2.1. *La formulazione debole e la formulazione forte.* In genere si fa riferimento alla forma differenziale definendola *formulazione forte*, mentre la forma integrale è comunemente chiamata *formulazione debole*.

Partendo dunque dall'equazione della linea elastica già vista nella (1.12):

$$(1.22) \quad EIv^{IV} - q = 0$$

e supponendo di moltiplicarla per una funzione w e di integrarla nel dominio $[a, b]$, si ottiene:

$$(1.23) \quad \int_a^b w [EIv^{IV} - q] dx = 0$$

nella quale w è definita *funzione peso*. Nel nostro caso si considera che w sia della stessa natura di v , ovvero che si tratti di uno spostamento. In questa fase la formulazione è ancora forte, perché è ancora presente la derivata quarta dell'equazione (1.22). Se però si integra due volte la (1.23) si ottiene:

$$(1.24) \quad \int_a^b [w''EIv''] dx = \int_a^b [wq] dx - Vw|_a^b + Mw'|_a^b$$

nella quale V è il taglio agente e M il momento. Quest'ultima relazione è quella che sancisce il passaggio dalla forma forte a quella debole, essendone prova il fatto che ora il problema è descritto solo da derivate seconde.

1.2.2.2. *L'approssimazione del campo degli spostamenti*. Si introduce una approssimazione del campo degli spostamenti ponendo:

$$(1.25) \quad \begin{cases} v \approx \sum_{j=1}^n N_j \hat{v}_j \\ w \approx \sum_{j=1}^n N_j \hat{w}_j \end{cases}$$

nella quale gli spostamenti incogniti v e w sono approssimati con la sommatoria del prodotto delle *funzioni di forma* N_i per gli *spostamenti nodali* \hat{v} e \hat{w} . Le funzioni forma sono delle funzioni note, mentre gli spostamenti nodali diventano le incognite del problema.

Supponendo che gli spostamenti nodali siano costanti, è possibile operare la derivazione degli spostamenti derivando semplicemente le funzioni di forma:

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n N_j \hat{v}_j = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n N_j \hat{w}_j = \sum_{j=1}^n \hat{w}_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{aligned}$$

affinché il problema sia ben posto pertanto, si richiede che le funzioni di forma siano significative anche se derivate fino al grado più alto necessario per la risoluzione del problema.

Le relazioni della (1.25) e della (1.26) possono essere scritte utilizzando operatori matriciali in modo da avere:

$$(1.27) \quad \begin{cases} v \approx \sum_{j=1}^n N_j \hat{v}_j = \mathbf{N} \hat{\mathbf{v}} \\ w \approx \sum_{j=1}^n N_j \hat{w}_j = \mathbf{N} \hat{\mathbf{w}} \\ v'' \approx \sum_{j=1}^n N_j'' \hat{v}_j = \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}} \\ w'' \approx \sum_{j=1}^n N_j'' \hat{w}_j = \mathbf{B} \hat{\mathbf{w}} \end{cases}$$

essendo:

$$(1.28) \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n]^T \\ \hat{\mathbf{w}} = [\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n]^T \\ \mathbf{N} = [\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_n] \\ \mathbf{B} = [\hat{N}_1'', \hat{N}_2'', \dots, \hat{N}_n''] \end{cases}$$

Ignorando le condizioni al contorno, la formulazione debole può essere riscritta come:

$$(1.29) \quad \int_a^b [(\mathbf{B} \hat{\mathbf{w}})^T E I \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}}] dx = \int_a^b [(\mathbf{N} \hat{\mathbf{w}})^T q] dx$$

e quindi:

$$(1.30) \quad \hat{\mathbf{w}}^T \left\{ \int_a^b [\mathbf{B}^T E I \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}}] dx - \int_a^b [\mathbf{N}^T q] dx \right\} = 0$$

ma l'arbitrarietà di $\hat{\mathbf{w}}$ implica che deve valere anche:

$$(1.31) \quad \int_a^b [\mathbf{B}^T E I \mathbf{B}] \hat{\mathbf{v}} dx = \int_a^b [\mathbf{N}^T q] dx$$

e pertanto è possibile riportare il sistema algebrico nella forma:

$$(1.32) \quad \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

dove

$$(1.33) \quad \begin{cases} \mathbf{K} = \int_a^b [\mathbf{B}^T E I \mathbf{B}] dx \\ \mathbf{F} = \int_a^b [\mathbf{N}^T q] dx \end{cases}$$

1.2.2.3. *Il problema residuale nella formulazione degli elementi finiti.* La formulazione del problema in forma residuale come descritto dalla relazione (1.17) e seguenti, cambia nel momento in cui si opera un'approssimazione agli elementi finiti che porti ad esprimere il campo degli spostamenti nella forma:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} \\ \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\delta\hat{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

ottenendo:

$$(1.35) \quad \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV - \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{a} \, dV - \delta\hat{\mathbf{u}}^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = 0$$

che evidentemente deve essere soddisfatta per qualunque valore di $\delta\hat{\mathbf{u}}^T$. La corrispondente equazione residuale è:

$$(1.36) \quad \mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV - \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{a} \, dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = 0$$

1.2.2.4. *Il caso statico.* Qualora l'analisi del sistema venga effettuata in condizioni statiche ci si riconduce al caso della (1.20) la cui corrispondente equazione residuale è:

$$(1.37) \quad \mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = 0$$

Volendo linearizzare tale espressione rispetto al vettore degli spostamenti, l'unico contributo interessato dalla linearizzazione è quello delle forze interne, visto che:

$$(1.38) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})$$

ne segue che per linearizzare il residuo è sufficiente derivare rispetto al vettore degli spostamenti nodali $\hat{\mathbf{u}}$ il solo contributo delle forze interne:

$$(1.39) \quad \frac{d\mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}})}{d\hat{\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial\hat{\mathbf{u}}} \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\hat{\mathbf{u}}} \, dV = \int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\hat{\mathbf{u}}} \, dV$$

ma riconoscendo all'interno dell'integrale la matrice del legame costitutivo e quella delle funzioni di forma utilizzate per l'approssimazione del campo di spostamento:

$$(1.40) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{B} &= \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\hat{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

la matrice dei coefficienti per ottenere l'incremento $d\mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}})$ assume la forma:

$$(1.41) \quad \mathbf{K}^T = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

e possiamo definirla matrice di rigidezza tangente.

1.2.2.5. *Il caso dinamico.* Se si valuta invece il caso dinamico la relazione di partenza è la (1.21), mentre l'equazione residuale è la (1.36). Analizzando questa nelle sue tre componenti, si ha che per calcolare la linearizzazione del residuo il primo termine, quello relativo alle forze interne, non offre alcun contributo perché, analogamente a prima, esso non dipende dal vettore degli spostamenti nodali $\hat{\mathbf{u}}$ e pertanto la sua derivata rispetto a questo si annulla. Sarà invece necessario considerare i contributi degli altri due termini, in generale diversi da zero:

$$(1.42) \quad \frac{d\mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}})}{d\hat{\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \left(\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{a} dV \right)$$

È evidente che per quanto concerne il termine associato al tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ esso si comporterà in modo esattamente uguale al caso statico, fornendo come contributo alla linearizzazione il termine (1.41).

Il contributo del termine legato alla forza d'inerzia invece sarà dato da:

$$(1.43) \quad \frac{d}{d\hat{\mathbf{u}}} \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{a} dV = \int_V \mathbf{N}^T \rho \frac{d\mathbf{a}}{d\hat{\mathbf{u}}} dV$$

Volendo analizzare in dettaglio la derivata dell'accelerazione rispetto al vettore spostamento si ottiene:

$$(1.44) \quad \frac{d\mathbf{a}}{d\hat{\mathbf{u}}} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\hat{\mathbf{u}}} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{u}} \mathbf{N}$$

applicando il metodo di Newmark per la risoluzione dell'equazione dinamica si ottiene:

$$(1.45) \quad \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{u}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$$

pertanto, il contributo della forza d'inerzia sarà:

$$(1.46) \quad \frac{d}{d\hat{\mathbf{u}}} \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{a} dV = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}$$

1.2.2.6. *L'operatore rigidezza della trave bidimensionale alla Eulero-Bernoulli.*
 Nel caso bidimensionale, alla luce degli aspetti trattati in precedenza, il principio dei lavori virtuali:

$$(1.47) \quad \delta L_i = \delta L_e$$

può essere scritto nella forma:

$$(1.48) \quad \delta L_i = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} d\Omega$$

Tenendo conto che l'unica componente non nulla del tensore delle deformazioni per la (1.6) è:

$$(1.49) \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon - y\chi = u'_0 - y\vartheta' = u'_0 - yv''$$

nella quale u_0 è lo spostamento in direzione x del punto della sezione sull'asse della trave, si può porre:

$$(1.50) \quad \delta \varepsilon_{xx} = \delta u'_0 - y\delta v''$$

Pertanto la relazione (1.48) può essere riscritta, sostituendo la (1.50), come:

$$(1.51) \quad \delta L_i = \int_{\Omega} \sigma_{xx} (\delta u'_0 - y\delta v'') d\Omega.$$

Tenendo conto delle forze interne non nulle del sistema, già definite nella (1.7):

$$(1.52) \quad N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad M = - \int_A \sigma_{xx} y dA$$

l'equazione (1.51) diviene:

$$(1.53) \quad \begin{aligned} \delta L_i &= \int_l \left(\underbrace{\int_A \sigma_{xx} dA}_N \right) \delta u' - \left(\underbrace{\int_A \sigma_{xx} y dA}_M \right) \delta v'' dl = \\ &= \int_l (N \delta u' + M \delta v'') dl. \end{aligned}$$

Nell'ottica della formulazione del problema agli elementi finiti, introducendo l'approssimazione del campo degli spostamenti attraverso le funzioni di forma come visto nella (1.27), avendo:

$$(1.54) \quad \begin{array}{lll} \mathbf{u} = \mathbf{N}^u \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{u}' = \mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} & \delta \mathbf{u}' = \mathbf{B}^u \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} = \mathbf{N}^v \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{v}'' = \mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} & \delta \mathbf{v}'' = \mathbf{B}^v \delta \hat{\mathbf{v}} \end{array}$$

Si ottiene dalla (1.53):

$$(1.55) \quad \delta L_i = \underbrace{\delta \hat{\mathbf{u}}^T \int (\mathbf{B}^u)^T N dl}_{\mathbf{F}_{ax}^{int}} + \underbrace{\delta \hat{\mathbf{v}}^T \int (\mathbf{B}^v)^T M dl}_{\mathbf{F}_{ben}^{int}}$$

mentre per quanto riguarda il lavoro virtuale esterno

$$(1.56) \quad \delta L_e = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}_{ax}^{ext} + \delta \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{F}_{ben}^{ext}$$

Dalla (1.47) deriva allora:

$$(1.57) \quad \delta L_i - \delta L_e = \delta \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{F}_{ax}^{int} - \mathbf{F}_{ax}^{ext}) + \delta \hat{\mathbf{v}}^T (\mathbf{F}_{ben}^{int} - \mathbf{F}_{ben}^{ext})$$

Scrivendo l'equazione in forma residuale, secondo la forma definita dalla relazione (1.16), si ottiene quindi:

$$(1.58) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{ax}^{int} - \mathbf{F}_{ax}^{ext} = \mathbf{R}_{ax}(\hat{\mathbf{u}}) \\ \mathbf{F}_{ben}^{int} - \mathbf{F}_{ben}^{ext} = \mathbf{R}_{ben}(\hat{\mathbf{v}}) \end{cases}$$

L'obiettivo è ora quello di ottenere un residuo che sia inferiore alla tolleranza ammissibile.

Per risolvere il sistema si opera una linearizzazione della formula del residuo:

$$(1.59) \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext}$$

dato che le forze esterne, essendo costanti, offrono contributo nullo al problema, si ottiene:

$$(1.60) \quad d\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} d\hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} d\hat{\mathbf{v}}$$

Il vettore delle forze interne è dato da:

$$(1.61) \quad \mathbf{F}^{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ax}^{int} \\ \mathbf{F}_{ben}^{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_l (\mathbf{B}^u)^T N dl \\ \int_l (\mathbf{B}^v)^T M dl \end{bmatrix}$$

pertanto la sua linearizzazione in funzione delle componenti di spostamento porta ad avere:

$$(1.62) \quad \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \int_l (\mathbf{B}^u)^T \frac{\partial N}{\partial \hat{\mathbf{u}}} dl \\ \int_l (\mathbf{B}^v)^T \frac{\partial M}{\partial \hat{\mathbf{u}}} dl \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \int_l (\mathbf{B}^u)^T \frac{\partial N}{\partial \hat{\mathbf{v}}} dl \\ \int_l (\mathbf{B}^v)^T \frac{\partial M}{\partial \hat{\mathbf{v}}} dl \end{bmatrix}$$

Tenendo conto delle relazioni viste precedentemente:

$$(1.63) \quad \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= \int_A \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}}}_{E_T} \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \hat{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{B}^u} dA \\ \frac{\partial N}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= - \int_A \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}}}_{E_T} y \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \hat{\mathbf{v}}}}_{\mathbf{B}^v} dA \end{aligned}$$

e analogamente:

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= - \int_A E_T y \, dA \mathbf{B}^u \\ \frac{\partial M}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= \int_A E_T y^2 \, dA \mathbf{B}^v \end{aligned}$$

Pertanto la matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}_T sarà data da:

$$(1.65) \quad \begin{bmatrix} \int_l (\mathbf{B}^u)^T \mathbf{B}^u \left(\int_A E_T dA \right) dl & - \int_l (\mathbf{B}^u)^T \mathbf{B}^v \left(\int_A E_T y dA \right) dl \\ - \int_l (\mathbf{B}^v)^T \mathbf{B}^u \left(\int_A E_T y dA \right) dl & \int_l (\mathbf{B}^v)^T \mathbf{B}^v \left(\int_A E_T y^2 dA \right) dl \end{bmatrix}$$

1.2.3. Il problema tridimensionale. Le stesse conclusioni ottenute nel paragrafo precedente possono essere ricercate per quanto riguarda il problema completo nella formulazione tridimensionale.

1.2.3.1. *Le relazioni cinematiche.* Il campo di spostamenti del sistema deve essere definito considerando questa volta gli spostamenti nelle tre direzioni:

$$(1.66) \quad \begin{cases} s_x(x, y, z) = u_0(x) + \vartheta_y(x) z - \vartheta_z(x) y \\ s_y(x, y, z) = v_0(x) - \vartheta_x(x) z \\ s_z(x, y, z) = w_0(x) + \vartheta_x(x) y \end{cases}$$

nella quale u_0, v_0, w_0 sono gli spostamenti del punto della sezione posto sull'asse della trave. Vale che $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ mentre $u_0, v_0, w_0, \vartheta_y, \vartheta_x$ e ϑ_z sono funzioni solo di x . Pertanto:

$$(1.67) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = u_0 + \vartheta_y z - \vartheta_z y \\ v(x, y, z) = v_0 - \vartheta_x z \\ w(x, y, z) = w_0 + \vartheta_x y \end{cases}$$

Dalla (1.67) è possibile derivare il campo delle deformazioni del sistema:

$$(1.68) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = u'_0 + \vartheta'_y z - \vartheta'_z y \\ \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\vartheta_z + v'_0 - \vartheta'_x z = 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \vartheta_y + w'_0 + \vartheta'_x y \end{cases}$$

1.2.3.2. *Le relazioni statiche.* Le relazioni statiche sono analoghe a quelle viste nella (1.7), anche se estese al caso tridimensionale. In tale ambito, le uniche componenti di tensione non nulle sono le σ_{xx} , $\sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}$ e $\sigma_{xz} \equiv \tau_{xz}$. Le forze interne sono date dalle seguenti espressioni:

$$(1.69) \quad \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA & M_z &= - \int_A \sigma_{xx} y dA & M_y &= \int_A \sigma_{xx} z dA \\ T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & T_z &= \int_A \tau_{xz} dA & M_x &= \int_A \tau_{xz} y - \tau_{xy} z \end{aligned}$$

1.2.3.3. *Le relazioni costitutive.* In generale, le relazioni costitutive nel caso tridimensionale sono espresse attraverso un'espressione del tipo:

$$(1.70) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

nella quale l'operatore \mathbf{D} lega il tensore delle tensioni e quello delle deformazioni. In questo caso tuttavia, dato che si considerano soltanto tre componenti dei tensori non nulle, è possibile considerare le relazioni di legame tra le componenti di sforzo e di deformazione nel caso tridimensionale elastico analoghe a quelle viste nel caso bidimensionale, in particolare:

$$(1.71) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} \end{aligned}$$

che possono essere riscritte come:

$$(1.72) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(u'_0 + \vartheta'_y z - \vartheta'_z y) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = -2G(\vartheta'_z - \vartheta'_0 + \vartheta'_x z) \\ \sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{xz} = 2G(\vartheta'_y + w'_0 + \vartheta'_x y) \end{cases}$$

che se sostituite nelle relazioni della (1.69) permettono di ricavare le relazioni

costitutive locali della trave:

$$(1.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_{xx} dA \Rightarrow N = EA\varepsilon_{xx} \\ M_z = - \int_A y\sigma_{xx} dA \Rightarrow M = -EI_z\chi_z \\ M_y = \int_A z\sigma_{xx} dA \Rightarrow M = -EI_y\chi_y \\ M_x = \int_A -z\tau_{xy} + y\tau_{xz} dA \\ V_z = \int_A \sigma_{zx} dA \Rightarrow V_z = \kappa GA\gamma_z \\ V_y = \int_A \sigma_{yx} dA \Rightarrow V_y = \kappa GA\gamma_y \end{array} \right.$$

nella quale il κ è il fattore correttivo per il taglio.

1.2.4. La formulazione agli elementi finiti. Partendo dal principio dei lavori virtuali nella sua formulazione più generale:

$$(1.74) \quad \delta L_i = \delta L_e$$

e tenendo conto che:

$$(1.75) \quad \delta L_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

è possibile specializzare la relazione esprimendo solo le componenti significative:

$$(1.76) \quad \delta L_i = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \tau_{yx} \delta \varepsilon_{yx} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \tau_{zx} \delta \varepsilon_{zx} d\Omega$$

che ricordandosi della simmetria dei tensori in esame diventa:

$$(1.77) \quad \delta L_i = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} d\Omega$$

Sostituendo nella relazione precedente la (1.68) e considerando come dominio d'integrazione il volume dell'oggetto si ottiene:

$$(1.78) \quad \delta L_i = \int_V \sigma_{xx} \delta (u'_0 + \vartheta'_y z - \vartheta'_z y) + \tau_{xy} \delta (-\vartheta_z + v'_0 - \vartheta'_x z) + \tau_{xz} \delta (\vartheta_y + w'_0 + \vartheta'_x y) d\Omega$$

Passando alla formulazione agli elementi finiti, è poi possibile approssimare il campo degli spostamenti con opportune funzioni di forma che moltiplichino gli spostamenti nodali:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{N}^u \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{u}' &= \mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} & \delta \mathbf{u}' &= \mathbf{B}^u \delta \hat{\mathbf{u}} \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{N}^v \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{v}'' &= \mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} & \delta \mathbf{v}'' &= \mathbf{B}^v \delta \hat{\mathbf{v}} \\
 \mathbf{w} &= \mathbf{N}^w \hat{\mathbf{w}} & \mathbf{w}'' &= \mathbf{B}^w \hat{\mathbf{w}} & \delta \mathbf{w}'' &= \mathbf{B}^w \delta \hat{\mathbf{w}} \\
 \vartheta_x &= \mathbf{N}^\vartheta \hat{\vartheta}_x & \vartheta'_x &= \mathbf{B}^\vartheta \hat{\vartheta}_x & \delta \vartheta'_x &= \mathbf{B}^\vartheta \delta \hat{\vartheta}_x
 \end{aligned}$$

Se si riscrive il lavoro virtuale alla luce di tali possibili sostituzioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta L_i &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_L \mathbf{B}^{uT} N \, dl - \delta \hat{\mathbf{v}}^T \int_L \mathbf{B}^{vT} M_z \, dl \\
 (1.79) \quad &+ \delta \hat{\mathbf{w}}^T \int_L \mathbf{B}^{wT} M_y \, dl + \delta \hat{\vartheta}_x^T \int_L \mathbf{B}^{\vartheta T} M_x \, dl
 \end{aligned}$$

Sono presenti quattro operatori applicati agli spostamenti nodali (\mathbf{B}^u , \mathbf{B}^v , \mathbf{B}^w , \mathbf{B}^ϑ).

Il problema richiede di valutare le derivate seconde delle \mathbf{v} e delle \mathbf{w} , mentre riguardo alle \mathbf{u} ed alle ϑ_x è sufficiente considerare le derivate prime. Per questo, per descrivere l'andamento delle \mathbf{v} e delle \mathbf{w} , si assumeranno funzioni di forma \mathbf{N}^v e \mathbf{N}^w che per avere derivata seconda non banale siano almeno quadratiche, mentre basterà utilizzare funzioni di forma \mathbf{N}^u e \mathbf{N}^ϑ lineari per le \mathbf{u} e le ϑ' .

Per come gli spostamenti nodali sono stati assunti infatti, è necessario distinguere le funzioni \mathbf{B}^v dalle \mathbf{B}^w : definendo i vettori nodali come:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{v}} &= \{v^1, \vartheta_z^1, v^2, \vartheta_z^2\}^T \\
 (1.80) \quad \hat{\mathbf{w}} &= \{w^1, \vartheta_y^1, v^2, \vartheta_y^2\}^T
 \end{aligned}$$

si vede subito che mentre una rotazione positiva intorno all'asse z produce uno spostamento v positivo (figura 1.6), una rotazione attorno ad y produce uno spostamento w negativo (figura 1.7) e pertanto:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_z &= v' \\
 (1.81) \quad \vartheta_y &= -w'
 \end{aligned}$$

Pertanto, utilizzando la formulazione del problema definita nella (1.66) e utilizzando convenzionalmente rotazioni positive, le funzioni di forma \mathbf{B}^v dovranno assumere valore unitario positivo per tutti gli spostamenti e le rotazioni, mentre le funzioni di forma \mathbf{B}^w dovranno essere scelte in modo tale che gli spostamenti nodali siano unitari ma negativi nei rispettivi nodi.

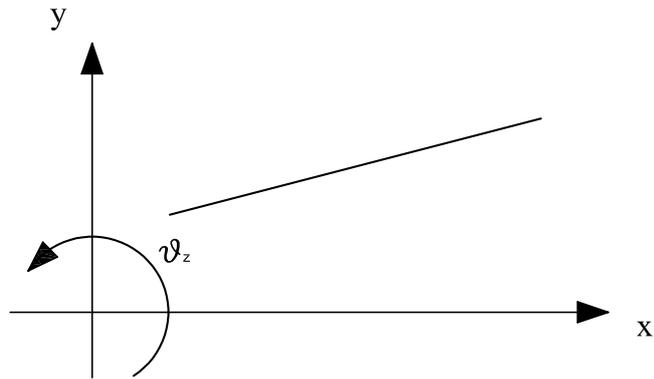


Figura 1.6: rotazione intorno a z e convenzione di segno relativa.

I vettori delle funzioni di forma utilizzati saranno allora:

$$(1.82) \quad \mathbf{N}^u = \left\{ 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{x}{l} \right\}^T$$

$$(1.83) \quad \mathbf{N}^v = \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \end{array} \right\}$$

$$(1.84) \quad \mathbf{N}^w = \left\{ \begin{array}{c} -1 + \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ -\frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \end{array} \right\}$$

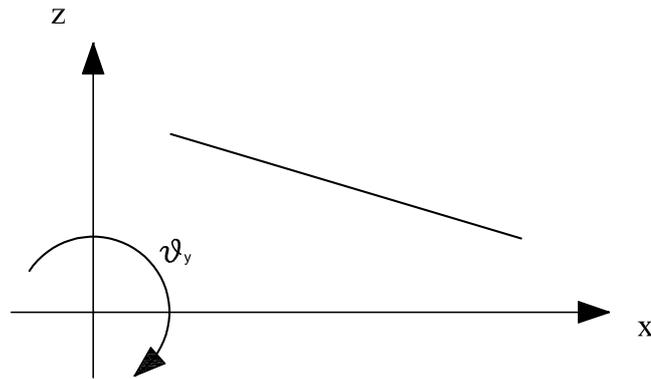


Figura 1.7: rotazione intorno ad y e convenzione di segno relativa.

$$(1.85) \quad \mathbf{N}^\vartheta = \left\{ 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{x}{l} \right\}^T$$

Per ottenere le componenti della matrice di rigidezza tangente, come fatto precedentemente per il caso bidimensionale, è necessario linearizzare rispetto al campo degli spostamenti nodali le forze interne del sistema; queste saranno date dall'integrale sulla lunghezza della trave delle azioni interne valutate sulla sezione di trave.

$$(1.86) \quad N = \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A E_T (u'_0 + \vartheta_y z - \vartheta_z y) dA$$

$$(1.87) \quad \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= \int_A E_T \mathbf{B}^u dA \\ \frac{\partial N}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= - \int_A E_T y \mathbf{B}^v dA \\ \frac{\partial N}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= \int_A E_T z \mathbf{B}^w dA \\ \frac{\partial N}{\partial \widehat{\vartheta}_x} &= 0 \end{aligned}$$

che una volta integrate lungo la lunghezza della trave costituiranno le componenti della riga del contributo assiale della matrice di rigidità tangente. Analogamente:

$$(1.88) \quad M_z = - \int_A \sigma_{xx} y \, dA = - \int_A E_T (u'_0 + \vartheta_y z - \vartheta_z y) y \, dA$$

$$(1.89) \quad \begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= - \int_A E_T \mathbf{B}^u y \, dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= - \int_A E_T \mathbf{B}^v y^2 \, dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= + \int_A E_T \mathbf{B}^w y z \, dA \\ \frac{\partial M_z}{\partial \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_x} &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.90) \quad M_y = \int_A \sigma_{xx} z \, dA = \int_A E_T (u'_0 + \vartheta_y z - \vartheta_z y) z \, dA$$

$$(1.91) \quad \begin{aligned} \frac{\partial M_y}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= \int_A E_T \mathbf{B}^u z \, dA \\ \frac{\partial M_y}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= \int_A E_T \mathbf{B}^v y z \, dA \\ \frac{\partial M_y}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= - \int_A E_T \mathbf{B}^w z^2 \, dA \\ \frac{\partial M_y}{\partial \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_x} &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.92) \quad M_x = \int_A -z\tau_{xy} + y\tau_{xz} \, dA = \int_A G_T \vartheta'_x z^2 + G_T \vartheta'_x y^2 \, dA$$

$$(1.93) \quad \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_x} &= \int_A G_T \mathbf{B}^\vartheta (z^2 + y^2) \, dA \end{aligned}$$

dalle quali si evince immediatamente che il sistema, per come è stato formulato, è caratterizzato dall'aver la sollecitazione torcente disaccoppiata dalle

altre sollecitazioni.

Valutando inoltre gli integrali estesi all'area della sezione trovati nelle formule precedenti, richiamando alcune relazioni elementari di geometria delle masse è possibile porre:

$$(1.94) \quad \begin{aligned} \int_A dA &= A & \int_A y dA &= S_z & \int_A z dA &= S_y \\ \int_A y^2 dA &= I_{zz} & \int_A z^2 dA &= I_{yy} & \int_A yz dA &= I_{yz} \\ \int_A (x^2 + y^2) dA &= J \end{aligned}$$

relazioni che consentono di scrivere la matrice della rigidezza tangente \mathbf{K}_T come:

$$(1.95) \quad \begin{bmatrix} \int_l (\mathbf{B}^u)^T E_T A \mathbf{B}^u dl & - \int_l (\mathbf{B}^u)^T E_T S_z \mathbf{B}^v dl & \int_l (\mathbf{B}^u)^T E_T S_y \mathbf{B}^w dl & 0 \\ - \int_l (\mathbf{B}^v)^T E_T S_z \mathbf{B}^u dl & - \int_l (\mathbf{B}^v)^T E_T I_{zz} \mathbf{B}^v dl & \int_l (\mathbf{B}^v)^T E_T I_{zy} \mathbf{B}^w dl & 0 \\ \int_l (\mathbf{B}^w)^T E_T S_y \mathbf{B}^u dl & \int_l (\mathbf{B}^w)^T E_T I_{yz} \mathbf{B}^v dl & - \int_l (\mathbf{B}^w)^T E_T I_{yy} \mathbf{B}^w dl & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_l (\mathbf{B}^\vartheta)^T G_T J \mathbf{B}^\vartheta \end{bmatrix}$$

1.3. Il modello alla Timoshenko

Un secondo modello di teoria di trave è quello di Timoshenko, che si differenzia dal precedente perché tiene in conto nella formulazione anche dell'effetto della deformazione di taglio.

1.3.1. Il problema bidimensionale. Nella teoria di trave di Timoshenko le sezioni piane rimangono piane e ruotano attorno all'asse neutro come nel modello alla Eulero-Bernoulli, ma non rimangono normali all'asse della trave.

La rotazione rispetto alla normale è prodotta da un taglio che si assume essere costante nella sezione, sebbene la teoria di Jourawsky preveda per le tensioni tangenziali un andamento parabolico.

1.3.1.1. *Le relazioni cinematiche.* Per il caso bidimensionale è possibile scrivere il campo degli spostamenti nella stessa forma vista nella (1.2):

$$(1.96) \quad \begin{cases} s_x(x, y) = u(x, y) = u_0(x) - y\vartheta_z(x) \\ s_y(x, y) = v(x, y) = v_0(x) \end{cases}$$

ai quali corrispondono le deformazioni:

$$(1.97) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} = u'_0 - y\vartheta'_z \\ \gamma_{xy} = \frac{dv(x)}{dy} + \frac{du(x)}{dx} = v'_0 - \vartheta_z \end{cases}$$

La formulazione fino a questo punto, per via delle relazioni (1.96) e (1.97), è del tutto analoga a quella vista nel caso di Eulero-Bernoulli. La sostanziale differenza si ha nel momento in cui non si impone che la deformazione a taglio γ debba essere nulla, e che quindi, come rappresentato in figura 1.8, tipicamente valga che:

$$(1.98) \quad v'_0 \neq \vartheta_z$$

1.3.1.2. *Le relazioni statiche.* Le forze interne del sistema sono esattamente le stesse rispetto al caso visto in precedenza e possono essere definite ancora

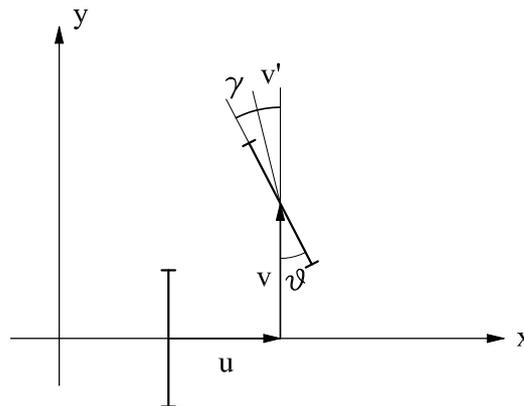


Figura 1.8: descrizione del campo degli spostamenti nel caso bidimensionale.

come:

$$(1.99) \quad N = \int_A \sigma_{xx} dA$$

$$(1.100) \quad M = - \int_A \sigma_{xx} y dA$$

$$(1.101) \quad T = \int_A \tau_{xy} dA$$

1.3.1.3. *Le relazioni costitutive.* Nella formulazione alla Timoshenko bi-dimensionale le relazioni costitutive sono uguali a quelle viste nel caso precedente (1.7) e date da:

$$(1.102) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(\varepsilon - y\chi) \\ \sigma_{yx} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma \end{cases}$$

1.3.2. La formulazione agli elementi finiti. Riscrivendo per il campo di deformazioni definito nella (1.97) il lavoro virtuale interno nella forma generale (1.75) e riportando soltanto le componenti non nulle, si ottiene:

$$(1.103) \quad \delta L_i = \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dV$$

e sostituendo in questa la (1.96):

$$(1.104) \quad \delta L_i = \int_V \sigma_{xx} [\delta u'_0 - y \delta \vartheta'] + \tau_{xy} [\delta v'_0 - \delta \vartheta] dV$$

Riportando a questo punto le forze interne nella (1.104) si ottiene:

$$(1.105) \quad \delta L_i = \int_l N \delta u'_0 + M \delta \vartheta'_z + T (\delta v'_0 - \delta \vartheta_z) dl$$

Passando alla approssimazione del campo degli spostamenti con gli elementi finiti è possibile porre:

$$(1.106) \quad \begin{array}{lll} \mathbf{u} & = \mathbf{N}^u \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{u}' & = \mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} & = \mathbf{N}^v \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{v}' & = \mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} \\ \vartheta_z & = \mathbf{N}^{\vartheta_z} \hat{\vartheta}_z & \vartheta_z' & = \mathbf{B}_z^{\vartheta} \hat{\vartheta}_z \end{array}$$

e riportando queste relazioni nella (1.105) si ottiene:

$$(1.107) \quad \delta L_i = \delta \mathbf{u}^T \int_l (\mathbf{B}^u)^T N dl + \delta \mathbf{v}^T \int_l (\mathbf{B}^v)^T T dl + \delta \boldsymbol{\vartheta}_z^T \int_l \left((\mathbf{B}^\vartheta)^T M - (\mathbf{N}^\vartheta)^T T \right) dl$$

dalla quale è possibile distinguere le componenti delle forze interne del sistema nelle tre componenti relative ai campi di spostamento presenti:

$$(1.108) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}^{ax} &= \int_l (\mathbf{B}^u)^T N dl \\ \mathbf{F}^{sh} &= \int_l (\mathbf{B}^v)^T T dl \\ \mathbf{F}^{be} &= \int_l \left((\mathbf{B}^\vartheta)^T M - (\mathbf{N}^\vartheta)^T T \right) dl \end{aligned}$$

Dalla relazione (1.104) si vede che la formulazione alla Timoshenko utilizza le funzioni di spostamento al massimo al primo grado di derivazione. Questo comporta la necessità di definire delle funzioni di forma che siano almeno lineari, in modo da avere una derivata prima significativa, ma d'altra parte non rende necessario utilizzare, come nella formulazione all'Eulero-Bernoulli, alcuna funzione di forma di grado superiore perché il problema di campo non ha derivate di secondo ordine o superiore.

Volendo scrivere allora esplicitamente le funzioni di forma utilizzate nella formulazione che si sta utilizzando, si ha:

$$(1.109) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}^u &= \left\{ 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{x}{l} \right\} & \mathbf{B}^u &= \left\{ -\frac{1}{l}; \quad \frac{1}{l} \right\} \\ \mathbf{N}^v &= \left\{ 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{x}{l} \right\} & \mathbf{B}^v &= \left\{ -\frac{1}{l}; \quad \frac{1}{l} \right\} \\ \mathbf{N}^\vartheta &= \left\{ 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{x}{l} \right\} & \mathbf{B}^\vartheta &= \left\{ -\frac{1}{l}; \quad \frac{1}{l} \right\} \end{aligned}$$

dove le \mathbf{B} sono ricavate semplicemente derivando le \mathbf{N} .

1.3.2.1. *L'operatore rigidezza della trave bidimensionale alla Timoshenko.* Per ottenere le componenti della matrice di rigidezza tangente si opera come nel caso alla Eulero-Bernoulli la linearizzazione dell'espressione del residuo rispetto al campo degli spostamenti nodali.

Il residuo è dato dall'espressione:

$$(1.110) \quad \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext}$$

nella quale il vettore delle forze interne è composto dai termini della (1.108).
Il contributo assiale, partendo dalla espressione:

$$(1.111) \quad \mathbf{F}_{ax} = \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T (\mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} - y \mathbf{B}^\vartheta \hat{\vartheta}_z) dA$$

consente di ricavare:

$$(1.112) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{ax}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T \mathbf{B}^u dA = (\mathbf{B}^u)^T E_T A \mathbf{B}^u \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{ax}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{ax}}{\partial \hat{\vartheta}_z} &= - \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T y \mathbf{B}^\vartheta dA = - (\mathbf{B}^u)^T E_T S \mathbf{B}^\vartheta \end{aligned}$$

che una volta integrate lungo la lunghezza della trave costituiranno le componenti della riga del contributo assiale della matrice di rigidità tangente.

Analogamente, per la componente tagliante si avrà:

$$(1.113) \quad \mathbf{F}_{sh} = \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T (\mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{N}^\vartheta \hat{\vartheta}_z) dA$$

che porta ad avere:

$$(1.114) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{sh}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{sh}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{B}^v dA = (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{B}^v \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{sh}}{\partial \hat{\vartheta}_z} &= - \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{N}^\vartheta dA = - (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{N}^\vartheta \end{aligned}$$

Infine, la componente flettonete:

$$(1.115) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_{be} &= - \int_A (\mathbf{B}^\vartheta)^T y E_T (\mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} - y \mathbf{B}^\vartheta \hat{\vartheta}_z) dA \\ &\quad - \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T (\mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{N}^\vartheta \hat{\vartheta}_z) dA \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare:

$$\begin{aligned}
 (1.116) \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{be}}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= - \int_A (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T y \mathbf{B}^u dA = -(\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T S \mathbf{B}^u \\
 \frac{\partial \mathbf{F}_{be}}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= - \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T \mathbf{B}^v dA = -(\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T A \mathbf{B}^v \\
 \frac{\partial \mathbf{F}_{be}}{\partial \vartheta_z} &= \int_A (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T y^2 \mathbf{B}^\vartheta dA + \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T \mathbf{N}^\vartheta dA = \\
 &= (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T I \mathbf{B}^\vartheta + (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T A \mathbf{N}^\vartheta
 \end{aligned}$$

Nel calcolo degli integrali trovati nelle formule precedenti sono state operate delle sostituzioni richiamando alcune relazioni elementari di geometria delle masse:

$$(1.117) \quad \int_A dA = A \quad \int_A y dA = S_z \quad \int_A y^2 dA = I_{zz}$$

È pertanto possibile scrivere la matrice della rigidità tangente \mathbf{K}_T come:

$$\begin{aligned}
 (1.118) \quad \mathbf{K}_{uu} &= \int_l (\mathbf{B}^u)^T E_T A \mathbf{B}^u dl \\
 \mathbf{K}_{u\vartheta} &= - \int_l (\mathbf{B}^u)^T E_T S \mathbf{B}^\vartheta dl \\
 \mathbf{K}_{\vartheta u} &= - \int_l (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T S \mathbf{B}^u dl \\
 \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta} &= \int_l (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T I \mathbf{B}^\vartheta dl + \int_l (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T A \mathbf{N}^\vartheta \\
 \mathbf{K}_{\vartheta v} &= - \int_l (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T A \mathbf{B}^v \\
 \mathbf{K}_{v\vartheta} &= - \int_l (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{N}^\vartheta \\
 \mathbf{K}_{vv} &= \int_l (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{B}^v
 \end{aligned}$$

evidentemente simmetrica e di dimensione pari ai gradi di libertà nodali per il numero dei nodi, nel nostro caso pari a sei.

Dato che l'approccio alla Timoshenko prevede di avere un taglio costante sulla sezione, mentre questo non è vero secondo la formulazione della teoria del taglio all Jourawsky, sarà necessario correggere adottare un fattore correttivo moltiplicandolo per il modulo di taglio G . In generale, dunque, scrivendo semplicemente G , si intende κG .

1.3.2.2. *Il modello linked.* Nel caso di elementi tozzi, nei quali si ha un valore di $G\kappa A$ molto maggiore del termine EI , la formulazione di Timoshenko classica causa l'insorgere del fenomeno di locking, ovvero della sottostima degli spostamenti dovuta alla predominanza della rigidità di taglio sulla rigidità flessionale.

Per evitare ciò è possibile implementare il modello linked di Timoshenko, che prevede di esprimere il vettore degli spostamenti nodali \mathbf{v} con un termine correttivo:

$$(1.119) \quad v = \mathbf{N}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}x \left(1 - \frac{x}{l}\right) (\hat{\vartheta}_1 - \hat{\vartheta}_2)$$

mentre il campo delle rotazioni nodali rimane lineare, essendo

$$(1.120) \quad \vartheta = \mathbf{N}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$$

Il modello si dice linked proprio perché introduce un legame tra il campo degli spostamenti \mathbf{v} e quello degli spostamenti $\boldsymbol{\vartheta}$ che invece nel modello classico risultano totalmente indipendenti.

Dalla (1.119) deriva che, essendo

$$(1.121) \quad \hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2)^T$$

e definendo

$$(1.122) \quad \mathbf{a} = (1, -1)$$

è possibile porre:

$$(1.123) \quad (\hat{\vartheta}_1 - \hat{\vartheta}_2) = \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$$

e pertanto:

$$(1.124) \quad \begin{aligned} v &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}x \left(1 - \frac{x}{l}\right) (\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \\ v' &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right) (\mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \end{aligned}$$

Nella valutazione delle componenti di bending della matrice di rigidità, si hanno tali cambiamenti rispetto alla (1.115):

$$(1.125) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_{be} &= - \int_A (\mathbf{B}^\vartheta)^T y E_T (\mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} - y \mathbf{B}^\vartheta \hat{\boldsymbol{\vartheta}}) dA \\ &\quad - \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T \left(\mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} + \frac{l}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) \mathbf{a} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} - \mathbf{N}^\vartheta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \right) dA \end{aligned}$$

Il solo termine della matrice di rigidità tangente che risente della variazione di formulazione è la derivata rispetto a $\hat{\vartheta}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{F}_{be}}{\partial \hat{\vartheta}} &= \int_A (\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T y^2 \mathbf{B}^\vartheta dA + \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T \mathbf{N}^\vartheta dA \\
 &\quad - \int_A (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T \frac{l}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) \mathbf{a} = \\
 (1.126) \quad & \underbrace{(\mathbf{B}^\vartheta)^T E_T I \mathbf{B}^\vartheta + (\mathbf{N}^\vartheta)^T G_T A \mathbf{N}^\vartheta - G_T A \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{l}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) \\ \frac{l}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) \end{array} \right\}}_{\text{linked formulation}}
 \end{aligned}$$

1.3.3. Il problema tridimensionale. La formulazione del problema di Timoshenko nel caso tridimensionale è evidentemente analoga a quella bidimensionale, per cui si prevede che la deformazione della trave possa portare ad avere sezioni piane normali all'asse della trave che, pur rimanendo piane, possano perdere la loro ortogonalità rispetto all'asse.

1.3.3.1. *Le relazioni cinematiche.* L'estensione della (1.96) per il caso tridimensionale consente di scrivere:

$$(1.127) \quad \begin{cases} s_x(x, y, z) = u(x, y, z) = u_0 + \vartheta_y z - \vartheta_z y \\ s_y(x, y, z) = v(x, y, z) = v_0 - \vartheta_x z \\ s_z(x, y, z) = w(x, y, z) = w_0 + \vartheta_x y \end{cases}$$

a cui corrisponde il campo delle deformazioni:

$$(1.128) \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = u'_0 + \vartheta'_y z - \vartheta'_z y \\ \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\vartheta_z + v'_0 - \vartheta'_x z \\ \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \vartheta_y + w'_0 + \vartheta'_x y \end{cases}$$

Nella formulazione in oggetto si ha che il termine della derivata prima dello spostamento trasversale non si annulla con la rotazione intorno all'asse della trave, per cui è necessario conservare tutti i termini della deformazione. Evidentemente nel caso tridimensionale gli spostamenti trasversali di interesse

saranno due, γ_{xy} e γ_{xz} .

1.3.3.2. *Le relazioni statiche.* Nulla varia nella definizione delle forze interne nella formulazione alla Timoshenko rispetto alla formulazione all'Eulero-Bernoulli. Pertanto, riproponendo le relazioni della (1.69) si ha:

$$(1.129) \quad \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA & M_z &= - \int_A \sigma_{xx} y dA & M_y &= \int_A \sigma_{xx} z dA \\ T_y &= \int_A \tau_{xy} dA & T_z &= \int_A \tau_{xz} dA & M_x &= \int_A \tau_{xz} y - \tau_{xy} z \end{aligned}$$

1.3.3.3. *Le relazioni costitutive.* La stessa analogia è presente anche per quanto riguarda le definizioni delle relazioni costitutive, tenendo in conto dell'approssimazione che ha già consentito di passare dalla (1.70) alla (1.71):

$$(1.130) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} \end{aligned}$$

che possono essere riscritte come:

$$(1.131) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(u'_0 + \vartheta'_y z - \vartheta'_z y) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = -2G(\vartheta'_z + v'_0 + \vartheta'_x z) \\ \sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = 2G(\vartheta'_y + w'_0 + \vartheta'_x y) \end{cases}$$

che permettono di ricavare le relazioni costitutive locali della trave:

$$(1.132) \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma_{xx} dA \Rightarrow N = EA\varepsilon_{xx} \\ M_z = - \int_A y \sigma_{xx} dA \Rightarrow M = -EI_z \chi_z \\ M_y = \int_A z \sigma_{xx} dA \Rightarrow M = -EI_y \chi_y \\ M_x = \int_A -z \tau_{xy} + y \tau_{xz} dA \\ V_z = \int_A \sigma_{zx} dA \Rightarrow V_z = \kappa GA \gamma_z \\ V_y = \int_A \sigma_{yx} dA \Rightarrow V_y = \kappa GA \gamma_y \end{cases}$$

nella quale il κ è il solito fattore correttivo per il taglio.

1.3.4. La formulazione agli elementi finiti. Scrivendo il principio dei lavori virtuali è possibile porre:

$$(1.133) \quad L_i = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \, dV$$

e sostituendo le deformazioni nell'espressione del lavoro interno:

$$(1.134) \quad L_i = \int_V \sigma_{xx} (u'_0 - y\vartheta'_z + z\vartheta'_y) + \tau_{xy} (v'_0 - \vartheta_z - z\vartheta'_x) + \tau_{xz} (w'_0 + \vartheta_y + y\vartheta'_x)$$

A questo punto è possibile sostituire all'interno dell'integrale esteso al dominio le sollecitazioni interne del sistema della (1.129) per cui l'equazione (1.134) diviene:

$$(1.135) \quad L_i = \int_l N u'_0 + M_z \vartheta'_z + M_y \vartheta'_y + M_x \vartheta'_x + T_y (v'_0 - \vartheta_z) + T_z (w'_0 + \vartheta_y) \, dl$$

Procedendo è possibile sostituire il campo degli spostamenti con la relativa approssimazione data dalla formulazione degli elementi finiti:

$$(1.136) \quad \begin{array}{llll} \mathbf{u} & = \mathbf{N}^u \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{u}' & = \mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} & \vartheta_x & = \mathbf{N}^{\vartheta_x} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x & \vartheta_x' & = \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x \\ \mathbf{v} & = \mathbf{N}^v \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{v}' & = \mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} & \mathbf{w} & = \mathbf{N}^w \hat{\mathbf{w}} & \mathbf{w}' & = \mathbf{B}^w \hat{\mathbf{w}} \\ \vartheta_y & = \mathbf{N}^{\vartheta_y} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_y & \vartheta_y' & = \mathbf{B}^{\vartheta_y} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_y & \vartheta_z & = \mathbf{N}^{\vartheta_z} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z & \vartheta_z' & = \mathbf{B}^{\vartheta_z} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z \end{array}$$

e si ottiene:

$$(1.137) \quad \begin{aligned} \delta L_i &= \delta \mathbf{u}^T \int_l (\mathbf{B}^u)^T N \, dl + \delta \mathbf{v}^T \int_l (\mathbf{B}^v)^T T_y \, dl + \delta \mathbf{w}^T \int_l (\mathbf{B}^w)^T T_z \, dl \\ &+ \delta \boldsymbol{\vartheta}_z^T \int_l \left((\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T M_z - (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T T_y \right) \, dl \\ &+ \delta \boldsymbol{\vartheta}_y^T \int_l \left((\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T M_y + (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T T_z \right) \, dl + \delta \boldsymbol{\vartheta}_x^T \int_l (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T M_x \, dl \end{aligned}$$

dalla quale è possibile definire anche le forze interne del sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{ax} &= \int_A (\mathbf{B}^u)^T N dl \\
 \mathbf{F}^{tor} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T M_x dl \\
 \mathbf{F}^{shy} &= \int_A (\mathbf{B}^v)^T T_y dl \\
 \mathbf{F}^{shz} &= \int_A (\mathbf{B}^w)^T T_z dl \\
 \mathbf{F}^{beny} &= \int_A \left((\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T M_y + (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T T_z \right) dl \\
 \mathbf{F}^{benz} &= \int_A \left((\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T M_z - (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T T_y \right) dl
 \end{aligned}
 \tag{1.138}$$

nelle quali la componente di *bending* sono definite specificando l'asse attorno a cui avviene la rotazione.

Per ricavare le componenti della matrice di rigidezza tangente del sistema è sufficiente linearizzare il residuo rispetto agli spostamenti nodali. L'unico termine non nullo è dato dalle derivate delle forze interne definite nella (1.138).

La componente assiale:

$$\mathbf{F}^{ax} = \int_A (\mathbf{B}^u)^T \left(\mathbf{B}^u \hat{\mathbf{u}} - y \mathbf{B}^{\vartheta_z} \hat{\vartheta}_z + z \mathbf{B}^{\vartheta_y} \hat{\vartheta}_y \right) E_T dA
 \tag{1.139}$$

porta ad avere:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T \mathbf{B}^u dA = (\mathbf{B}^u)^T E_T A \mathbf{B}^u \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\vartheta}_x} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\vartheta}_y} &= \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T z \mathbf{B}^{\vartheta_y} dA = (\mathbf{B}^u)^T E_T S_z \mathbf{B}^{\vartheta_y} \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{ax}}{\partial \hat{\vartheta}_z} &= - \int_A (\mathbf{B}^u)^T E_T y \mathbf{B}^{\vartheta_z} dA = -(\mathbf{B}^u)^T E_T S_y \mathbf{B}^{\vartheta_z}
 \end{aligned}
 \tag{1.140}$$

La componente torcente:

$$(1.141) \quad \mathbf{F}^{tor} = \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T y G_T \left[\mathbf{N}^{\vartheta_y} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_y + \mathbf{B}^w \hat{\mathbf{w}} + y \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x \right] - (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T z G_T \left[-\mathbf{N}^{\vartheta_z} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z + \mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} - z \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x \right] dA$$

consente di trovare:

$$(1.142) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= \int_A -(\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T z \mathbf{B}^v G_T dA = -(\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T \mathbf{B}^v S_z \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T y \mathbf{B}^v G_T dA = (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T \mathbf{B}^w S_y \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T (y^2 + z^2) \mathbf{B}^{\vartheta_x} dA = (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T \mathbf{B}^{\vartheta_x} J_P \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_y} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T y \mathbf{N}^{\vartheta_y} dA = (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_y} S_y \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{tor}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T z \mathbf{N}^{\vartheta_z} dA = (\mathbf{B}^{\vartheta_x})^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_z} S_z \end{aligned}$$

Le componenti taglienti sono due, in direzione y ed in direzione z. Quella in direzione y:

$$(1.143) \quad \mathbf{F}^{shy} = \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \left(\mathbf{B}^v \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{N}^{\vartheta_z} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z - z \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x \right)$$

porta ad avere:

$$(1.144) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{B}^v dA = (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{B}^v \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_x} &= - \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{B}^{\vartheta_x} z dA = - (\mathbf{B}^v)^T G_T S_z \mathbf{B}^{\vartheta_x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shy}}{\partial \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_z} &= - \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_z} dA = - (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{N}^{\vartheta_z} \end{aligned}$$

mentre quella in z:

$$(1.145) \quad \mathbf{F}^{shz} = \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \left(\mathbf{B}^w \hat{w} + \mathbf{N}^{\vartheta_y} \hat{\vartheta}_y + y \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\vartheta}_x \right)$$

conduce a:

$$(1.146) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\mathbf{w}}} &= \int_A (\mathbf{B}^w)^T G_T \mathbf{B}^w dA = (\mathbf{B}^w)^T G_T A \mathbf{B}^w \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\vartheta}_x} &= \int_A (\mathbf{B}^w)^T y G_T \mathbf{B}^{\vartheta_x} dA = (\mathbf{B}^w)^T G_T S_y \mathbf{B}^{\vartheta_x} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\vartheta}_y} &= \int_A (\mathbf{B}^v)^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_y} dA = (\mathbf{B}^v)^T G_T A \mathbf{N}^{\vartheta_y} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^{shz}}{\partial \hat{\vartheta}_z} &= 0 \end{aligned}$$

Analogamente le componenti flettenti:

$$(1.147) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}^{bey} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T - y E_T \left[\mathbf{B}^u \hat{u} - y \mathbf{B}^{\vartheta_z} \hat{\vartheta}_z + z \mathbf{B}^{\vartheta_y} \hat{\vartheta}_y \right] dA \\ &\quad - \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T G_T \left[\mathbf{B}^v \hat{v} - \mathbf{N}^{\vartheta_z} \hat{\vartheta}_z - z \mathbf{B}^{\vartheta_x} \hat{\vartheta}_x \right] dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= - \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T y E_T \mathbf{B}^u dA = - (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T E_T S_y \mathbf{B}^u \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= - \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T \mathbf{B}^v G_T dA = - (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T G_T A \mathbf{B}^v \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= 0 \\
 (1.148) \quad \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\vartheta}_x} &= \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T z G_T \mathbf{B}^{\vartheta_x} dA = (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T G_T S_z \mathbf{B}^{\vartheta_x} \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\vartheta}_y} &= - \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T E_T yz \mathbf{B}^{\vartheta_y} dA = - (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T E_T I_{yz} \mathbf{B}^{\vartheta_y} \\
 \frac{\partial \mathbf{F}^{bey}}{\partial \widehat{\vartheta}_z} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T y^2 E_T \mathbf{B}^{\vartheta_z} dA + \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_z} dA = \\
 & (\mathbf{B}^{\vartheta_z})^T E_T I_y \mathbf{B}^{\vartheta_z} + (\mathbf{N}^{\vartheta_z})^T G_T A \mathbf{N}^{\vartheta_z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.149) \quad \mathbf{F}^{bez} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T z E_T \left[\mathbf{B}^u \widehat{\mathbf{u}} - y \mathbf{B}^{\vartheta_z} \widehat{\vartheta}_z + z \mathbf{B}^{\vartheta_y} \widehat{\vartheta}_y \right] dA \\
 & - \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T G_T \left[\mathbf{B}^w \widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{N}^{\vartheta_y} \widehat{\vartheta}_y + y \mathbf{B}^{\vartheta_x} \widehat{\vartheta}_x \right] dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\mathbf{u}}} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T z E_T \mathbf{B}^u dA = (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T E_T S_z \mathbf{B}^u \\
 \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\mathbf{v}}} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\mathbf{w}}} &= \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T \mathbf{B}^w G_T dA = (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T G_T A \mathbf{B}^w \\
 (1.150) \quad \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\vartheta}_x} &= \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T y G_T \mathbf{B}^{\vartheta_x} dA = (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T G_T S_y \mathbf{B}^{\vartheta_x} \\
 \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\vartheta}_y} &= \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T E_T z^2 \mathbf{B}^{\vartheta_y} dA + \int_A (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T G_T \mathbf{N}^{\vartheta_y} dA = \\
 & (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T E_T I_z \mathbf{B}^{\vartheta_y} + (\mathbf{N}^{\vartheta_y})^T G_T A \mathbf{N}^{\vartheta_y} \\
 \frac{\partial \mathbf{K}^{bez}}{\partial \widehat{\vartheta}_z} &= - \int_A (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T yz E_T \mathbf{B}^{\vartheta_z} dA = - (\mathbf{B}^{\vartheta_y})^T E_T I_{zy} \mathbf{B}^{\vartheta_z}
 \end{aligned}$$

1.3.4.1. *Il modello linked.* Anche nel caso tridimensionale è stato implementato un elemento caratterizzato da una formulazione del campo degli

spostamenti tale che risultassero dipendenti le rotazioni e gli spostamenti trasversali, in modo da evitare il locking nel caso di elementi particolarmente tozzi. Per ottenere tale risultato, il campo degli spostamenti trasversali è stato definito così:

$$(1.151) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\hat{\vartheta}_{z,1} - \hat{\vartheta}_{z,2}\right) l \\ \mathbf{w} &= - \left[\mathbf{N}\hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\hat{\vartheta}_{y,1} - \hat{\vartheta}_{y,2}\right) l \right] \end{aligned}$$

Le funzioni di link sono state scelte in modo che nel calcolo della γ_{xy} e della γ_{xz} , ove compare la derivata dello spostamento trasversale, esse si elidano col termine lineare della rotazione, per cui i risultati di una formulazione del genere siano equivalenti ad una integrazione ridotta valutando un solo punto di Gauss in mezzzeria dell'elemento.

1.4. Gli elementi a fibre

1.4.1. Le caratteristiche generali degli elementi a fibre. L'idea di base dell'approccio di analisi a fibre è quello di suddividere la trave che si sta analizzando in sottoelementi monodimensionali legati tra loro da condizioni di congruenza. Conoscendo gli spostamenti nodali dell'intera trave si calcola per ogni fibra la deformazione e da questa poi lo sforzo: in tale modo è possibile definire la risultante delle azioni interne su ogni sezione significativa dell'elemento, integrando gli sforzi relativi ad ogni fibra in corrispondenza della sezione considerata.

Tale metodologia consente di considerare per ogni fibra una differente legge costitutiva e nel caso del calcestruzzo armato di distinguere tra i materiali, specificando nella sezione quali sono le fibre di armatura e quali di calcestruzzo. Inoltre è possibile definire per ciascuna fibra una differente storia di deformazione, ovviamente, per le ipotesi fatte, nel rispetto della congruenza.

Il vantaggio principale di tale modo di procedere, ovvero valutando la trave come composta di tante fibre la cui sezione è più piccola rispetto alla sezione della trave, è dato dalla possibilità di utilizzare legami costitutivi monodimensionali. Tale modo di procedere si rivela particolarmente favorevole nel caso di trave alla Eulero-Bernoulli, nella quale, essendo nulla la deformazione di taglio, la sola deformazione assiale delle fibre è sufficiente a descrivere il comportamento dell'elemento. In tale caso è possibile implementare allora legami monodimensionali dei materiali più semplici da sviluppare e da gestire numericamente anche nel caso di azioni cicliche.

1.4.2. L'implementazione di elementi a fibre. Le differenze nell'implementazione di un elemento a fibre rispetto ad un elemento trave tradizionale riguardano principalmente due aspetti:

- la determinazione del modulo di legame E_T ;
- la determinazione del vettore delle forze interne.

Si suppone di partire dalla conoscenza delle caratteristiche della sezione e della configurazione di fibre, ipotizzando di conoscere:

- il numero delle fibre;
- il materiale di ciascuna fibra e quindi una legge costitutiva che permetta di ricavare la tensione dalla deformazione;
- l'area di ciascuna fibra;
- le coordinate del baricentro di ciascuna fibra.

Si assume inoltre che il codice fornisca, per ogni passo di iterazione, il valore degli spostamenti nodali della trave di tentativo, attraverso cui è possibile valutare la risultante delle forze interne, necessaria per calcolare il residuo.

Conoscendo gli spostamenti nodali è possibile calcolare quale sia il campo di deformazione nella sezione attraverso la relazione:

$$(1.152) \quad \varepsilon_{xx} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$$

nella quale \mathbf{B} è un vettore di operatori che applicato al vettore degli spostamenti nodali $\hat{\mathbf{u}}$ fornisce la componente del tensore delle deformazioni nella direzione dell'asse della trave, l'unica considerata in un problema monodimensionale.

Pertanto è possibile associare ad ogni fibra un valore per ciascuna componente di deformazione (figura 1.9). A questo punto, potendo disporre del legame costitutivo dei materiali è possibile calcolare sia il modulo elastico tangente, dato dalla relazione:

$$(1.153) \quad E_T = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}}$$

che le componenti della tensione agente, essendo:

$$(1.154) \quad \sigma_{xx} = \sigma(\varepsilon_{xx})$$

Dalla conoscenza degli sforzi agenti su ogni fibra è possibile arrivare a definire il vettore delle forze interne. Ad esempio, valutando l'azione assiale N , essa può essere vista come:

$$(1.155) \quad N = \sum_i A_i (\sigma_{xx})_i$$

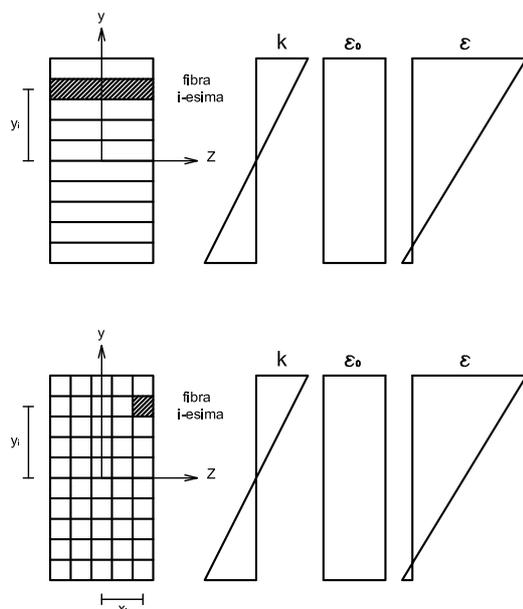


Figura 1.9: esempio di sezione a fibre con rappresentazione dell'andamento delle deformazioni.

dove i è l'indice delle fibre, con A_i area della singola fibra e $(\sigma_{xx})_i$ la tensione agente su ogni fibra. Allo stesso modo, volendo valutare il momento flettente agente M :

$$(1.156) \quad M = \sum_i A_i y_i (\sigma_{xx})_i$$

nella quale y_i è il braccio di leva del baricentro di ciascuna fibra rispetto all'asse di rotazione della sezione.

In secondo luogo è necessario calcolare i termini della matrice di rigidità dell'elemento alla luce del nuovo approccio a fibre. Nella matrice di rigidità sono infatti presenti i termini contenenti il momento di inerzia, il momento statico e l'area. Allo stesso modo di prima, tali grandezze sono

approssimate come:

$$(1.157) \quad \begin{aligned} A &= \sum_i A_i \\ S &= \sum_i A_i y_i \\ I &= \sum_i A_i y_i^2 \end{aligned}$$

nella quale ancora A_i è l'area della singola fibra e y_i è la coordinata del baricentro nella direzione significativa rispetto cui si stanno valutando le grandezze geometriche definite sopra.

È evidente che tale procedura comporta delle approssimazioni rispetto al problema valutato globalmente a livello di sezione, perché per ogni fibra si considera una tensione costante e perché si approssima la posizione dell'intera fibra con la coordinata del suo baricentro. D'altro canto l'approssimazione migliora velocemente all'aumentare delle fibre utilizzate.

1.4.2.1. *L'esempio di applicazione al modello alla Eulero-Bernoulli.* Valutando il campo degli spostamenti del caso bidimensionale, alla luce della (1.49), si può esprimere il campo delle deformazioni delle singole fibre come:

$$(1.158) \quad \varepsilon_i(x, y) = \varepsilon_0 - y_i \chi(x)$$

Se si assume che la i -esima fibra abbia area A_i e di modulo elastico E_i , le risultanti di sollecitazione della sezione sono:

$$(1.159) \quad \begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n A_i E_i \varepsilon_i(x, y) \\ M &= \sum_{i=1}^n A_i y_i E_i \varepsilon_i(x, y) \end{aligned}$$

pertanto:

$$(1.160) \quad \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_i E_i & \sum_{i=1}^n A_i E_i y_i \\ \sum_{i=1}^n A_i E_i y_i & \sum_{i=1}^n A_i E_i y_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ -\chi(x) \end{Bmatrix}$$

Risulta evidente che il modello a fibre considera automaticamente l'interazione tra la risposta assiale e quella flessionale, perché la risultante assiale di ogni fibra moltiplicata per il suo braccio fornisce il momento apportato dalla

fibra alla sezione globale.

1.4.2.2. *L'applicazione al modello alla Timoshenko.* Nel momento in cui si valuta la deformabilità a taglio non si può più ritenere che un modello monodimensionale sia sufficiente per ottenere una descrizione accettabile problema. Infatti è necessaria una formulazione più complessa che consenta quanto meno di sostituire la relazione che lega il modulo di taglio G_T al modulo elastico tangente E_T in campo lineare con un'altra valida in campo non lineare.

Dato che in tale lavoro si sono implementati soltanto legami dei materiali monodimensionali, non sono stati applicati nel modello con formulazione alla Timoshenko. Pertanto il modello alla Timoshenko è stato implementato soltanto con formulazione elastica ed elastoplastica, assumendo in quest'ultimo caso che ad un valore di E_T nullo corrispondesse un valore di G_T altrettanto nullo.

I modelli per il problema di trave in grandi spostamenti

2.1. La valutazione dei grandi spostamenti

Quando si esegue una analisi nel campo della meccanica del continuo è sempre possibile distinguere tra due configurazioni: la prima è quella alla quale si fa riferimento in un dato momento o condizione e che si considera di *riferimento*; la seconda, invece, è quella che si ottiene per effetto dell'applicazione di una funzione che induce un cambiamento di configurazione e si definisce configurazione *corrente*. Più in generale e quindi anche nel problema di trave, è possibile vedere come configurazione di riferimento quella indeformata e come configurazione corrente quella deformata.

In tutte le precedenti formulazioni si è assunto che le deformazioni e gli spostamenti fossero piccoli. Questo ha consentito di confondere la configurazione deformata con quella indeformata e ciò ha giustificato il fatto che, dopo aver valutato quali fossero gli spostamenti e quindi le deformazioni, si è valutato l'equilibrio nella configurazione indeformata.

In una trattazione generale del problema di trave non è però ammissibile trascurare gli effetti dovuti ai grandi spostamenti perché nel momento in cui essi intervengono cambia radicalmente la natura del problema. In tale capitolo si valuta la formulazione del problema di trave in grandi spostamenti.

2.1.1. Le relazioni cinematiche. Indichiamo con B un corpo e con X la posizione del generico punto materiale nella configurazione di riferimento Ω_0 ; tale punto può essere espresso, in termini di coordinate, come:

$$(2.1) \quad X = X_I E_I \quad I = 1, 2, 3$$

nella quale E_I è la base ortonormale di vettori nello spazio.

Nella configurazione corrente Ω la posizione di ogni punto può essere definita da un nuovo vettore, x esprimibile, evidenziando le componenti cartesiane, come:

$$(2.2) \quad x = x_i e_i \quad i = 1, 2, 3$$

In tale trattazione si assume che gli indici siano scelti in base alla configu-

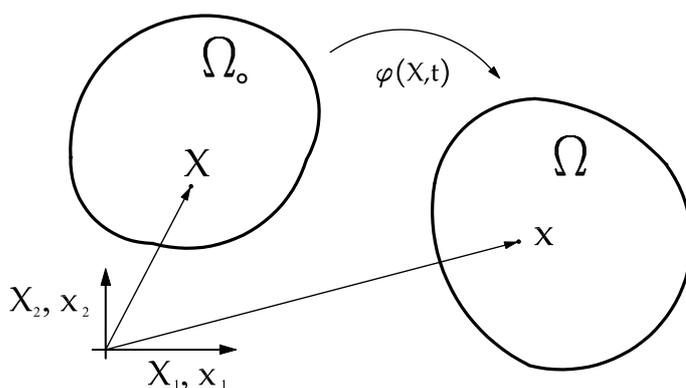


Figura 2.1: configurazione corrente e configurazione deformata in un generico problema di grandi spostamenti e deformazioni.

razione che si sta valutando: si avranno pertanto indici con le lettere maiuscole se riferiti a grandezze nella configurazione indeformata Ω_0 e indici con le lettere minuscole se riferiti alla configurazione deformata Ω . Inoltre, per semplicità, si assume che i sistemi di riferimento delle due configurazioni abbiano la stessa origine e la stessa direzione.

Il vettore posizione nella configurazione deformata è legato a quello della configurazione iniziale attraverso la relazione:

$$(2.3) \quad x_i = \varphi_i(X_I, t)$$

mentre il vettore che consente di passare dal punto di posizione indeformata X al punto di posizione corrente x è il vettore u :

$$(2.4) \quad x = X + u$$

Una misura fondamentale è il gradiente di deformazione relativo a X , dato da:

$$(2.5) \quad F_{iI} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_I}$$

sottoposto al vincolo:

$$(2.6) \quad J = \det (F_{iI}) > 0$$

Il gradiente di deformazione consente di operare una mappatura diretta dalla configurazione di riferimento alla configurazione corrente (figura 2.1) dato che:

$$(2.7) \quad dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_I} dX_I = F_{iI} dX_I$$

oltre che mappare un volume generico dal riferimento indeformato a quello indeformato:

$$(2.8) \quad dv = JdV$$

Il gradiente di deformazione \mathbf{F} permette anche di ricavare il tensore della deformazione di Green, esprimibile come:

$$(2.9) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

2.2. Il problema della trave in grandi spostamenti

2.2.1. La formulazione del problema in spostamenti e rotazioni finite.

Si suppone di studiare il problema della trave in grandi spostamenti nel caso generale.

2.2.1.1. *Il problema di campo.* In generale la trasformazione che consente di passare dalla configurazione indeformata Ω_0 alla configurazione deformata Ω può essere espressa come:

$$(2.10) \quad \varphi_i \equiv x_i = X_i^0 + \Theta_{iI} Z_I$$

nella quale, dato un generico punto sulla sezione che si considera, X_i^0 è lo spostamento del punto della sezione posto sull'asse della trave, Z_I è la posizione del punto che si sta considerando e Θ_{iI} è la matrice che consente di determinare la rotazione della sezione. In generale, nel caso tridimensionale si ha:

$$(2.11) \quad \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 + \mathbf{\Theta} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

nella quale \mathbf{X} è il vettore posizione del punto considerato nella configurazione indeformata, \mathbf{x} il vettore posizione nella configurazione deformata, \mathbf{u}_0 è il vettore spostamento del punto sull'asse della trave nella sezione considerata,

Θ è la matrice della rotazione della sezione e X_0 è la posizione indeformata dell'asse della trave sulla sezione, come illustra la figura 2.2.

Considerando che le coordinate di riferimento della trave siano $X_1 \equiv X$

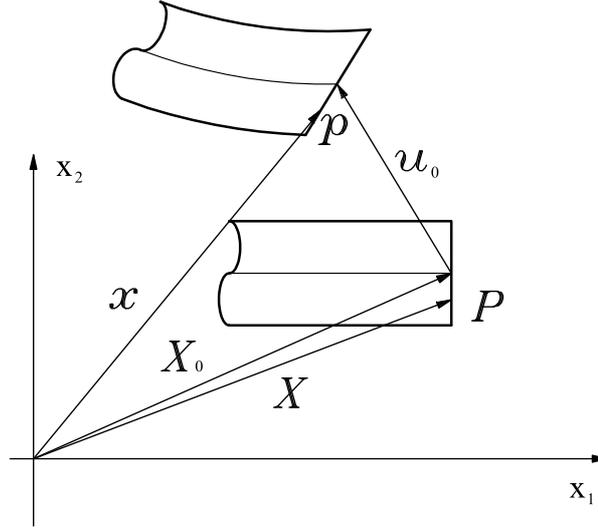


Figura 2.2: definizione della posizione del punto p della configurazione deformata facendo riferimento alla posizione nella configurazione indeformata del rispettivo punto P.

(che definisce la direzione dell'asse), $X_2 \equiv Y$ e $X_3 \equiv Z$ (essendo queste le direzioni del piano della sezione di trave) la (2.11) può essere riscritta come:

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Supponendo poi che l'asse della trave sia coincidente con l'asse X e che quindi $Y_0 = Z_0 = 0$, mentre $X = X_0$, l'espressione della posizione del generico punto P diventa:

$$(2.13) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Dalla espressione (2.15) del campo degli spostamenti si ha che la sezione è

supposta piana anche dopo la deformazione, ma non si assume che rimanga anche normale all'asse della trave, pertanto è possibile considerare una deformazione a taglio non nulla.

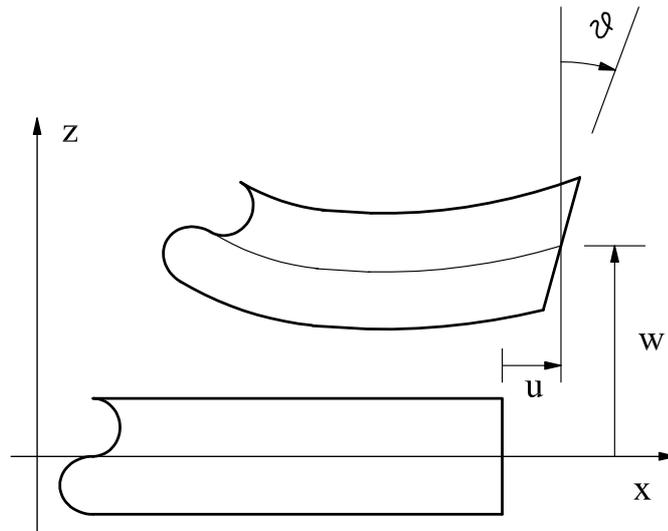


Figura 2.3: configurazione di trave bidimensionale deformata.

Valutando un caso piano, rappresentato in figura 2.3 e volendo definire il campo degli spostamenti, si ha che la matrice rotazione assume la forma:

$$(2.14) \quad \Theta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

che è relativa ad una relazione del tipo:

$$(2.15) \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \Theta \begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

nella quale si sono compiute le opportune semplificazioni. Infatti, valutando ad esempio la componente trasversale della posizione, si avrebbe:

$$(2.16) \quad z = Z + w(X) - Z(1 - \cos \vartheta) = w(x) + \cos \vartheta$$

Pertanto la (2.12) si specializza in:

$$(2.17) \quad \begin{cases} x = X + u(X) + Z \sin \vartheta(X) \\ y = Y \\ z = w(X) + Z \cos \vartheta(X) \end{cases}$$

Questo campo di spostamenti è esatto perché per ottenerlo non si sono compiute approssimazioni di alcun tipo.

Volendo ora calcolare il gradiente di deformazione, esso è pari a:

$$(2.18) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 + u_{,X} + Z\vartheta_{,X} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ w_{,X} - Z\vartheta_{,X} \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

e dalla (2.18) è possibile ricavare il tensore di deformazione applicando la relazione (2.9). Le uniche componenti non nulle sono:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} 2E_{XX} &= (1 + u_{,X} + Z\vartheta_{,X} \cos \vartheta)^2 + (w_{,X} - Z\vartheta_{,X} \sin \vartheta)^2 - 1 = \\ &= 1 + u^2_{,X} + Z^2\vartheta^2_{,X} \cos^2 \vartheta + w^2_{,X} + Z^2\vartheta^2_{,X} \sin^2 \vartheta + 2u_{,X} \\ &\quad + 2Z\vartheta_{,X} \cos \vartheta + 2u_{,X} Z\vartheta_{,X} \cos \vartheta - 2w_{,X} Z\vartheta_{,X} \sin \vartheta - 1 = \\ &= 2u_{,X} + u^2_{,X} + w^2_{,X} + 2Z(1 + u_{,X})\vartheta_{,X} \cos \vartheta - 2Zw_{,X} \vartheta_{,X} \sin \vartheta + \\ &\quad + Z^2\vartheta^2_{,X} \cos^2 \vartheta + Z^2\vartheta^2_{,X} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

$$(2.20) \quad \begin{aligned} 2E_{XZ} &= (1 + u_{,X} + Z\vartheta_{,X} \cos \vartheta) \sin \vartheta + (w_{,X} - Z\vartheta_{,X} \sin \vartheta) \cos \vartheta = \\ &= (1 + u_{,X}) \sin \vartheta + w_{,X} \cos \vartheta \end{aligned}$$

e quindi:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} 2E_{XX} &= 2u_{,X} + u^2_{,X} + w^2_{,X} + 2Z(1 + u_{,X})\vartheta_{,X} \cos \vartheta - 2Zw_{,X} \vartheta_{,X} \sin \vartheta + \\ &\quad + Z^2\vartheta^2_{,X} \cos^2 \vartheta + Z^2\vartheta^2_{,X} \sin^2 \vartheta \\ 2E_{Xz} &= (1 + u_{,X}) \sin \vartheta + w_{,X} \cos \vartheta \end{aligned}$$

Valutando la (2.19) e trascurando i termini quadratici in Z , ovvero supponendo che la trave sia sottile rispetto alla lunghezza, l'espressione di E_{XX} si semplifica diventando:

$$(2.22) \quad E_{XX} = u_{,X} + \frac{1}{2}(u^2_{,X} + w^2_{,X}) + Z\Lambda\vartheta_{,X}$$

nella quale Λ è pari a:

$$(2.23) \quad \Lambda = (1 + u_{,X}) \cos \vartheta - w_{,X} \sin \vartheta$$

Volendo ora esprimere le (2.19) e (2.20) evidenziando i contributi di deformazione, si ha:

$$(2.24) \quad E_{XX} = E^0 + ZK$$

$$(2.25) \quad E_{XZ} = \frac{1}{2} \Gamma$$

nelle quali E^0 e Γ sono le deformazioni costanti nella sezione, mentre K misura la variazione di rotazione, ovvero la curvatura, della sezione:

$$(2.26) \quad E^0 = u_{,X} + \frac{1}{2} (u^2_{,X} + w^2_{,X})$$

$$(2.27) \quad K = \Lambda \vartheta_{,X}$$

$$(2.28) \quad \Gamma = (1 + u_{,X}) \sin \vartheta + w_{,X} \cos \vartheta$$

L'equazione variazionale del problema può essere scritta come:

$$(2.29) \quad \delta \Pi = \int_{\Omega} (\delta E_{XX} S_{XX} + 2\delta E_{XZ} S_{XZ}) d\Omega - \delta \Pi_{ext}$$

nella quale Π_{ext} sono le forze esterne agenti sulla trave, mentre δE_{XX} e δE_{XZ} sono le variazioni delle deformazioni definite nella (2.24) e nella (2.25). Pensando di suddividere l'integrale della (2.29) in un integrale prima sulla sezione e poi sulla lunghezza dell'elemento, è possibile definire le forze interne del sistema:

$$(2.30) \quad T = \int_A S_{XX} dA$$

$$(2.31) \quad S = \int_A S_{XZ} dA$$

$$(2.32) \quad M = \int_A S_{XX} Z dA$$

essendo A la sezione della trave. Pertanto alla luce delle relazioni precedenti, ovvero sostituendo prima le (2.24) e (2.26) nella (2.29) e poi integrando sulla sezione, è possibile riscrivere la (2.29) come:

$$(2.33) \quad \delta \Pi = \int_L (\delta E^0 T + \delta \Gamma S + \delta K M) d\Omega - \delta \Pi_{ext}$$

Le componenti di deformazione linearizzate sono:

$$(2.34) \quad \delta E^0 = (1 + u_{,X}) \delta u_{,X} + w_{,X} \delta w_{,X}$$

$$(2.35) \quad \delta \Gamma = \delta u_{,X} \sin \vartheta + (1 + u_{,X}) \cos \vartheta \delta \vartheta + \delta w_{,X} \cos \vartheta - w_{,X} \sin \vartheta \delta \vartheta = \\ = \delta u_{,X} \sin \vartheta + \delta w_{,X} \cos \vartheta + \Lambda \delta \vartheta$$

$$(2.36) \quad \delta K = \delta (\Lambda \vartheta_{,X}) = \vartheta_{,X} \cos \vartheta \delta u_{,X} - \vartheta_{,X} \sin \vartheta \delta w_{,X} + \Lambda \delta \vartheta_{,X} + \\ - \underbrace{(\vartheta_{,X} \sin \vartheta + u_{,X} \vartheta_{,X} \sin \vartheta + \vartheta_{,X} w_{,X} \cos \vartheta)}_{\vartheta_{,X} [(1+u_{,X}) \sin \vartheta + w_{,X} \cos \vartheta]} = \\ = \vartheta_{,X} \cos \vartheta \delta u_{,X} - \vartheta_{,X} \sin \vartheta \delta w_{,X} + \Lambda \delta \vartheta_{,X} + \Gamma \vartheta_{,X}$$

e quindi:

$$(2.37) \quad \delta E^0 = (1 + u_{,X}) \delta u_{,X} + w_{,X} \delta w_{,X}$$

$$(2.38) \quad \delta \Gamma = \delta u_{,X} \sin \vartheta + \delta w_{,X} \cos \vartheta + \Lambda \delta \vartheta$$

$$(2.39) \quad \delta K = \vartheta_{,X} \cos \vartheta \delta u_{,X} - \vartheta_{,X} \sin \vartheta \delta w_{,X} + \Lambda \delta \vartheta_{,X} + \Gamma \vartheta_{,X}$$

2.2.1.2. *L'approssimazione col metodo degli elementi finiti.* Le approssimazioni del metodo agli elementi finiti prevedono di esprimere gli spostamenti come prodotto di una funzione di forma per gli spostamenti nodali. Supponendo di valutare l'elemento trave bidimensionale a due nodi, si hanno sei spostamenti nodali; allora è possibile porre:

$$(2.40) \quad \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(X) \left\{ \hat{u}_1, \hat{w}_1, \hat{\vartheta}_1, \hat{u}_2, \hat{w}_2, \hat{\vartheta}_2 \right\}^T$$

nella quale si definisce il vettore spostamento applicando l'operatore \mathbf{N} al vettore degli spostamenti nodali che nel caso bidimensionale a due nodi è un vettore di dimensione $[6 \times 1]$. Ovviamente pertanto, \mathbf{N} è un $[3 \times 6]$ così composto:

$$(2.41) \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^w & 0 & 0 & N_2^w & 0 \\ 0 & 0 & N_1^\vartheta & 0 & 0 & N_2^\vartheta \end{bmatrix}$$

nel quale sono presenti sei componenti non nulle relative ai tre gradi di libertà per ciascuno dei due nodi.

Esprimendo le approssimazioni degli spostamenti nella forma:

$$(2.42) \quad u = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}^u \hat{u}_{\alpha} \quad w = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}^w \hat{w}_{\alpha} \quad \vartheta = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}^{\vartheta} \hat{\vartheta}_{\alpha}$$

è possibile riscrivere la (2.40) come:

$$(2.43) \quad \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{N}_{\alpha}(X) \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\alpha} \\ \hat{w}_{\alpha} \\ \hat{\vartheta}_{\alpha} \end{Bmatrix}$$

nella quale l'operatore \mathbf{N}_{α} è di dimensione [3X3]:

$$(2.44) \quad \mathbf{N}_{\alpha} = \begin{bmatrix} N_{\alpha}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{\alpha}^w & 0 \\ 0 & 0 & N_{\alpha}^{\vartheta} \end{bmatrix}$$

Utilizzando l'approssimazione (2.42) il lavoro virtuale può essere espresso come:

$$(2.45) \quad \delta \Pi_{\alpha} = [\delta u \quad \delta w \quad \delta \vartheta]_{\alpha} \int_L \mathbf{B}_{\alpha}^T \begin{Bmatrix} T \\ S \\ M \end{Bmatrix} dX - \delta (\Pi_{ext})_{\alpha}$$

nella quale per le relazioni di linearizzazione (2.37), (2.38) e (2.39) l'operatore \mathbf{B}_{α} è data da:

$$(2.46) \quad \mathbf{B}_{\alpha} = \begin{bmatrix} (1 + u_{,X}) N_{\alpha}^u & w_{,X} N_{\alpha}^w & 0 \\ \sin \vartheta N_{\alpha}^u & \cos \vartheta N_{\alpha}^w & \Lambda N_{\alpha}^{\vartheta} \\ \vartheta_{,X} \cos \vartheta N_{\alpha}^u & -\vartheta_{,X} \sin \vartheta N_{\alpha}^w & (\Lambda N_{\alpha}^{\vartheta} - \Gamma \vartheta_{,X} N_{\alpha}^{\vartheta}) \end{bmatrix}$$

Ovviamente è possibile passare dalla matrice \mathbf{B}_{α} alla matrice \mathbf{B} completa di dimensione [3X6].

$$(2.47) \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]$$

La notevole differenza che emerge analizzando la forma della matrice \mathbf{B} nel caso di grandi spostamenti rispetto a quella ottenuta nel caso dei piccoli spostamenti è che la (2.46) è funzione degli spostamenti, mentre le matrici viste precedentemente erano costanti rispetto ad essi, dipendendo solo dalle funzioni di forma.

La formulazione del problema in forma residuale porta a scrivere il residuo al passo $(n + 1)$ come:

$$(2.48) \quad \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{ext} - \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{V}_{n+1} dX$$

nella quale \mathbf{V} è il vettore delle azioni interne valutate nella sezione:

$$(2.49) \quad \mathbf{V}_{n+1} = \begin{Bmatrix} T_{n+1} \\ S_{n+1} \\ M_{n+1} \end{Bmatrix}$$

Si calcola il residuo definito come nella (2.48) per ogni elemento e si impone che il residuo totale, dato dalla somma del contributo di ogni elemento, sia pari a zero.

Per procedere con la ricerca della soluzione alla Newton-Raphson è necessario valutare la linearizzazione della (2.48) che porta ad avere:

$$(2.50) \quad \delta (\mathbf{B}^T \mathbf{V}) = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{V} + \delta (\mathbf{B}^T) \mathbf{V}$$

Il primo termine che risulta dalla linearizzazione è il termine della matrice di rigidezza del materiale, mentre il secondo termine è il termine della matrice di rigidezza geometrica (\mathbf{K}_G).

Nei piccoli spostamenti l'operatore \mathbf{B} è funzione delle sole funzioni di forma e quindi vale la relazione:

$$(2.51) \quad \delta (\mathbf{B}^T) = 0 \Rightarrow \delta (\mathbf{B}^T \mathbf{V}) = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{V}$$

nel caso che si sta trattando, però, il secondo termine della (2.50) non è nullo, ma contribuisce a definire la parte geometrica della matrice di rigidezza.

Supponendo allora di valutare un materiale per il quale la matrice \mathbf{D}_T è la matrice che lega gli sforzi alla deformazioni, ovvero:

$$(2.52) \quad \mathbf{S} = \mathbf{D}_T \mathbf{E}$$

tenendo inoltre conto che:

$$(2.53) \quad \mathbf{E} = \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{u}}$$

risulta che la linearizzazione della (2.48) è data da:

$$(2.54) \quad \mathbf{K}_T = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} dX + (\mathbf{K}_G)$$

nella quale l'espressione della \mathbf{K}_G che deriva dal termine $\delta(\mathbf{B}^T)\mathbf{V}$ della linearizzazione è definibile partendo da:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K}_G)_{\alpha\beta} = & \int_L \mathbf{N}_{\alpha,X} \begin{bmatrix} T & 0 & M \cos \vartheta \\ 0 & T & -M \sin \vartheta \\ M \cos \vartheta & -M \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\beta,X} + \\
 (2.55) \quad & + \mathbf{N}_\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \mathbf{N}_\beta + \mathbf{N}_{\alpha,X} \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_1 \\ 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & -M\Gamma \end{bmatrix} \mathbf{N}_\beta + \\
 & + \mathbf{N}_\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & -M\Gamma \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\beta,X}
 \end{aligned}$$

nella quale:

$$(2.56) \quad G_1 = S \cos \vartheta - M \vartheta_{,X} \sin \vartheta$$

$$(2.57) \quad G_2 = -S \sin \vartheta - M \vartheta_{,X} \cos \vartheta$$

$$(2.58) \quad G_3 = -S\Gamma - M \vartheta_{,X} \Lambda$$

con gli indici α e β che vanno da 1 a 2, mentre la matrice geometrica \mathbf{K}_G è di dimensione [6X6] composta da:

$$(2.59) \quad \mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_G)_{11} & (\mathbf{K}_G)_{12} \\ (\mathbf{K}_G)_{21} & (\mathbf{K}_G)_{22} \end{bmatrix}$$

2.2.2. La formulazione del problema in spostamenti finiti e rotazioni piccole. In molte applicazioni è possibile trascurare il contributo della rotazione della sezione della trave che può essere assunto infinitesimo; questo significa approssimare le funzioni trigonometriche col primo termine del loro sviluppo in serie ponendo:

$$(2.60) \quad \sin \vartheta \approx \vartheta$$

$$(2.61) \quad \cos \vartheta \approx 1$$

2.2.2.1. *Deformazione di taglio non nulla.* In questo caso la (2.17) diventa:

$$(2.62) \quad \begin{cases} x = X + u(X) + Z\vartheta(X) \\ y = Y \\ z = w(X) + Z \end{cases}$$

mentre il gradiente di deformazione assume la forma:

$$(2.63) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 + u_{,X} + Z\vartheta_{,X} & 0 & \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ w_{,X} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nella quale si sono trascurati i termini in Z^2 ed i prodotti delle derivate degli spostamenti con ϑ e $\vartheta_{,X}$. Le componenti significative sono:

$$(2.64) \quad E_{XX} = u_{,X} + \frac{1}{2}(u^2_{,X} + w^2_{,X}) + Z\vartheta_{,X} + \frac{1}{2}Z^2\vartheta^2_{,X} + u_{,X} Z\vartheta_{,X}$$

$$(2.65) \quad 2E_{XZ} = w_{,X} + \vartheta + \vartheta u_{,X} + \vartheta Z\vartheta_{,X}$$

e nelle stesse ipotesi riportate sopra, ovvero di trascurare i termini in Z^2 ed i prodotti delle derivate degli spostamenti con ϑ e $\vartheta_{,X}$ le componenti non nulle della deformazione sono:

$$(2.66) \quad E_{XX} = u_{,X} + \frac{1}{2}(u^2_{,X} + w^2_{,X}) + Z\vartheta_{,X} = E^0 + ZK$$

$$(2.67) \quad 2E_{XZ} = w_{,X} + \vartheta = \Gamma$$

Linearizzando le componenti della deformazione si ottiene:

$$(2.68) \quad \begin{cases} \delta E^0 = (1 + u_{,X}) \delta u_{,X} + w_{,X} \delta w_{,X} \\ \delta \Gamma = \delta w_{,X} + \delta \vartheta \\ \delta K = \delta \vartheta_{,X} \end{cases}$$

Introducendo le approssimazioni al campo degli spostamenti come nella (2.40) e nella (2.41) è possibile ottenere l'operatore \mathbf{B}_α che è dato da:

$$(2.69) \quad \mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} (1 + u_{,x})N_{\alpha,X}^u & w_{,X} N_{\alpha,X}^w & 0 \\ 0 & N_{\alpha,X}^w & N_{\alpha}^\vartheta \\ 0 & 0 & N_{\alpha,X}^\vartheta \end{bmatrix}$$

mentre per ottenere l'operatore completo \mathbf{B} di dimensione $[3 \times 6]$ è possibile ricorrere ancora alla (2.47).

D'altra parte, la matrice di rigidezza tangente è ancora definita dalla relazione (2.50), nella quale il termine \mathbf{K}_G di dimensione [6X6] è dato dalla (2.59). In questo caso però la matrice $(\mathbf{K}_G)_{\alpha\beta}$ di dimensione [3X3] è definita da:

$$(2.70) \quad (\mathbf{K}_G)_{\alpha\beta} = \int_L \mathbf{N}_{\alpha,X} \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\beta,X} dX$$

con α e β che vanno da 1 a 2, mentre T è l'azione assiale definita nella 2.30.

2.2.2.2. *Deformazione di taglio nulla.* Considerando ancora un elemento trave a due nodi, assumendo però che le deformazioni di taglio siano nulle, ovvero $\Gamma = 0$, si ottiene:

$$(2.71) \quad \vartheta = -w_{,X}$$

Si approssima ora il campo degli spostamenti in modo da avere:

$$(2.72) \quad u = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}^u \hat{u}$$

$$(2.73) \quad w = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}^w \hat{w} + N_{\alpha}^{\vartheta} \hat{\vartheta}$$

nella quale $\hat{\vartheta} \equiv \hat{w}_{,X}$ nei nodi.

L'equazione residuale è questa volta pari a:

$$(2.74) \quad \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{V}_{ext} - \int_L \mathbf{B}^T \begin{Bmatrix} T_{n+1} \\ M_{n+1} \end{Bmatrix} dX = \mathbf{0}$$

L'operatore \mathbf{B} può essere ancora definito attraverso la relazione (2.47), essendo l'operatore \mathbf{B}_{α} dato da:

$$(2.75) \quad \mathbf{B}_{\alpha} = \begin{bmatrix} (1 + u_{,X}) N_{\alpha}^u{}_{,X} & w_{,X} N_{\alpha}^w{}_{,X} & w_{,X} N_{\alpha}^{\vartheta}{}_{,X} \\ 0 & -N_{\alpha}^w{}_{,XX} & -N_{\alpha}^{\vartheta}{}_{,XX} \end{bmatrix}$$

La componente geometrica della matrice di rigidezza è ancora data dalla linearizzazione del termine $\mathbf{B}^T \mathbf{V}$ valutato per \mathbf{V} costante.

Tenendo conto che il campo delle rotazioni è espresso in questo caso in funzione degli spostamenti trasversali, possono essere introdotti i vettori \mathbf{N}^u e \mathbf{N}^w , definiti come:

$$(2.76) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}^u &= (N_1^u \quad 0 \quad 0 \quad N_2^u \quad 0 \quad 0) \\ \mathbf{N}^w &= (0 \quad N_1^w \quad N_1^{\vartheta} \quad 0 \quad N_2^w \quad N_2^{\vartheta}) \end{aligned}$$

tali da permettere di esprimere le deformazioni nella forma:

$$(2.77) \quad \varepsilon = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} (1 + u_{,X}) \mathbf{N}_{,X}^u + w_{,X} \mathbf{N}_{,X}^w \\ - \mathbf{N}_{,XX}^w \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}$$

Per la stessa ragione è possibile esprimere la quantità $\mathbf{B}^T \mathbf{V}$ come:

$$(2.78) \quad \mathbf{B}^T \mathbf{V} = [(1 + u_{,X}) \mathbf{N}_{,X}^u + w_{,X} \mathbf{N}_{,X}^w]^T T - (\mathbf{N}_{,XX}^w)^T M$$

e quindi:

$$(2.79) \quad \delta(\mathbf{B}^T) \mathbf{V} = T \left[(\mathbf{N}_{,X}^u)^T \delta u_{,X} + (\mathbf{N}_{,X}^w)^T \delta w_{,X} \right] = \\ T \left[(\mathbf{N}_{,X}^u)^T \mathbf{N}_{,X}^u + (\mathbf{N}_{,X}^w)^T \mathbf{N}_{,X}^w \right] \delta \hat{\mathbf{u}}$$

Pertanto la matrice geometrica tangente è data da:

$$(2.80) \quad (\mathbf{K}_G)_{\alpha\beta} = \int_L \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_{\alpha,X}^u)^T T \mathbf{N}_{\beta,X}^u & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{N}_{\alpha,X}^w)^T T \mathbf{N}_{\beta,X}^w & (\mathbf{N}_{\alpha,X}^w)^T T \mathbf{N}_{\beta,X}^\vartheta \\ 0 & (\mathbf{N}_{\alpha,X}^\vartheta)^T T \mathbf{N}_{\beta,X}^w & (\mathbf{N}_{\alpha,X}^\vartheta)^T T \mathbf{N}_{\beta,X}^\vartheta \end{bmatrix} dX$$

Con α e β che assumono valore 1 e 2 in modo che la \mathbf{K}_G sia di dimensione [6X6].

Essa può anche essere riscritta nella forma:

$$(2.81) \quad (\mathbf{K}_G)_{\alpha\beta} = \int_L \mathbf{N}_{\alpha,X}^T \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\beta,X} dX$$

dove si ha che:

$$(2.82) \quad \mathbf{N}_{\alpha} = \begin{bmatrix} N_{\alpha}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{\alpha}^w & N_{\alpha}^\vartheta \end{bmatrix}$$

2.3. La verifica dell'elemento elastico in grandi spostamenti

Prima di procedere alla implementazione del legame costitutivo dei materiali nell'elemento in grandi spostamenti è stato valutato quale fosse il comportamento esibito utilizzando un legame elastico.

2.3.1. Le prove per spostamenti piccoli. Sono state eseguite delle prove per verificare innanzi tutto la coincidenza dei risultati tra l'elemento in grandi e quello in piccoli spostamenti quando lo spostamento è molto piccolo in relazione alla lunghezza dell'elemento; inoltre, utilizzando per uno stesso problema la formulazione in grandi spostamenti e quella in piccoli spostamenti, si è ritenuto significativo identificare quale sia il limite per il quale si manifesta una differenziazione tra i risultati delle due modalità di approccio.

Le prove sono state compiute su una trave bidimensionale le cui caratteristiche sono:

- lunghezza: $10m$
- base sezione: $0.2m$
- altezza sezione: $0.5m$
- fibre utilizzate per descrivere la sezione: 200
- modulo di elasticità : $10^8 Pa$

La trave è orientata avendo l'asse coincidente con l'asse x del sistema di riferimento, mentre i carichi di taglio sono assegnati in direzione z , che è la direzione dell'altezza della sezione, e i momenti flettenti causano una rotazione attorno all'asse y .

Il primo nodo, dove si valutano le reazioni vincolari, è incastrato, mentre il secondo, quello caricato e dove si valutano gli spostamenti, è libero.

Sono state compiute tre prove, applicando prima un'azione assiale, poi una forza tagliante ed infine un momento flettente e confrontando i risultati ottenuti con l'elemento a fibre sviluppato in grandi spostamenti, con quello sviluppato in piccoli spostamenti e con l'elemento *frame finite* di FEAP (tabelle 1 - 3). I carichi unitari applicati sono stati moltiplicati per un fattore di carico pari a 0.01.

Si sono poi compiute le medesime prove al variare della lunghezza della mensola (diventata pari a $100m$) ma lasciando costante la sezione (tabelle 4 - 6).

Si indica con u lo spostamento assiale, con w lo spostamento tagliante e con ϑ la rotazione.

Le prove hanno evidenziato che per spostamenti piccoli le due formulazioni, in piccoli spostamenti ed in grandi spostamenti, forniscono gli stessi risultati; l'unica eccezione riguarda l'elemento di FEAP *frame finite* che nella prova di taglio fornisce uno spostamento trasversale differente dagli altri due valori.

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$1.000E(-08)$	$1.000E(-08)$	$1.000E(-08)$
w	$4.9298E(-24)$	$2.1025E(-23)$	$0.0000E(+00)$
ϑ	$9.8596E(-25)$	$3.2232E(-24)$	$0.0000E(+00)$

Tabella 1: prova della mensola lunga $10m$ soggetta ad una forza assiale unitaria moltiplicata per il fattore di carico.

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$-1.5601E(-11)$	$2.2736E(-23)$	$-7.2482E(-12)$
w	$1.6000E(-05)$	$1.6000E(-05)$	$1.2050E(-05)$
ϑ	$2.4001E(-06)$	$2.4001E(-06)$	$2.4038E(-06)$

Tabella 2: prova della mensola lunga $10m$ soggetta ad una forza tagliante unitaria moltiplicata per il fattore di carico.

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$-3.8402E(-13)$	$-7.3483E(-24)$	$-2.8890E(-13)$
w	$2.4001E(-06)$	$2.4001E(-06)$	$2.4038E(-06)$
ϑ	$4.8001E(-07)$	$4.8001E(-07)$	$4.8077E(-07)$

Tabella 3: prova della mensola lunga $10m$ soggetta ad un momento unitario moltiplicata per il fattore di carico.

2.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO ELASTICO IN GRANDI SPOSTAMENTI

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$1.000E(-07)$	$1.000E(-07)$	$1.000E(-07)$
w	$-1.0916E(-21)$	$9.4371E(-22)$	$0.0000E(+00)$
ϑ	$-2.1836E(-23)$	$1.5058E(-23)$	$0.0000E(+00)$

Tabella 4: prova della mensola lunga $100m$ soggetta ad una forza assiale unitaria moltiplicata per il fattore di carico.

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$-1.5573E(-06)$	$5.1950E(-23)$	$-7.2234E(-07)$
w	$1.5986E(-02)$	$1.6000E(-02)$	$1.2020E(-02)$
ϑ	$2.3974E(-04)$	$2.4001E(-04)$	$2.4038E(-04)$

Tabella 5: prova della mensola lunga $100m$ soggetta ad una forza tagliante unitaria moltiplicata per il fattore di carico.

Spostamento	El. grandi sp.	El. piccoli sp.	El. fr. finite
u	$-3.8402E(-10)$	$-2.0667E(-23)$	$-2.8891E(-10)$
w	$2.4001E(-04)$	$2.4001E(-04)$	$2.4038E(-04)$
ϑ	$4.8001E(-06)$	$4.8001E(-06)$	$4.8077E(-06)$

Tabella 6: prova della mensola lunga $100m$ soggetta ad un momento unitario moltiplicata per il fattore di carico.

2.3.2. Le prove per spostamenti molto grandi. Prove simili alle precedenti sono state compiute imponendo carichi che portassero a spostamenti che fossero molto grandi, ovvero dello stesso ordine di grandezza della dimensione principale della trave. Tali prove sono state effettuate anche variando il numero di elementi che compongono la trave, descritta prima con un solo elemento e poi con 100 elementi. Riferendosi ai grafici delle figure 2.4 - 2.8, la linea tratteggiata indica l'elemento sviluppato a fibre in grandi spostamenti, la linea puntinata l'elemento a fibre in piccoli spostamenti mentre la linea con alternati trattini e punti indica l'elementi frame finite di FEAP.

I risultati della prova assiale (figura 2.4) hanno evidenziato che il comportamento non varia in maniera significativa all'aumentare del numero degli elementi e che lo spostamento assiale anche nella formulazione in grandi spostamenti non si discosta troppo dal comportamento elastico.

Per quanto riguarda invece la prova nel caso di azione di taglio agente, si è notata una grande differenza al variare del numero degli elementi utilizzati (figure 2.5 - 2.7). In generale, all'aumentare del numero di elementi la descrizione sia dello spostamento trasversale che della rotazione avviene in maniera migliore, presumibilmente perché si riesce a cogliere in maniera migliore la descrizione della deformata. Utilizzando un solo elemento invece si ha che per grandi carichi lo spostamento è molto ridotto, sia in termini di w che di ϑ . D'altro canto, utilizzando 100 elementi si identifica bene il momento in cui interviene in maniera significativa anche nella prova di taglio lo spostamento assiale, che corrisponde al punto angoloso della curva in grandi spostamenti che si allontana dall'andamento della curva in piccoli spostamenti.

Lo stesso aspetto che si percepisce dalla figura 2.7 lo si coglie particolarmente bene nella prova in cui si applica un momento all'estremo libero della trave (figura 2.8). In questa prova, se si modella la trave con un solo elemento si ottengono dei risultati molto differenti rispetto al caso della formulazione frame finite che coincidono con quelli della formulazione in piccoli spostamenti.

2.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO ELASTICO IN GRANDI SPOSTAMENTI

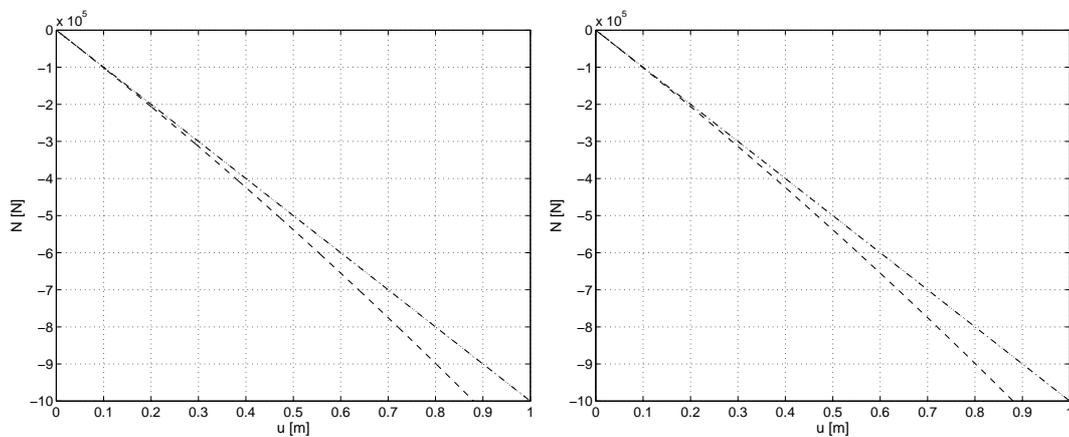


Figura 2.4: grafici $N - u$ della prova assiale eseguita utilizzando 1 elemento (sinistra) e 100 elementi (destra).

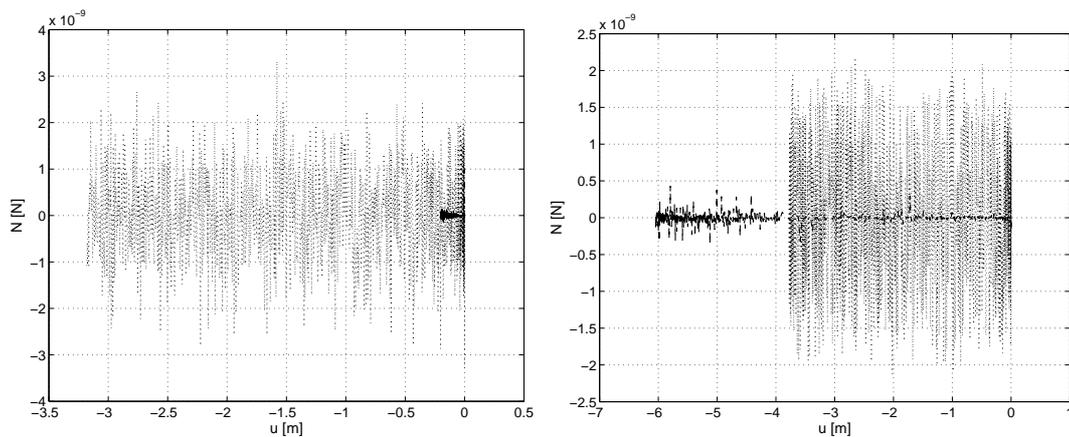


Figura 2.5: grafici $N - u$ della prova di taglio eseguita utilizzando 1 elemento (sinistra) e 100 elementi (destra); lo spostamento assiale è nullo nella formulazione in piccoli spostamenti, è dato dall'andamento più ampio nella formulazione frame finite di FEAP, mentre è definito dal tratto più scuro nella formulazione in grandi spostamenti.

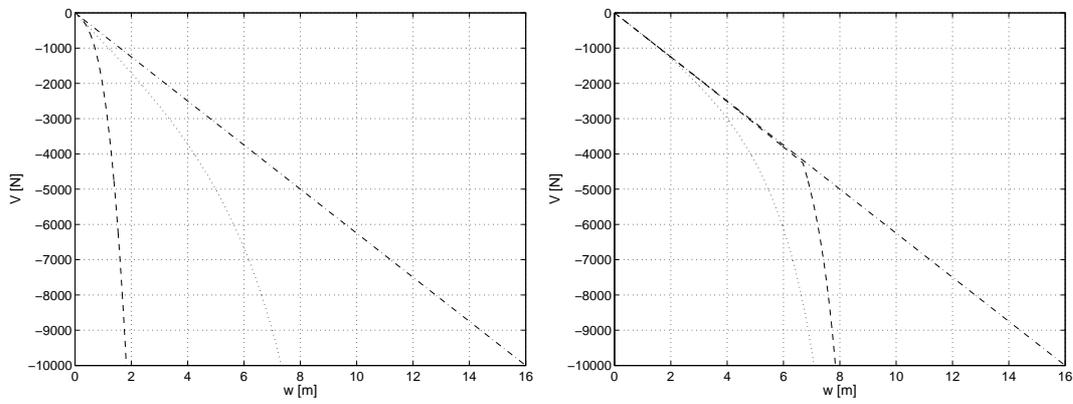


Figura 2.6: grafici $V - w$ della prova di taglio eseguita utilizzando 1 elemento (sinistra) e 100 elementi (destra).

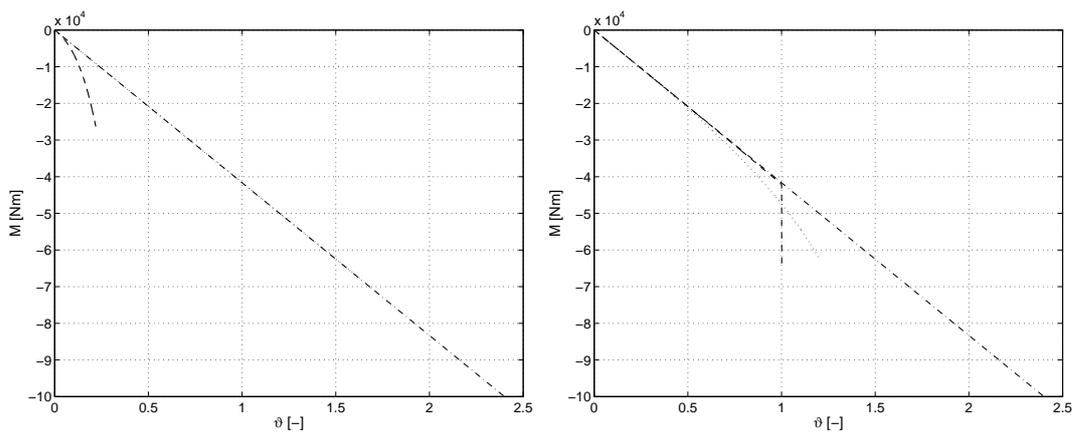


Figura 2.7: grafici $M - \vartheta$ della prova di taglio eseguita utilizzando 1 elemento (sinistra) e 100 elementi (destra).

2.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO ELASTICO IN GRANDI SPOSTAMENTI

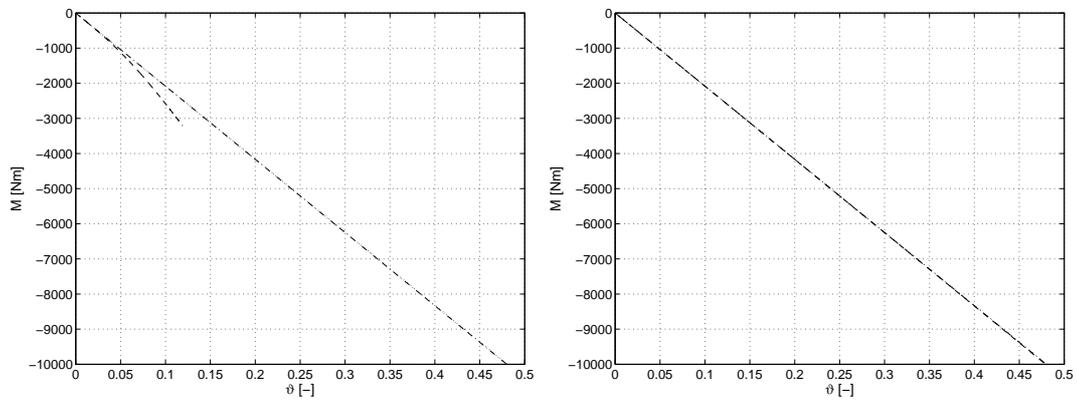


Figura 2.8: grafici $M - \vartheta$ della prova di flessione eseguita utilizzando 1 elemento (sinistra) e 100 elementi (destra).

2.3.3. Il confronto con gli elementi elastici in grandi spostamenti di SeismoStruct. Per testare ancora l'elemento implementato si sono confrontati i risultati ottenuti con quelli forniti da SeismoStruct, che contiene elementi in grandi spostamenti.

In questa fase è stata valutata una relazione lineare del materiale, ottenuta in SeismoStruct utilizzando un materiale tipo acciaio con curva costitutiva bilineare il cui coefficiente di incrudimento fosse pari all'unità: in questo modo è stato possibile fissare un modulo elastico E costante durante tutta la storia sollecitativa. Per descrivere la sezione sono state utilizzate sia nell'elemento

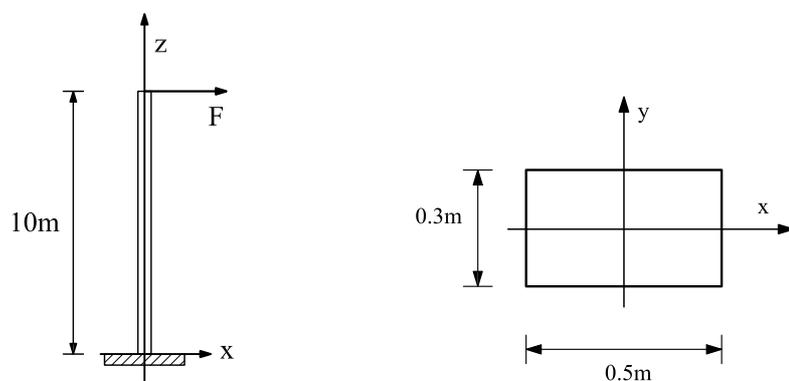


Figura 2.9: struttura sulla quale sono state eseguite le prove e relativa sezione.

sviluppato che in SeismoStruct 200 fibre, mentre il carico di taglio è stato applicato utilizzando in entrambi i casi il controllo di forza.

Sono state compiute prove al variare del numero di elementi utilizzati per descrivere la mensola. Questo è stato fatto aspettandosi che l'utilizzo di più elementi permetta una descrizione migliore della deformata e quindi una integrazione migliore lungo la lunghezza dell'elemento. Tale aspetto è particolarmente importante nell'elemento implementato nel quale l'integrazione lungo la lunghezza avviene utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson, ovvero considerando soltanto tre sezioni significative.

Si riportano di seguito i grafici dei risultati delle prove eseguite, rispettivamente con 1 (figura 2.10), 10 (figura 2.11) e 100 (figura 2.12) elementi, con SeismoStruct (linea tratteggiata) e con l'elemento sviluppato (linea continua). Si plottano i parametri significativi nello studio della deformata di un problema bidimensionale, ovvero lo spostamento trasversale w (in direzione x rispetto alla figura 2.9) e lo spostamento u (in direzione z rispetto alla figura 2.9) in

2.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO ELASTICO IN GRANDI SPOSTAMENTI

funzione del taglio applicato in sommità.

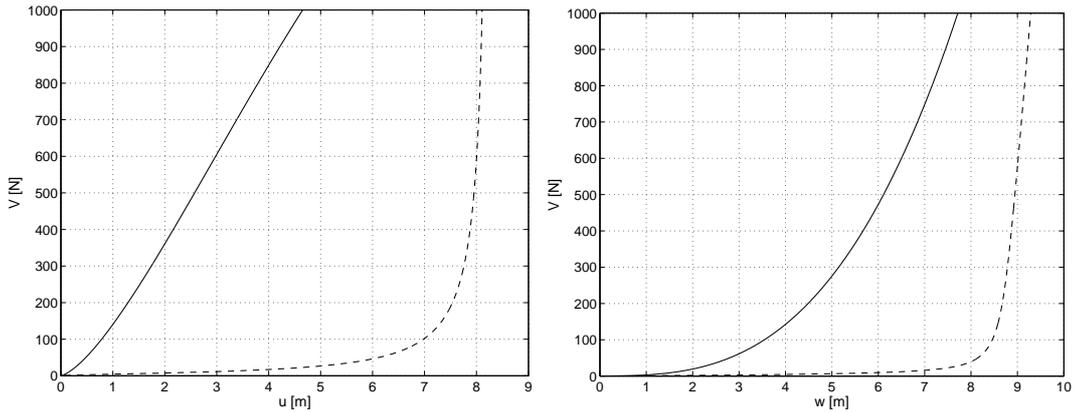


Figura 2.10: risultati della prova utilizzando un solo elemento.

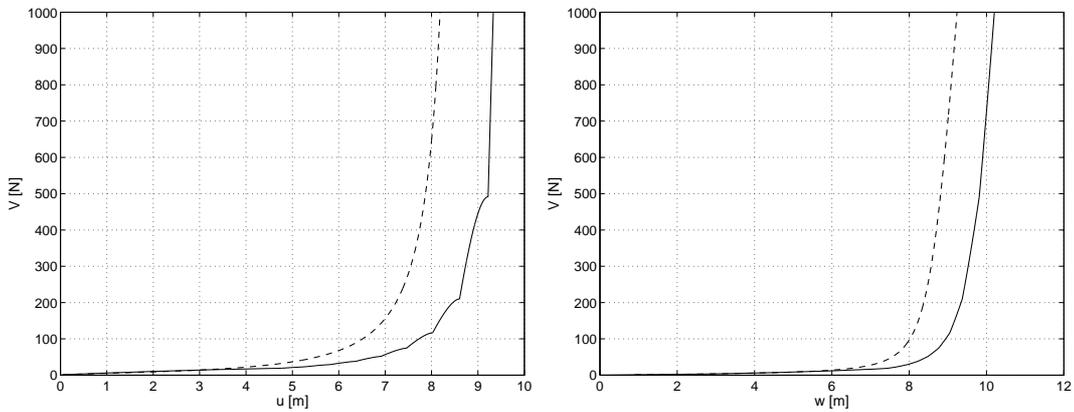


Figura 2.11: risultati della prova utilizzando 10 elementi.

I risultati riportati evidenziano che la prova di taglio in grandi spostamenti è descritta concordemente dai due codici di calcolo solo utilizzando un elevato numero di elementi (figura 2.12). Presumibilmente, dato l'andamento delle

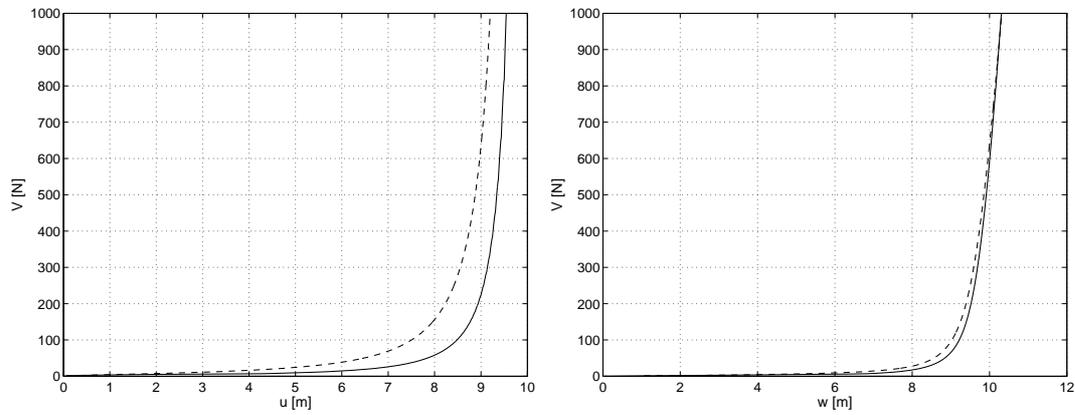


Figura 2.12: risultati della prova utilizzando 100 elementi.

due risposte in funzione del numero di elementi impiegati, aumentando ancora quest'ultimo, le risposte continuano ad avvicinarsi. Inoltre è possibile affermare che SeismoStruct è meno sensibile alla variazione dei risultati all'aumentare del numero di elementi.

CAPITOLO 3

I legami costitutivi

3.1. I legami costitutivi dei materiali

Nel caso dell'elemento sviluppato, si ha la distinzione nella sezione tra i due materiali tipici che compongono il calcestruzzo armato, ovvero il calcestruzzo e l'acciaio: per ogni fibra si specifica quale è il materiale di cui essa è composta (figura 3.1).

L'obiettivo dello studio e dello sviluppo dei legami costitutivi dei materiali è quello di arrivare a descrivere il comportamento di ogni fibra anche in corrispondenza di valori elevati di deformazione, per i quali non si considera soddisfacente il solo approccio elastico.

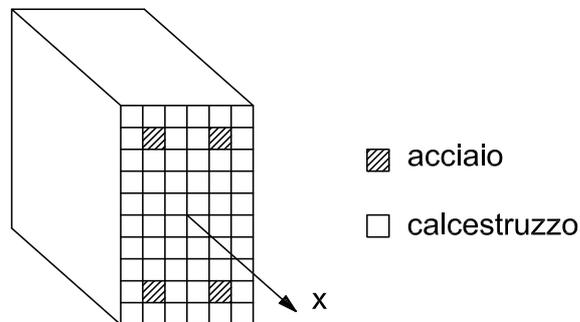


Figura 3.1: modello a fibre della trave tridimensionale in calcestruzzo armato.

Per questo, sono stati indagati ed implementati dei modelli che possano ben rappresentare il legame non lineare costitutivo di tali materiali.

Coerentemente col modello a fibre sviluppato, per entrambi i materiali sono stati implementati dei *legami monodimensionali*, ovvero relazioni che assumono significativi i soli parametri di sforzo e di deformazione in una direzione, coincidente con la direzione dell'asse dell'elemento. Per questo, lo

studio del campo delle deformazioni si riduce allo studio della componente ε_{xx} , in seguito indicata semplicemente come ε , e lo studio del campo delle tensioni è ricondotto alla valutazione della sola σ_{xx} , indicata d'ora innanzi con il simbolo σ . Questo implica che il comportamento del materiale nelle direzioni differenti rispetto a quella fondamentale e quindi l'interazione tra le varie componenti di sforzo e deformazione non siano state affrontate direttamente nella trattazione; indirettamente però gli aspetti più significativi sono stati valutati nelle leggi costitutive attraverso opportuni coefficienti inseriti nel modello monodimensionale, senza pertanto perdere i benefici di semplicità di implementazione del modello.

Operativamente si è proceduto valutando dapprima quale fosse il comportamento dei materiali attraverso i risultati di prove sperimentali riportati su pubblicazioni. In seguito sono stati analizzati i differenti modelli proposti a cui far riferimento nello studio del problema, tenendo conto delle peculiarità di ognuno ed operando la scelta di quelli considerati migliori tra questi. Infine è stata eseguita l'implementazione dei modelli scelti.

3.2. Il modello costitutivo del calcestruzzo

Il modello costitutivo del calcestruzzo deve descrivere la relazione tra sforzi e deformazione per una qualunque storia in controllo di forza o spostamento.

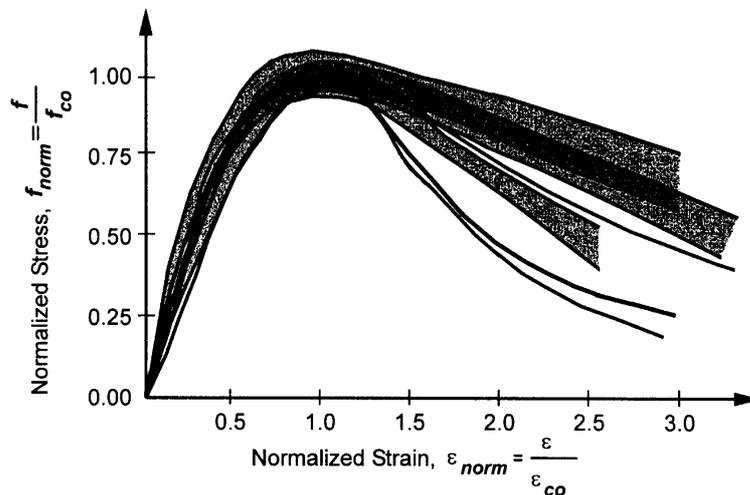


Figura 3.2: comportamento del calcestruzzo in compressione da prove sperimentali (dati da Karsan-Jirsa [16]).

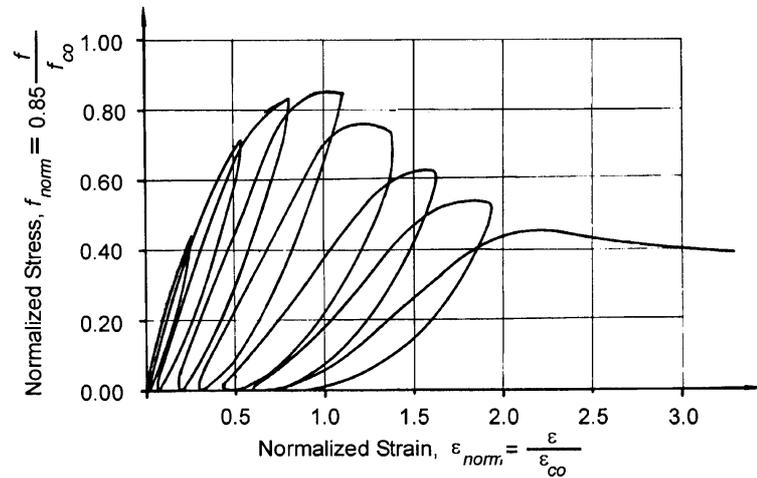


Figura 3.3: comportamento del calcestruzzo per prove di compressione ciclica (dati da Karsan-Jirsa [16]).

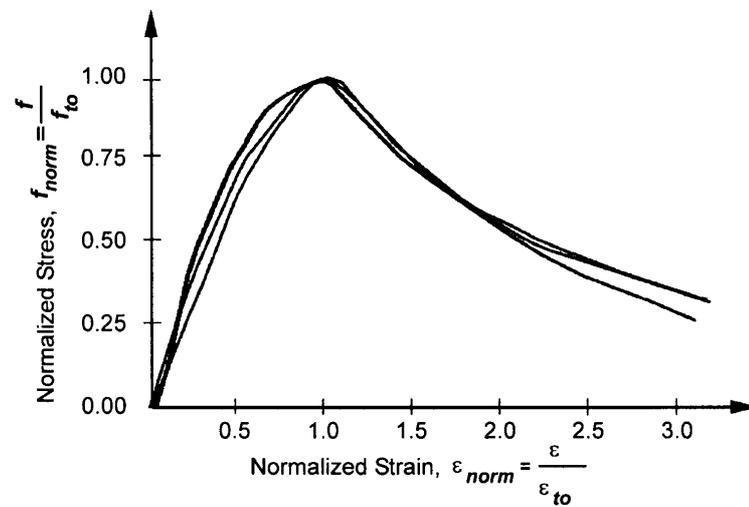


Figura 3.4: comportamento del calcestruzzo in trazione da prove sperimentali (dati da Karsan-Jirsa [16]).

Da prove sperimentali si ha che il comportamento del calcestruzzo a compressione (figura 3.2) presenta un veloce raggiungimento della tensione massima resistente e poi una diminuzione di tale valore al crescere ancora della

deformazione fino a raggiungere uno sforzo che si mantiene differente da zero ancora per un significativo intervallo di deformazione. D'altro canto in trazione (figura 3.4) la tensione del materiale si annulla per valori molto bassi di deformazione, tanto che sovente si assume che il calcestruzzo non resista a trazione.

Le caratteristiche principali che deve soddisfare il modello idoneo a descrivere compiutamente il legame tra sforzo e deformazione riguardano tutti i seguenti aspetti:

- il comportamento completamente differente del materiale in compressione ed in trazione;
- la degradazione successiva della rigidità sia in fase di carico che di scarico per effetto dell'incremento della deformazione e della conseguente fessurazione;
- la risposta isteretica in presenza di carichi ciclici.

3.2.1. La schematizzazione del comportamento del calcestruzzo su una sezione. Valutando una generica sezione si può affermare che il comportamento del calcestruzzo compresso sia determinabile attraverso tre parametri che permettono di definire la distribuzione delle tensioni in corrispondenza di una distribuzione delle deformazioni lineare.

Supponendo ad esempio di valutare il comportamento di un elemento soggetto a flessione con tese le fibre inferiori, si ottiene la distribuzione delle tensioni riportata in figura 3.5 (nella quale sono state trascurate le tensioni di trazione del calcestruzzo).

La distribuzione delle tensioni di figura 3.5 costituisce il modello più comune utilizzato per descrivere l'andamento della compressione in una sezione, ovvero ricorrendo alla forma della parabola. Le relazioni fondamentali del problema sono:

$$(3.1) \quad f_c = k_3 f'_c$$

$$(3.2) \quad d = k_2 x$$

$$(3.3) \quad R = k_1 k_3 f'_c b x$$

nelle quali:

- la relazione (3.1) esprime la massima tensione di compressione del calcestruzzo, che è funzione del parametro f'_c , la massima resistenza a compressione di un provino cilindrico del materiale; tale parametro è ottenuto attraverso il fattore k_3 , tipicamente assunto pari a 0,85;

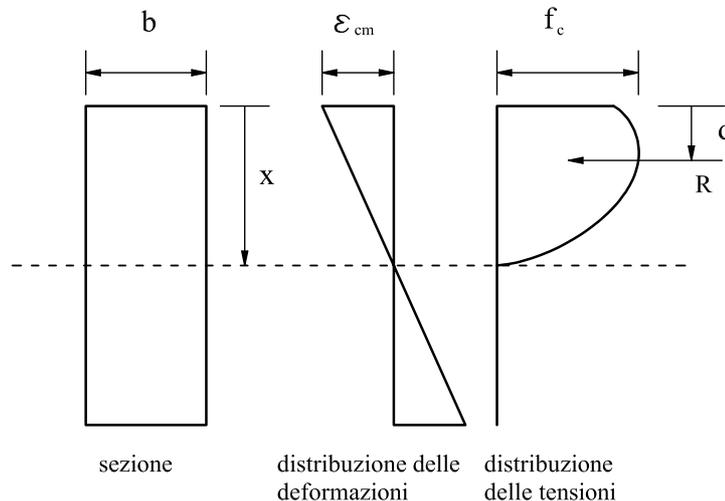


Figura 3.5: esempio di sezione generica sottoposta ad azione flettente con rappresentazione delle deformazioni e delle tensioni di compressione.

- la relazione (3.2) permette di calcolare il braccio di leva rispetto all'estremità delle fibre compresse della risultante di compressione, moltiplicando la profondità dell'asse neutro x per il fattore k_2 ;
- la relazione (3.3) consente infine di calcolare la risultante di compressione nell'area di deformazione negativa; la tensione media utilizzata è ottenuta come prodotto della tensione massima per un coefficiente k_1 che tiene conto della distribuzione reale delle tensioni nell'area considerata.

Ci si aspetta allora che il modello a fibre implementato fornisca una legge di legame tra sforzo e deformazione tale per cui una volta integrate le tensioni si possa ottenere un andamento che sia analogo a quello riportato in figura 3.5, sia per quanto riguarda la risultante che il punto di applicazione delle forze agenti.

3.2.2. Il comportamento del calcestruzzo a compressione.

3.2.2.1. *I modelli classici utilizzati per descrivere il comportamento del calcestruzzo a compressione.* I modelli proposti per la descrizione del comportamento del calcestruzzo da Chan (figura 3.6), da Soliman e Yu (figura 3.7) e

da Roy e Sozen (figura 3.8) possono essere considerati i modelli classici che costituiscono il punto di partenza nell'analisi della problematica.

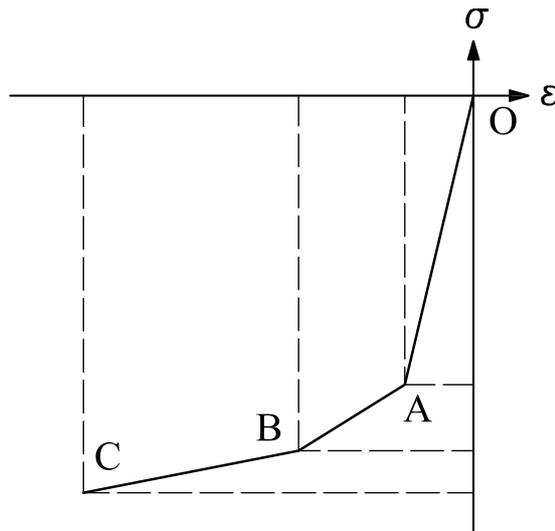


Figura 3.6: modello di Chan.

- Modello di Chan [5], curva in figura 3.6: il comportamento del materiale è descritto attraverso una trilineare (OA), (AB), (BC), che approssima la curva di carico; la pendenza di (BC) dipende dal confinamento laterale.
- Modello di Soliman e Yu [33], curva in figura 3.7: il modello è costituito da una parabola (OA) che permette di giungere al valore f'_c , in corrispondenza del quale è presente un plateau (AB) e poi una lineare decrescente (BC).
- Modello di Roy e Sozen [28], curva in figura 3.8: si descrive l'andamento della tensione attraverso due segmenti (OA) e (AB) essendo il punto A corrispondente alla massima tensione raggiunta f'_c e relativo ad una deformazione pari a $\varepsilon = -0,002$; la deformazione ε_{50} del punto B, posto in corrispondenza di una tensione pari alla metà rispetto a quella massima è assunta essere linearmente dipendente dalla percentuale geometrica di armatura trasversale.

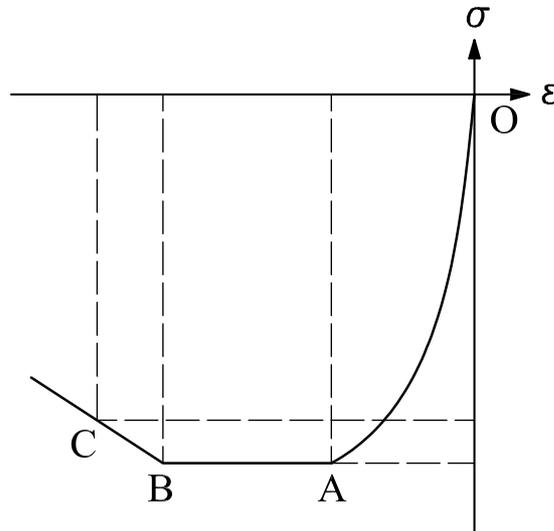


Figura 3.7: modello di Soliman e Yu.

L'evidenza sperimentale riportata nella maggior parte delle prove eseguite, come nel caso di Chan [5], Soliman e Yu [33] e Rüsç [29], indica una forte correlazione tra la resistenza del calcestruzzo ed il suo confinamento: questa può influire a seconda dei modelli o nella determinazione del valore della resistenza di picco o nella pendenza del tratto discendente della curva costitutiva. Per arrivare a definire un modello completo per il calcestruzzo è pertanto fondamentale distinguere tra il comportamento del calcestruzzo *confinato* e quello del calcestruzzo *non confinato*.

3.2.2.2. *Il confinamento del calcestruzzo.* In una trave, per calcestruzzo confinato si intende quella parte del volume di calcestruzzo che è soggetto ad azioni di compressione nel piano perpendicolare all'asse della trave.

Esistono due tipi di confinamento:

- il confinamento *attivo*, dato dall'effetto di sforzi trasversali prodotti da forze esterne applicate, come nel caso della pressione idrostatica agente su un elemento scarico;
- il confinamento *passivo*, ottenuto attraverso l'azione dell'armatura trasversale, ad esempio staffe di acciaio chiuse disposte nei piani delle sezioni di trave con una opportuna spaziatura.

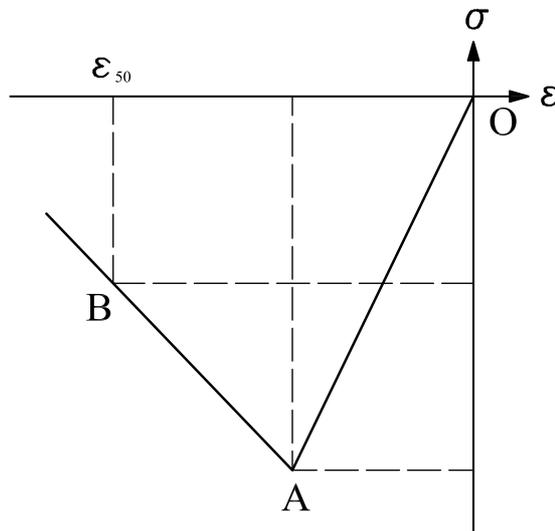


Figura 3.8: modello di Roy e Sozen.

L'effetto del confinamento è poco importante per bassi livelli di deformazione, quando il calcestruzzo non ha ancora iniziato a fratturarsi; al contrario diventa fondamentale per alti livelli di deformazione, quando l'apertura delle fratture causa una reazione di contenimento da parte delle staffe. Per questo la valutazione del confinamento permette di incrementare la resistenza del calcestruzzo per deformazioni elevate.

Come illustra la figura 3.9 che confronta due curve di sforzo-deformazione, la curva (A) e la curva (B), dove la prima è relativa a del calcestruzzo non confinato, mentre la seconda è relativa a del calcestruzzo confinato, i vantaggi del confinamento si ripercuotono su tre aspetti:

- la tensione massima raggiungibile nel caso confinato è maggiore ($f'_{c,A} < f'_{c,B}$);
- la deformazione alla quale si ha la tensione di picco nel caso confinato è maggiore ($|\epsilon_A| < |\epsilon_B|$);
- la curva di degradazione nel caso confinato ha pendenza minore rispetto a quella del caso non confinato, per cui il materiale conserva caratteristiche migliori più a lungo.

Nel caso in oggetto di analisi, ovvero quello di una trave in calcestruzzo armato, siamo interessati al solo confinamento passivo e, come evidenziato dalla figura 3.10, l'area confinata sarà data dall'area che risulta essere interna

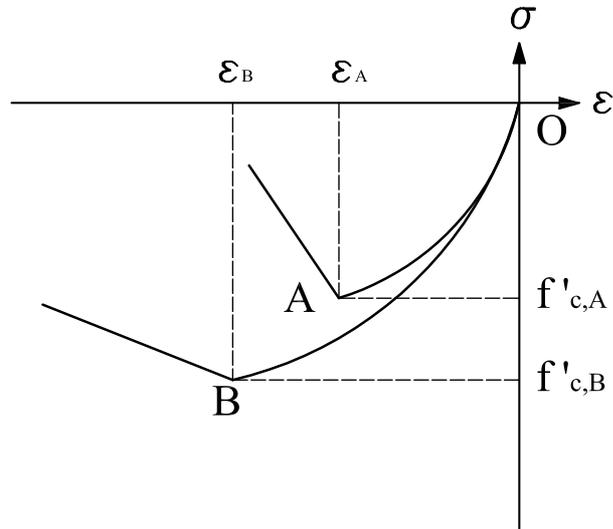


Figura 3.9: raffronto delle curve di legame del calcestruzzo in compressione nel caso confinato e nel caso non confinato.

alle staffe. È importante anche valutare il tipo di confinamento presente in

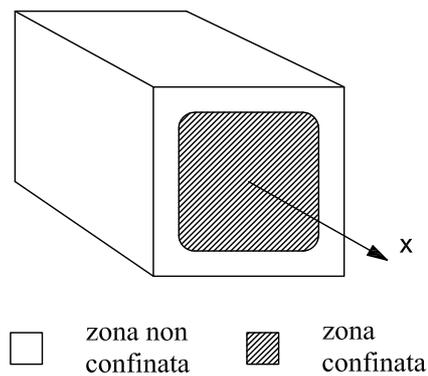


Figura 3.10: ipotetica distinzione tra zona confinata e zona non confinata in una trave.

funzione delle staffe utilizzate: l'efficacia della staffatura è infatti differente a

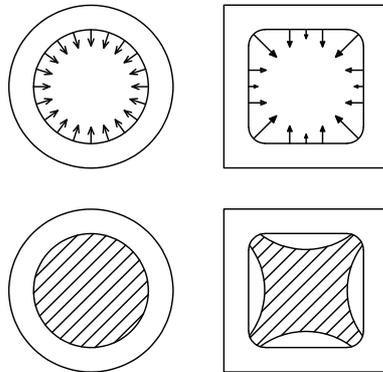


Figura 3.11: differente tipologia di staffe utilizzabili e differente effetto del confinamento.

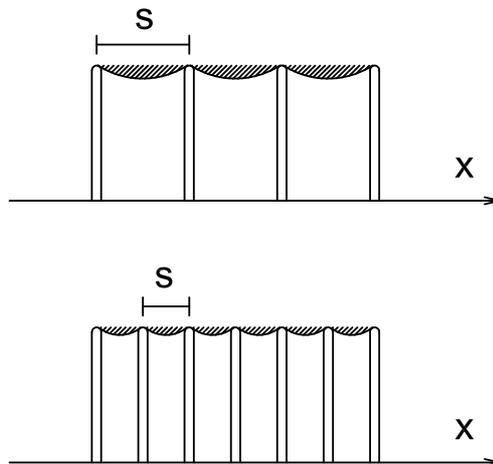


Figura 3.12: differente effetto di confinamento in funzione del passo delle staffe adottato.

seconda del tipo di staffe e della spaziatura adottata. Come illustra la figura 3.11, nella quale sono riportate sopra le azioni di confinamento agenti e sotto è evidenziata l'area che ai fini dell'analisi strutturale si può considerare confinata, per la diversa modalità di trasmissione delle tensioni saranno preferibili staffe circolari o spirali a staffe rettangolari. Valutando invece la

figura 3.12, che riporta una vista laterale della trave il cui asse si suppone svilupparsi lungo la direzione x , si ha che la zona che non si può considerare confinata evidenziata col tratteggio si riduce al ridursi del passo delle staffe, per questo, a parità di percentuale di armatura necessaria al confinamento, è preferibile adottare un passo ridotto.

3.2.2.3. *Il modello di Popovics.* Sperimentalmente si assiste alla presenza di una rilevante non-linearità nel legame tensione-deformazione per effetto soprattutto del fenomeno della microfessurazione che interessa il materiale composto anche per deformazioni negative. Partendo da tali considerazioni, Popovics [24] ha proposto una formulazione del legame sforzo-deformazione che tiene conto di tali aspetti. Il modello di Popovics descrive il legame tra

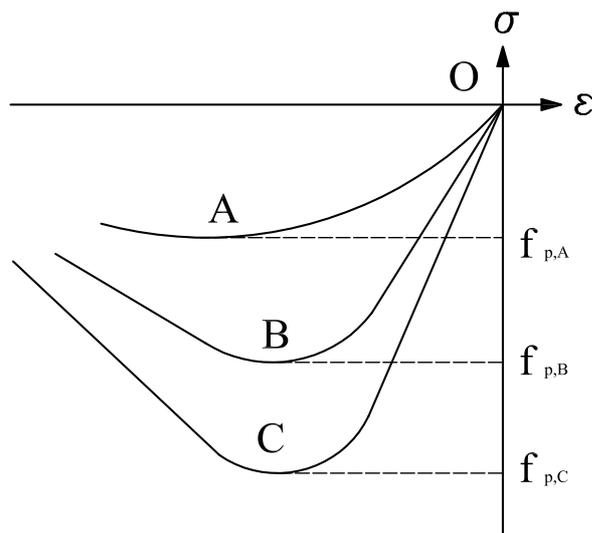


Figura 3.13: il modello di Popovics.

sforzi e deformazione nella compressione del calcestruzzo come una curva data dalla seguente equazione:

$$(3.4) \quad \sigma = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} f_p \frac{n}{n - 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}}$$

dove n è definito come:

$$(3.5) \quad n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}}$$

e nella quale:

- E_c è il modulo elastico iniziale del materiale;
- E_{sec} è il modulo secante del materiale;
- f_p e ε_p sono rispettivamente la massima tensione di compressione del materiale e la rispettiva deformazione.

L'ultimo termine frazionario nella (3.4) costituisce una misura di quanto la curva si allontana dal comportamento perfettamente lineare pre-picco del materiale e per come è definita, ovvero in funzione dei moduli elastico e secante, permette di descrivere un andamento iniziale tanto più lineare quanto più il materiale è resistente.

La figura 3.13 descrive appunto questo aspetto riportando la curva del modello per tre tipi di calcestruzzo caratterizzati da una differente tensione massima f_p : è immediato vedere come il tratto pseudo lineare della curva sia più lungo per materiali con resistenza maggiore (materiale C) rispetto a materiali con resistenza minore (materiale A).

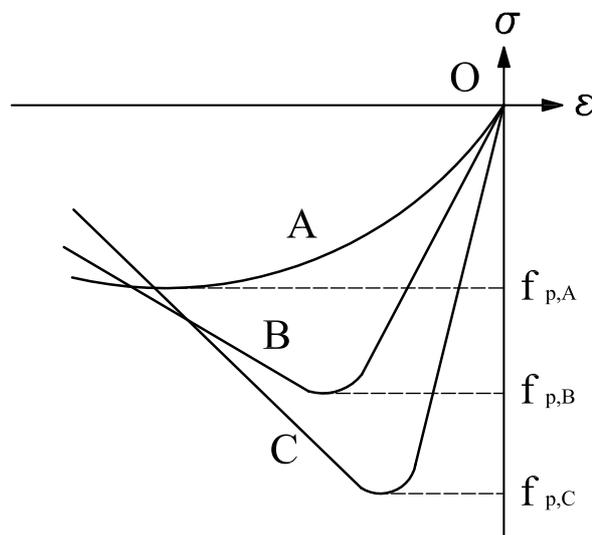


Figura 3.14: il modello di Hoshikuma con evidenziato il comportamento nella zona pre-picco.

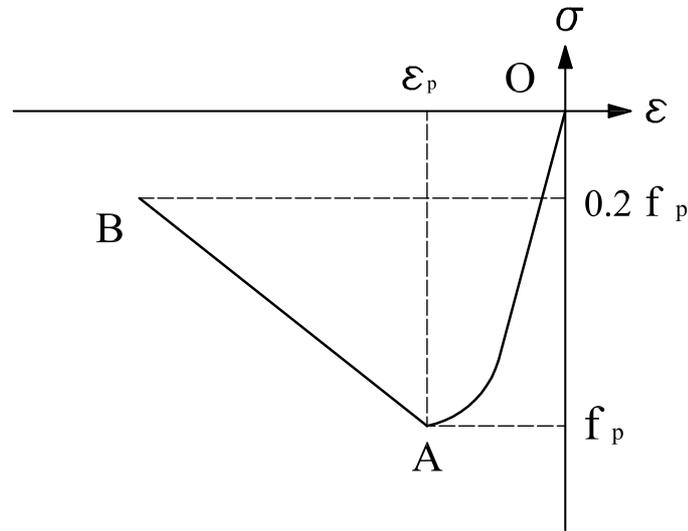


Figura 3.15: il modello di Hoshikuma con evidenziato il comportamento nella zona post-picco.

3.2.2.4. *Il modello di Hoshikuma.* Dai risultati ottenuti nel corso di analisi di pile di ponti in calcestruzzo armato, Hoshikuma ed altri studiosi [15] hanno proposto un modello nel quale la massima tensione del materiale e la relativa deformazione dipendono dal grado di confinamento dell'elemento, mentre non dipende da quest'ultimo il modulo elastico tangente all'origine del materiale. Partendo dal modello di Popovics, dunque, la curva del modello proposto da questi studiosi è data dall'equazione:

$$(3.6) \quad \sigma = E_c \varepsilon \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^{n-1} \right]$$

nella quale n è definito come:

$$(3.7) \quad n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}}$$

e dove:

- E_c è il modulo elastico iniziale del materiale;
- E_{sec} è il modulo secante del materiale;
- f_p e ε_p sono rispettivamente la massima tensione di compressione del materiale e la rispettiva deformazione.

La figura 3.14 evidenzia la fase pre picco di andamento della curva tensione-deformazioni per una fase di compressione. I materiali delle curve (A), (B) e (C) sono caratterizzate da una differente tensione massima resistente.

Per quanto concerne il tratto post-picco della curva tensione-deformazione, sia il modello di Popovics che quello di Hishikuma prevedono che una volta arrivati al punto di tensione massima (il punto A di figura 3.15) si ha un ramo lineare discendente (AB) la cui pendenza è funzione del confinamento del materiale, fino ad arrivare al punto (B): per deformazioni maggiori, la tensione nel calcestruzzo compresso rimane costante pari al 20% del valore di picco.

3.2.2.5. *Il modello di Saenz.* La peculiarità del modello di Saenz [31], che in fase di descrizione della curva pre-picco è analogo al modello di Popovics, è data dalla descrizione del tratto post-picco. Se infatti nei modelli visti precedentemente l'andamento in tale zona era lineare, nel modello di Saenz per descriverlo si usa una curva.

Alla base di tale scelta c'è l'osservazione sperimentale che il comportamento post-picco di materiali più resistenti è caratterizzato da una perdita di tensione più veloce all'aumentare della deformazione rispetto a quello che accade nelle stesse condizioni in un materiale meno resistente. Da tale constatazione deriva la scelta da parte di Saenz di modellare la curva in funzione della tensione di picco del materiale:

$$(3.8) \quad \sigma = \frac{K f_p \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)}{1 + A \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) + B \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^3}$$

Per calcolare la tensione dalla (3.8) è necessario definire le seguenti relazioni:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} A &= C + K - 2 \\ B &= 1 - 2C \\ C &= K \frac{K_\sigma - 1}{(K_\varepsilon - 1)^2} - \frac{1}{K_\varepsilon} \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{E_c}{E_{sec}} \\
 E_{sec} &= \frac{f_p}{\varepsilon_p} \\
 K_\varepsilon &= \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_p} \\
 K_\sigma &= \frac{f_p}{f_r}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

con E_c che è il modulo elastico del calcestruzzo e nelle quali ε_r ed f_r sono le coordinate di un punto di controllo post picco definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
 f_r &= \frac{f_p f'_c}{5f'_c - f_p} \leq 1,4f_p \\
 \varepsilon_r &= 4\varepsilon_p
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

L'andamento risultante è quello descritto dalla curva (AB) di figura 3.16.

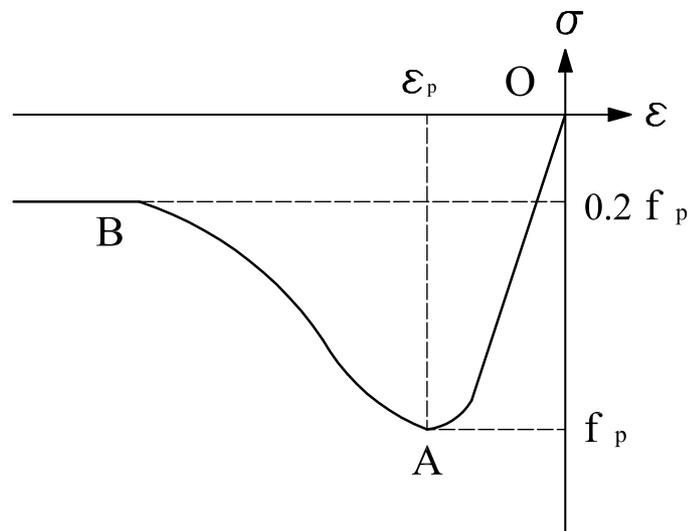


Figura 3.16: il modello di Saenz nella zona post-picco.

3.2.2.6. *Il modello di Kent e Park.* Per descrivere il comportamento del calcestruzzo in compressione, uno dei modelli più affidabili, nel senso di aderenza ai risultati sperimentali, e utilizzato, è il modello proposto da Kent e Park [17] (figure 3.17 e 3.18). La formulazione parte dalle conclusioni di Hognestad, che nel suo lavoro [14] ha proposto una descrizione del ramo pre-picco di compressione del calcestruzzo parabolico. Le caratteristiche principali del modello sono le seguenti:

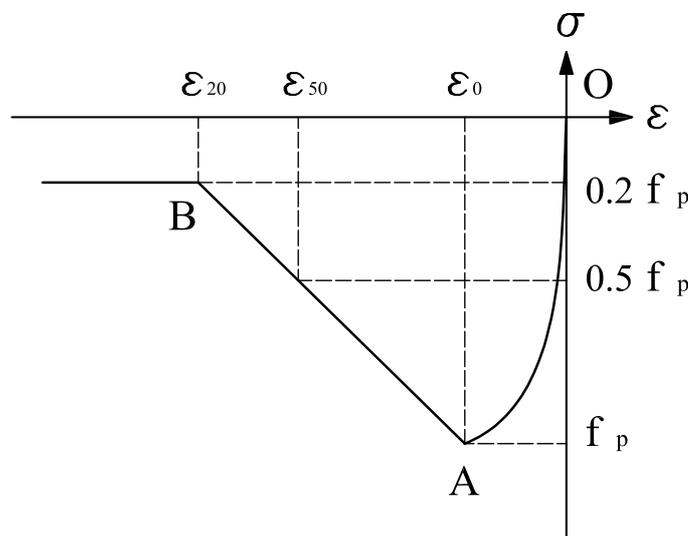


Figura 3.17: modello di Kent Park per calcestruzzo confinato.

- Regione (OA). La curva in tale tratto è descritta attraverso una parabola del secondo ordine. Si assume che in tale tratto non sia rilevante l'effetto del confinamento trasmesso attraverso apposita armatura, per cui la massima tensione nel calcestruzzo è pari a f_p sia nel caso di presenza di confinamento che nel caso di assenza dello stesso. In tale modello inoltre si assume k_3 unitario, che equivale a considerare che la tensione massima a compressione sia pari alla resistenza a compressione di un provino cilindrico. Si ipotizza che si abbia la massima tensione per un valore di deformazione pari a $\varepsilon_0 = 0,002$, che costituisce un valore tipico per il calcestruzzo non confinato. Il confinamento potrebbe portare ad un incremento del valore, ma comunque molto prossimo a questo, per cui la differenza si assume trascurabile. L'espressione per ricavare la tensione è

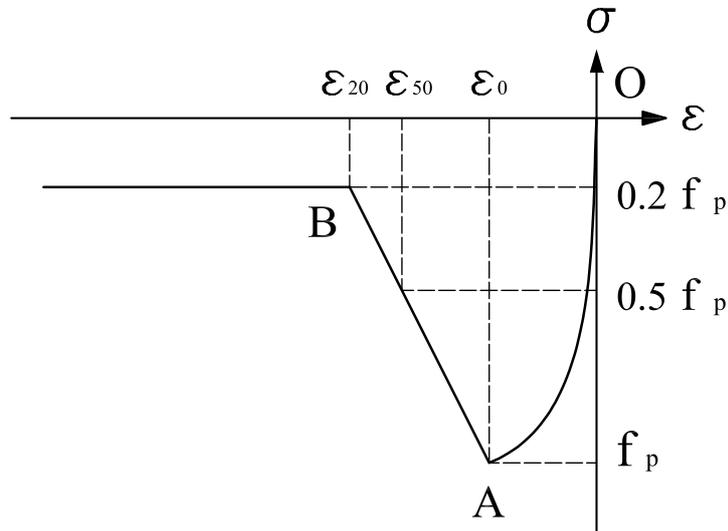


Figura 3.18: modello di Kent Park per calcestruzzo non confinato.

pertanto pari a:

$$(3.12) \quad \sigma = f_p \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

nella quale ε è la deformazione del calcestruzzo e σ la relativa tensione.

- Regione (AB). Il ramo discendente della tensione all'aumentare della deformazione oltre il valore ε_0 è assunto essere lineare e dipendente dal grado di confinamento. Per determinarne l'inclinazione si calcola quale sia il valore della deformazione ε_{50} per cui la tensione vale la metà rispetto al valore massimo f_p . Tale valore è funzione di ρ che è la percentuale geometrica di armatura trasversale, la sola in tale modello considerata efficace al fine del confinamento. Prove sperimentali evidenziano che aumentando la percentuale di armatura trasversale aumenta anche il valore della deformazione ε_{50} e di questo il modello tiene conto facendo variare la pendenza di tale tratto di curva proprio in funzione dello stesso parametro: per questo è possibile riferire il grafico di figura 3.17 al calcestruzzo confinato, mentre quello di figura 3.18 al calcestruzzo non confinato; la figura 3.19 invece illustra come all'aumentare della percentuale geometrica

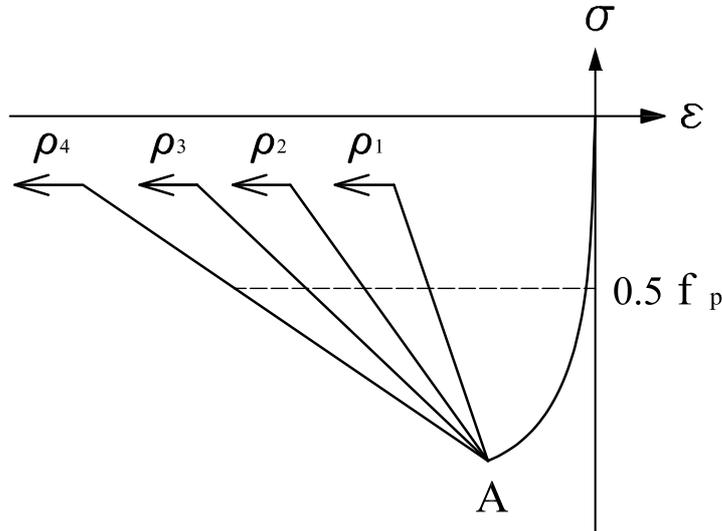


Figura 3.19: modello di Kent Park per calcestruzzo a confinamento variabile.

di armatura trasversale $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ aumenti anche il valore di ϵ_{50} .

Per ricavare il valore della tensione si utilizza la seguente formula:

$$(3.13) \quad \sigma = f_p [1 - Z (\epsilon - \epsilon_0)]$$

nella quale il parametro Z è funzione del confinamento presente.

- Regione oltre B. Si assume che il valore di tensione rimanga costante a partire da ϵ_{20} , che è il valore di deformazione per cui la tensione vale il 20% del valore di picco f_p , fino a valori di deformazione infiniti. Questo risponde alla caratteristica del calcestruzzo di poter sostenere tale tensione anche per valori elevati di deformazioni.

Ipotizzando di tornare a valutare il comportamento della generica sezione di figura 3.5 è possibile identificare il seguente andamento successivo delle tensioni come rappresentato in figura 3.20: per valori di deformazioni minori di ϵ_0 si ha un semplice andamento parabolico delle tensioni, che diventa lineare decrescente per valori compresi tra ϵ_0 e ϵ_{20} e costante per valori di deformazione maggiori di ϵ_{20} .

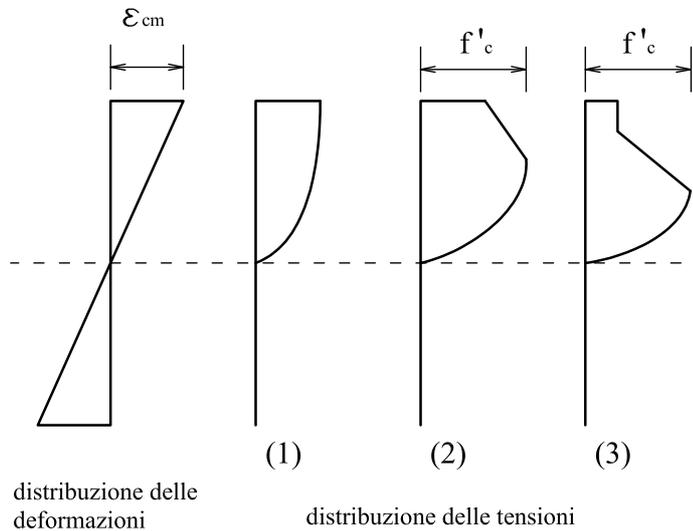


Figura 3.20: modello di Kent Park per calcestruzzo, rappresentazione delle tensioni in funzione di una deformazione crescente.

3.2.3. Il comportamento del calcestruzzo a trazione. Il calcestruzzo è caratterizzato da una resistenza a trazione molto inferiore rispetto alla resistenza a compressione, tanto che spesso lo si considera non resistente a trazione. Per questo sovente si hanno modelli che considerano nulla la tensione di trazione agente nel calcestruzzo. È opportuno evidenziare come la trazione possa nascere od in fase di scarico anche in condizioni di deformazione negativa, come rappresentato in figura 3.21 dove lo stato tensionale positivo è dovuto allo scarico operato nel punto C ed è presente per valori negativi di deformazione, oppure a causa di una deformazione positiva, come nel caso della figura 3.22 dove si ha il raggiungimento della tensione massima nel punto A e poi l'annullarsi della tensione di trazione. È fondamentale ricordare anche che il calcestruzzo ha una resistenza a trazione massima pari a f_t : tale valore però è molto inferiore rispetto al valore della resistenza a compressione e si annulla per brevi escursioni di deformazione, ovvero decresce fino a zero molto velocemente se la deformazione che ha indotto la tensione positiva non si inverte.

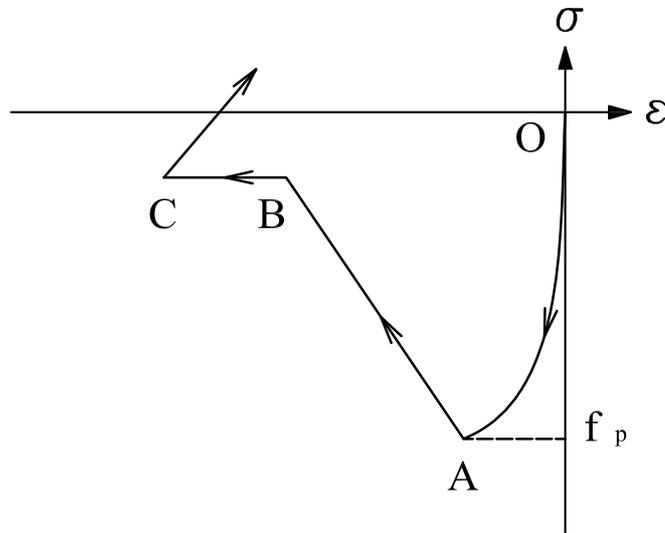


Figura 3.21: il raggiungimento della tensione positiva con deformazione negativa.

3.2.4. Il modello del calcestruzzo implementato. Il modello implementato per la descrizione del legame sforzi-deformazioni del calcestruzzo è stato quello di Kent-Park [17] alla luce dei miglioramenti apportati da Mohd Yassin [22] per quanto riguarda il comportamento in trazione. La scelta è caduta su tale modello essenzialmente per due ragioni:

- si tratta di un modello che associa efficienza e semplicità computazionale ad una buona aderenza dei risultati ottenuti rispetto ai dati sperimentali;
- è disponibile un numeroso archivio di dati relativi ad analisi che sono state compiute basandosi su tale modello per cui rende possibile una facile comparazione dei risultati.

Si tratta di un modello monodimensionale, ma si considera anche l'effetto del confinamento attraverso la definizione del modulo elastico della curva di degradazione.

3.2.4.1. *Relazione di compressione monotona.* Assumendo come variabili principali del modello la deformazione ε e la tensione σ , per le quali si intende trovare la relazione di legame, la legge di compressione monotona è

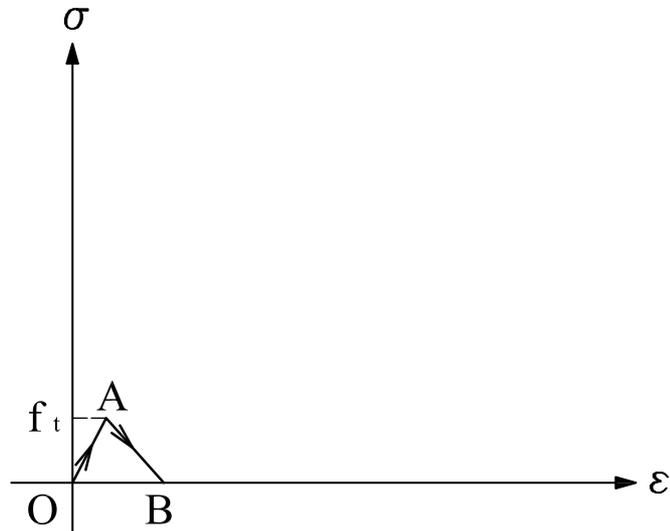


Figura 3.22: il raggiungimento della tensione positiva con deformazione positiva.

così formulata:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \epsilon \leq \epsilon_0 & \quad \sigma = K f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \\ \epsilon_0 < \epsilon \leq \epsilon_{20} & \quad \sigma = K f'_c [1 - Z (\epsilon - \epsilon_0)] \\ \epsilon > \epsilon_{20} & \quad \sigma = 0, 2 F f'_c \end{aligned}$$

Le grandezze presenti nelle (3.14) sono:

- $f'_c = k_3 f_c$ dove f_c è la resistenza a compressione di un provino cilindrico di calcestruzzo espressa in MPa;
- ϵ_0 è il valore di deformazione per il quale si ha la massima tensione nel calcestruzzo supponendo di avere un carico monotono di compressione. In questo modello tale parametro è funzione anche del confinamento del materiale, essendo l'espressione della ϵ_0 definita da:

$$(3.15) \quad \epsilon_0 = -0,002K$$

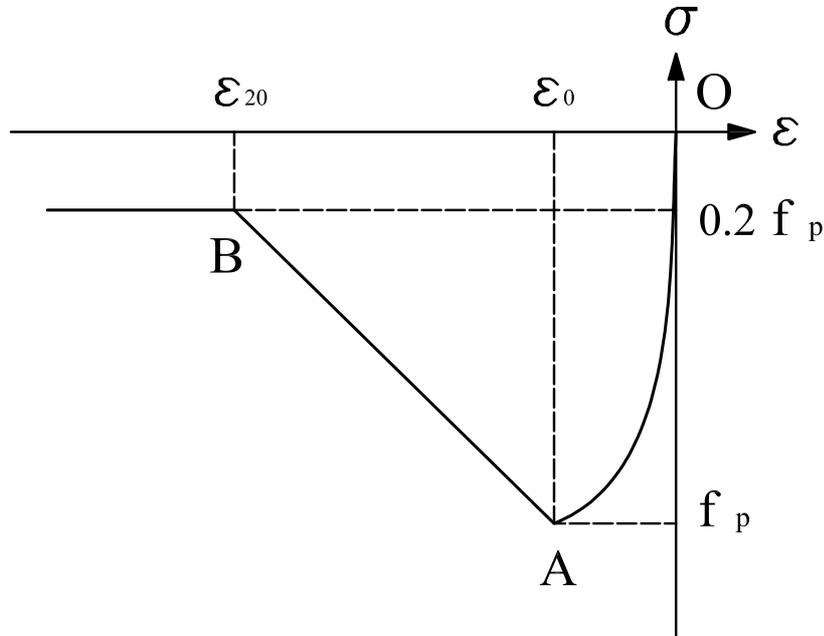


Figura 3.23: compressione monotona nel modello implementato.

ove K è un fattore che definisce l'aumento di resistenza dovuto al confinamento:

$$(3.16) \quad K = 1 + \frac{\rho_s f_{yk}}{f'_c}$$

nella (3.16) f_{yk} è il valore della tensione di snervamento dell'acciaio utilizzato per la staffatura in MPa mentre ρ_s è la percentuale geometrica di armatura trasversale funzione della dimensione del nucleo di calcestruzzo confinato b della sezione e del passo s delle staffe:

$$(3.17) \quad \rho_s = \frac{A_{sw}}{b s}$$

- f_p è il valore della massima tensione nel calcestruzzo, assunto anch'esso dipendente da K e definito da:

$$(3.18) \quad f_p = -K f'_c$$

- il valore di deformazione ϵ_{20} è quello corrispondente ad un valore di tensione tale che $\sigma = 0,2 f_p$; esso può essere calcolato

dall'espressione:

$$(3.19) \quad \varepsilon_{20} = -0,8Z + \varepsilon_0$$

nella quale il parametro Z costituisce una misura dell'inclinazione della curva di softening definito da:

$$(3.20) \quad Z = \frac{0,5}{\frac{3 + 0,29f'_c}{145f'_c - 1000} + 0,75\rho_s \sqrt{\frac{b}{s}} - 0,002K}$$

ovvero funzione di quelle grandezze correlate al grado di confinamento.

Per quanto riguarda i moduli elastici tangenti del materiale nelle tre differenti zone, essi possono essere ottenuti derivando l'espressione della σ come espressa nella (3.14) rispetto alla ε e si ottiene:

$$(3.21) \quad \begin{array}{ll} \varepsilon \leq \varepsilon_0 & E_T = \frac{2K f'_c}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \\ \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{20} & E_T = -Z K f'_c \\ \varepsilon > \varepsilon_{20} & E_T = 0 \end{array}$$

3.2.4.2. *Relazione di scarico e successivo ricarico.* Il modello è stato formulato per fare in modo che una eventuale fase di scarico dell'azione di compressione nel campo negativo delle deformazioni si possa avere in qualunque momento della storia di carico, ma che se a questa segue una ulteriore fase di carico in compressione fino a raggiungere la tensione presente nel momento in cui è cominciato lo scarico, si torni a percorrere la curva iniziale.

Valutando la figura 3.24 e supponendo di essere nel punto M, caratterizzato da deformazione ε_m e da sforzo σ_m , a seguito di una fase di carico monotono e di applicare da questo punto in poi prima una fase di scarico fino ad arrivare ad una tensione nulla, poi un ricarico, si intende fare in modo che la fase di ricarico riconduca al punto M, anche se attraverso un percorso di sollecitazione differente rispetto a quello di scarico.

Per descrivere tale andamento il primo passo consiste nell'identificazione di un punto di riferimento, il punto R di coordinate ε_r ed σ_r : la congiungente del punto M col punto R permette di calcolare il modulo elastico E_r del segmento e di identificare il punto T di intersezione con l'asse delle tensioni nulle.

Il modello deve rappresentare lo scarico (MC) lungo un segmento di modulo tangente pari a E_c , poi proseguire lo scarico lungo il segmento (CT) con modulo pari a $0,5E_r$ (figura 3.24). Dal punto T di tensione nulla la ricarica avviene lungo la congiungente di R con M, ovvero lungo il segmento (TM) il

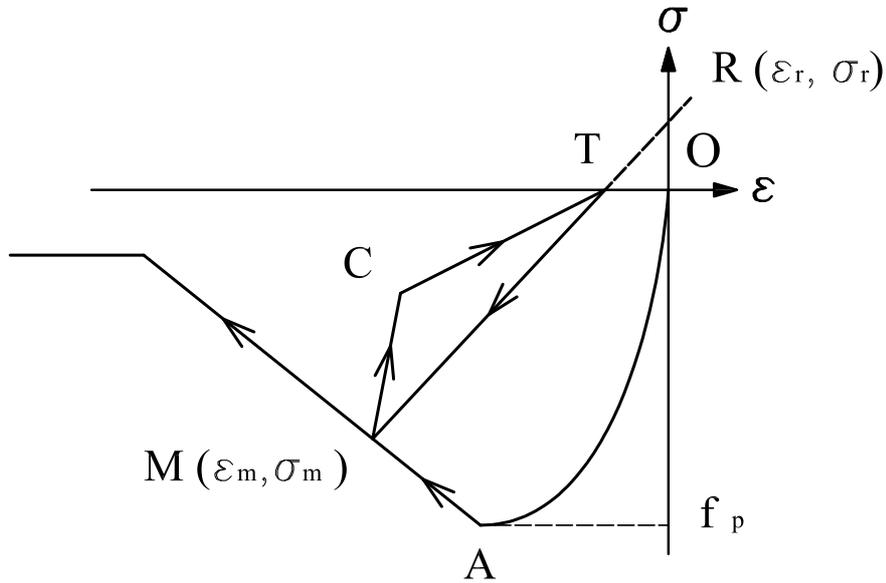


Figura 3.24: relazione di scarico totale e ricarico del modello implementato.

cui modulo tangente è pari esattamente a E_r .

Qualora invece si voglia rappresentare un ciclo di carico e scarico senza arrivare al valore della tensione nulla, ma fermandosi ad un punto D di coordinate $(\varepsilon_d, \sigma_d)$ come mostrato in figura 3.25, lo scarico avviene nello stesso modo visto precedentemente mentre la ricarica si effettua muovendosi (DF) di modulo E_c e poi lungo (FM) di pendenza pari a E_r .

Per eseguire l'implementazione del modello si calcola dapprima il valore dei moduli elastici:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} E_c &= -2K \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \\ E_{20} &= k_{20} E_c \end{aligned}$$

dove k_{20} è il coefficiente che consente di passare da E_c che è il modulo tangente nell'origine, ad E_{20} che è l'inclinazione della congiungente del punto T col punto della curva ove comincia il plateau finale $(\varepsilon_{20}, \sigma_{20})$ da determinarsi sperimentalmente.

Da questi è poi possibile calcolare le coordinate del punto R, date dalle

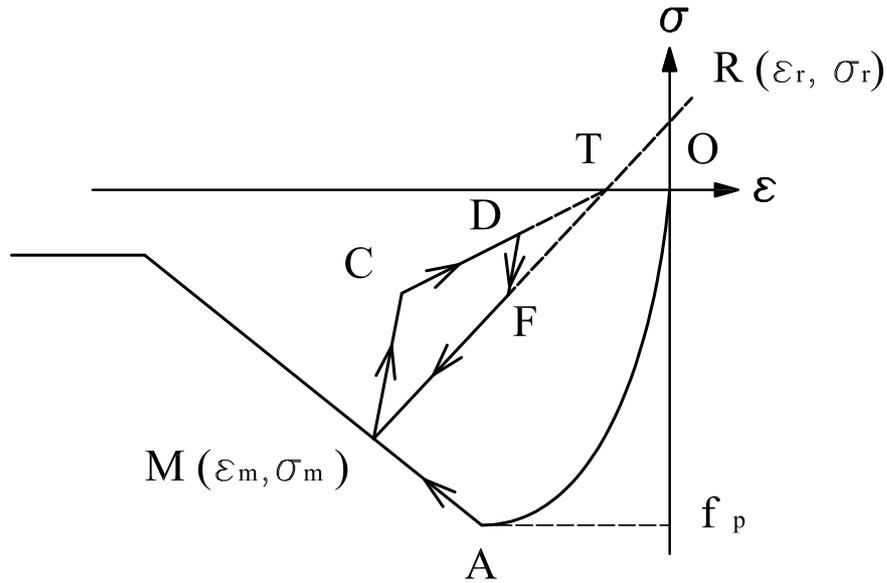


Figura 3.25: relazione di scarico parziale e ricarico del modello implementato.

relazioni:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{0,2Kf'_c - E_{20}\varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}} \\ \sigma_r &= E_c\varepsilon_r \end{aligned}$$

L'implementazione è stata effettuata calcolando per ogni valore di deformazione ε in modulo minore di ε_m , ove ε_m è un parametro che nel caso di compressione monotona si aggiorna al procedere dell'analisi e rappresenta la massima deformazione raggiunta in fase di carico, due involucri di tensione, uno massimo ed uno minimo:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma_m + E_r (\varepsilon - \varepsilon_m) \\ \sigma_{min} &= 0,5E_r (\varepsilon - \varepsilon_t) \end{aligned}$$

dove σ_m ed ε_m sono le coordinate del punto M, mentre:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} E_r &= \frac{\sigma_m - \sigma_r}{\varepsilon_m - \varepsilon_r} \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_r} \end{aligned}$$

Supponendo di valutare il legame considerandone non più l'andamento al continuo ma una serie discreta di passi, la tensione è valutata considerando un valore di tentativo per il passo $(n + 1)$ pari a:

$$(3.26) \quad \sigma^{TR} = \sigma^n + E_c \Delta\varepsilon$$

nella quale σ^n è il valore della tensione al passo precedente e:

$$(3.27) \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n$$

Pertanto possono verificarsi tre casi e ci si comporta, a seconda della condizione, in uno dei seguenti modi:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \sigma_{min} \leq \sigma^{TR} \leq \sigma_{max} &\Rightarrow \sigma = \sigma^{TR} & E_T &= E_c \\ \sigma^{TR} < \sigma_{min} &\Rightarrow \sigma = \sigma_{min} & E_T &= 0,5E_r \\ \sigma^{TR} > \sigma_{max} &\Rightarrow \sigma = \sigma_{max} & E_T &= E_r \end{aligned}$$

Tali casi differenti sono riportati nella figura 3.26 che evidenzia quale sia il modulo tangente utilizzato in un ciclo di scarico e ricarica.

L'algoritmo per il calcolo del percorso tensione-deformazione nelle fasi di scarico e ricarica è pertanto così strutturato:

- fase di scarico ($\Delta\varepsilon > 0$ con $\sigma \leq 0$)
 - calcolo moduli tangenti E_c ed E_{20}
 - determinazione del punto di coordinate ε_r e σ_r
 - calcolo modulo E_r
 - determinazione per ogni passo di due valori di tensione σ_{max} e σ_{min} che costituiscono i due limiti di tensione ammissibile per il valore di deformazione dato
 - calcolo di un valore di tentativo di tensione σ^{TR} supponendo di muoversi con modulo tangente pari a E_c
 - comparazione dei valori σ_{max} , σ_{min} e σ^{TR} e determinazione di σ reale in funzione dei limiti imposti dagli involuppi massimo e minimo
- fase di ricarica ($\Delta\varepsilon < 0$ con $\sigma \leq 0$ supponendo E_c ed E_r noti)
 - determinazione per ogni passo di due valori di tensione σ_{max} e σ_{min} che costituiscono i due limiti di tensione ammissibile per il valore di deformazione dato

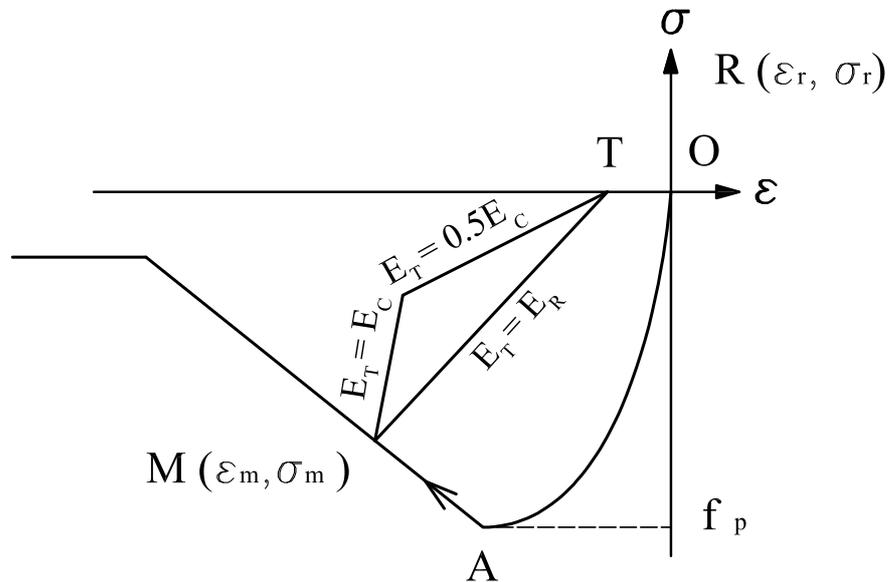


Figura 3.26: relazione di scarico totale e ricarico con evidenziato il valore del modulo tangente.

- calcolo di un valore di tentativo di tensione σ^{TR} supponendo di muoversi con modulo tangente pari a E_c
- comparazione dei valori σ_{max} , σ_{min} e σ^{TR} e determinazione di σ reale in funzione dei limiti imposti dagli involuipi massimo e minimo

3.2.4.3. *Relazione che governa l'escursione in campo di trazione.* Il fenomeno della possibile trazione nel calcestruzzo è contemplato dal modello implementato. Tuttavia in ogni caso il valore della tensione positiva non può superare la massima resistenza di trazione, pari a f_t , ovvero:

$$(3.29) \quad f_t = 0.6228\sqrt{f'_c}$$

nella quale le tensioni sono espresse in *MPa*. L'obiettivo è quello di implementare un modello che descriva sia l'escursione in campo positivo delle trazioni che il normale sviluppo del percorso tensioni-deformazioni in caso di ricarica in compressione: per questo si vuole fare in modo che il punto di tensione nulla e di deformazione ε_t (figura 3.27) costituisca sia il punto di partenza per lo sviluppo del percorso in campo di tensione positiva che

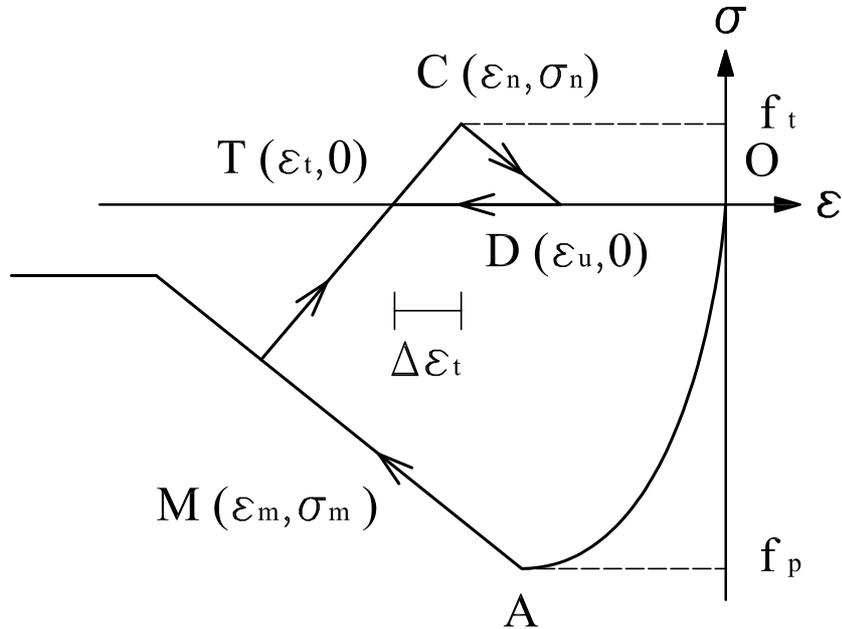


Figura 3.27: relazione di scarico e ricarica del modello implementato con escursione in zona di trazione.

il punto di ritorno in seguito ad una inversione dell'incremento della tensione. Inoltre, si intende rappresentare la degradazione della resistenza del calcestruzzo al passare dei cicli di carico. Riferendoci alla figura 3.27 e supponendo di essere giunti in seguito ad una storia precedente nel punto M, si suppone di voler ridurre la deformazione fino ad arrivare al punto T e poi proseguire in zona di trazione. Essendo il punto C caratterizzato da una tensione pari alla tensione massima di trazione, ipotizzando che tale ramo di carico a trazione sia il primo al quale è soggetto il materiale, si procede nel tratto (TC) con un modulo tangente pari a E_c . Qualora sia lungo questo tratto che avviene lo scarico, il percorso nel campo di trazione è perfettamente elastico e si ripercorre la curva di carico.

Giunti al punto C e continuando ad aumentare la deformazione nel verso positivo, ovvero in trazione, si ha la frattura del calcestruzzo e si percorre la curva di scarico (CD) di modulo elastico $-E_{ts}$, essendo quest'ultimo definito da $E_{ts} = k_{ts}E_c$, ove k_{ts} è un coefficiente ricavabile sperimentalmente.

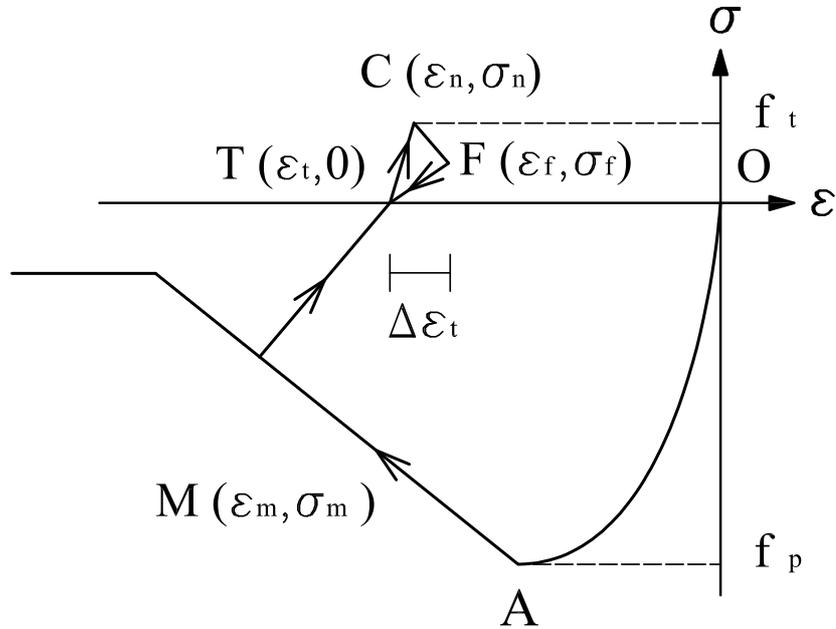


Figura 3.28: relazione di scarico e ricarico del modello implementato con escursione in zona di trazione.

L'ascissa del punto D è definibile come:

$$(3.30) \quad \varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \left(\frac{1}{E_{ts}} + \frac{1}{E_c} \right)$$

Una volta raggiunto il punto D nel quale si annulla la tensione di trazione essa rimane nulla fino al ritorno nel campo compresso: eventuali ulteriori deformazioni superiori al valore ε_t produrranno un semplice spostamento lungo l'asse delle ascisse con valore di ordinate nullo, nel verso positivo se si ha ancora trazione, mentre nel verso negativo nel caso di compressione. Se si ritorna invece al punto T riprende la storia di deformazione in campo compresso. Qualora il livello di deformazione sia insufficiente a raggiungere il punto D di figura 3.27 perché lo scarico avviene prima, lo scenario è quello illustrato nella figura 3.28 nella quale si suppone di avere deformazione di trazione fino al punto F: ipotizzando di ricominciare a comprimere da questo punto in poi si ha che si ritorna linearmente al punto T, seguendo la retta di

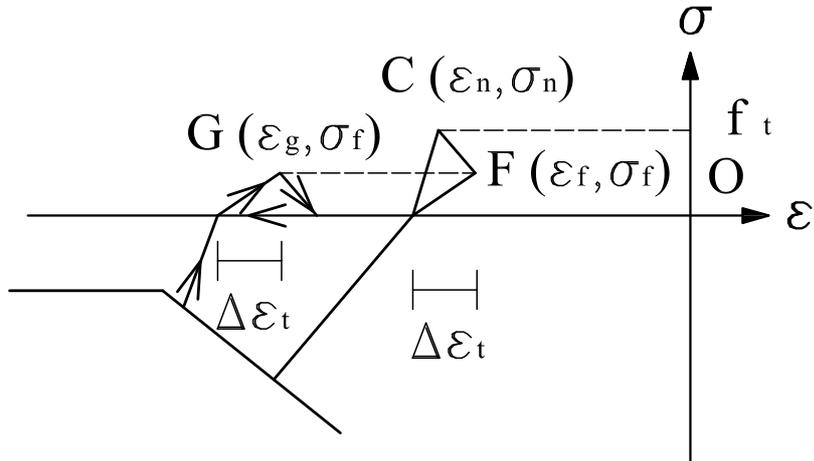


Figura 3.29: relazione di scarico e ricarico del modello implementato con escursione in zona di trazione.

modulo tangente pari a:

$$(3.31) \quad E_{tt} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_f - \epsilon_t}$$

L'escursione in campo di trazione porta però alla rottura del calcestruzzo, quantificabile dal valore modulo elastico E_{tt} che è tanto minore quanto più grande è stata la deformazione in trazione. Per fare in modo che il modello conservi una misura di questo degrado, si assume che qualora la storia di carico porti ancora a raggiungere una tensione positiva, l'entità massima di questa non potrà essere superiore a quella registrata nel ciclo precedente prima dello scarico. Nel nostro caso, facendo riferimento alla figura 3.29 ad esempio, si avrà che la tensione di trazione non potrà superare il valore σ_f . Inoltre, il modulo tangente con il quale avverrà il carico sarà pari a E_{tt} , mentre la fase di scarico avverrà con modulo $-E_{ts}$, ovvero lo stesso utilizzato nel tratto (CF).

Si riportano di seguito dei grafici (figure 3.30-3.35) che rappresentano alcune prove eseguite utilizzando il legame implementato.

3.2 IL MODELLO COSTITUTIVO DEL CALCESTRUZZO

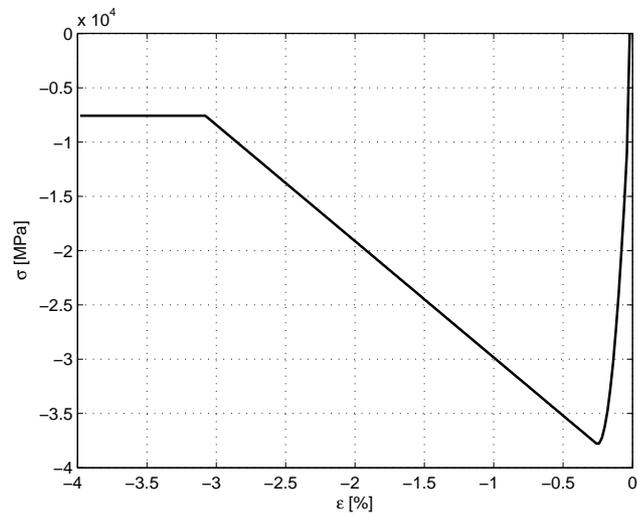


Figura 3.30: storia di compressione monotona.

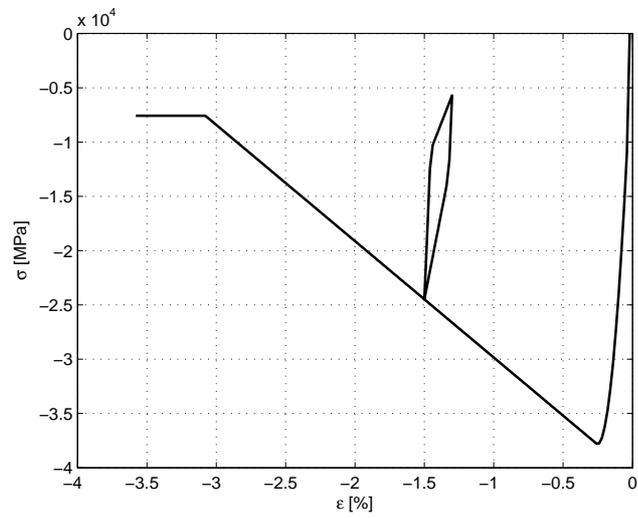


Figura 3.31: storia di compressione con un ciclo di scarico e ricarico.

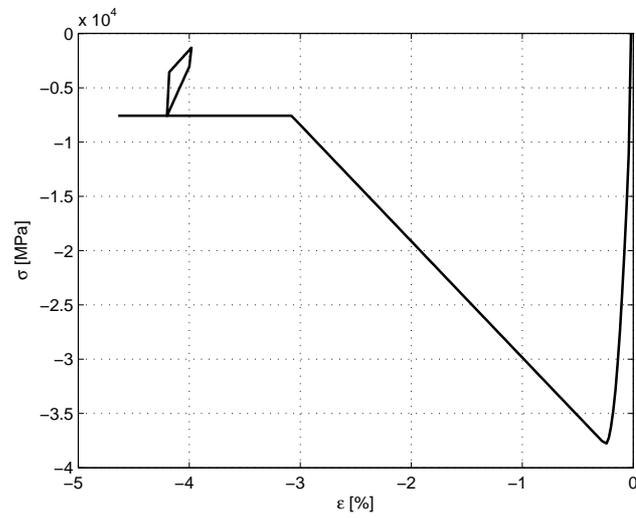


Figura 3.32: storia di compressione con un ciclo di scarico e ricarico.

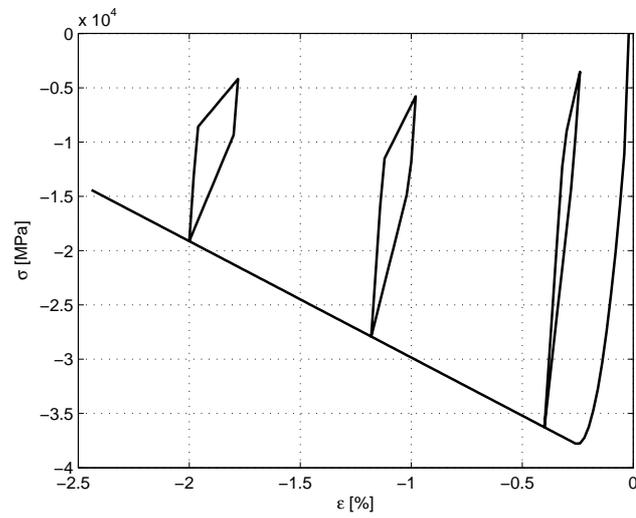


Figura 3.33: cicli di carico e scarico in compressione.

3.2 IL MODELLO COSTITUTIVO DEL CALCESTRUZZO

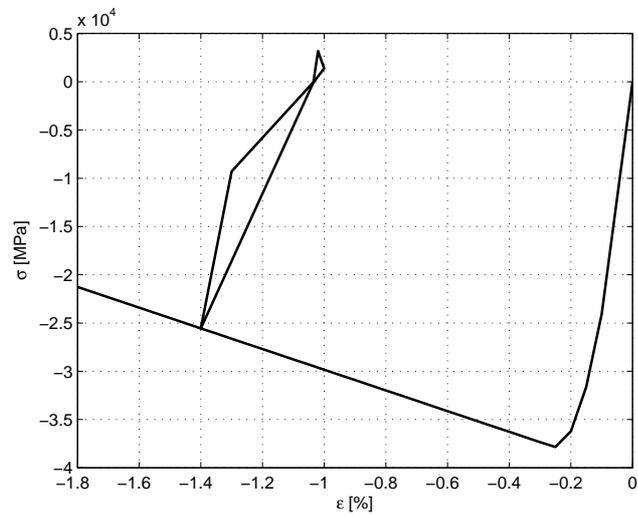


Figura 3.34: ciclo di carico e scarico con minima escursione in valori di tensione positiva.

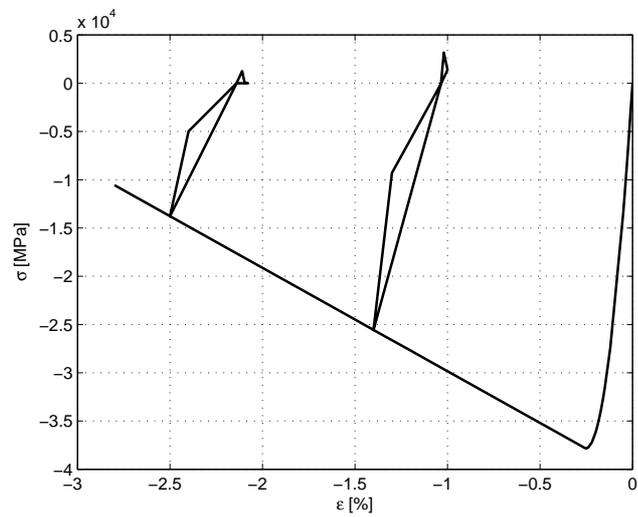


Figura 3.35: cicli di carico e scarico con valori di tensione positiva e cicli in campo di trazione.

3.3. Il modello costitutivo dell'acciaio

Analogamente a quanto fatto per il calcestruzzo è necessario trovare un modello opportuno per modellare il comportamento dell'acciaio. Dai risul-

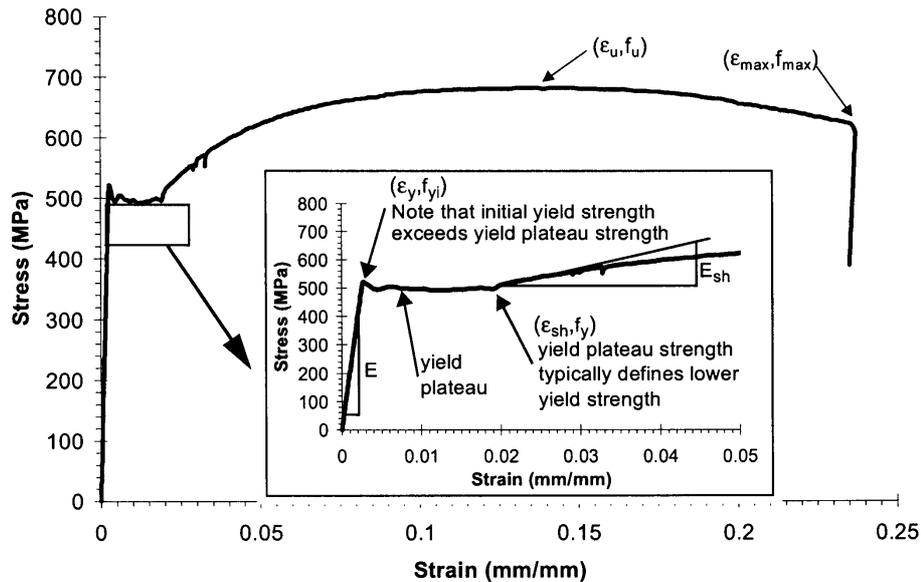


Figura 3.36: comportamento dell'acciaio da prove sperimentali (dati da Lowes-Moehle [19]).

tati delle prove sperimentali riportate in molte pubblicazioni si vede che il comportamento dell'acciaio varia molto all'aumentare della deformazione: come riportato in figura 3.36 è possibile riconoscere un tratto lineare elastico iniziale, a cui segue una zona di snervamento caratterizzata da un andamento irregolare ma senza incrementi significativi della tensione agente; successivamente è presente un tratto con incrudimento fino ad un valore massimo di tensione e poi una diminuzione dello sforzo fino al crollo totale delle tensioni.

L'obiettivo in questo caso è quello di trovare un modello costitutivo che possa rappresentare tale comportamento e che possa anche soddisfare le seguenti caratteristiche:

- una risposta isteretica per carichi ciclici successivi;
- un comportamento che rappresenti prima una fase elastica per piccole deformazioni e poi una plasticizzazione in seguito al raggiungimento della tensione di snervamento, ovvero un accumulo di deformazione non recuperabile con lo scarico;

- la simmetria del comportamento del materiale in trazione ed in deformazione.

3.3.1. I principali modelli proposti. Nel caso dello studio del comportamento dell'acciaio è possibile valutare modelli di complessità via via crescente.

3.3.1.1. *Il modello bilineare.* L'approccio più semplice è quello del modello bilineare che prevede di descrivere il comportamento del materiale attraverso una modellazione elastoplastica, che può essere senza, o con, incrudimento. Valutando dapprima quello senza incrudimento, rappresentato in figura 3.37, si tratta di un modello che rende necessaria la distinzione tra un comportamento presnervamento e postsnervamento, valutati attraverso il parametro della deformazione ε_y :

$$(3.32) \quad \begin{array}{ll} \varepsilon \leq \varepsilon_y & \text{comportamento elastico} \\ \varepsilon > \varepsilon_y & \text{comportamento plastico} \end{array}$$

Il comportamento elastico è caratterizzato da un modulo tangente pari al modulo elastico dell'acciaio E_s , mentre il comportamento plastico presenta un modulo tangente nullo. Relativamente allo scarico, invece, esso avviene sempre seguendo il segmento elastico per cui il modulo tangente è pari ad E_s .

Per descrivere tale modello sono sufficienti il modulo elastico dell'acciaio e la tensione di snervamento, attraverso cui è immediato calcolare la deformazione, suddividibile in una parte elastica, utilizzata per ricavare la tensione, ed una parte plastica.

Il modello può essere descritto attraverso l'equazione:

$$(3.33) \quad \sigma = E_s (\varepsilon - \varepsilon_p)$$

nelle quali:

- ε è la deformazione del passo n-esimo e σ è la relativa tensione nel materiale;
- ε_p è la deformazione plastica dell'acciaio al passo n-esimo.

Nel caso si consideri invece un acciaio incrudente, il modello varia leggermente perché si suppone che una volta superato lo snervamento ed entrati in campo plastico la tensione non rimanga costante, ma aumenti, anche se il modulo tangente del ramo plastico è pari ad una frazione di quello iniziale, dato dall'esperienza: $E_{sh} = kE_s$ dove k è il coefficiente di incrudimento ricavabile sperimentalmente (figura 3.38). Pertanto in questo caso è necessario determinare anche il valore di tale parametro.

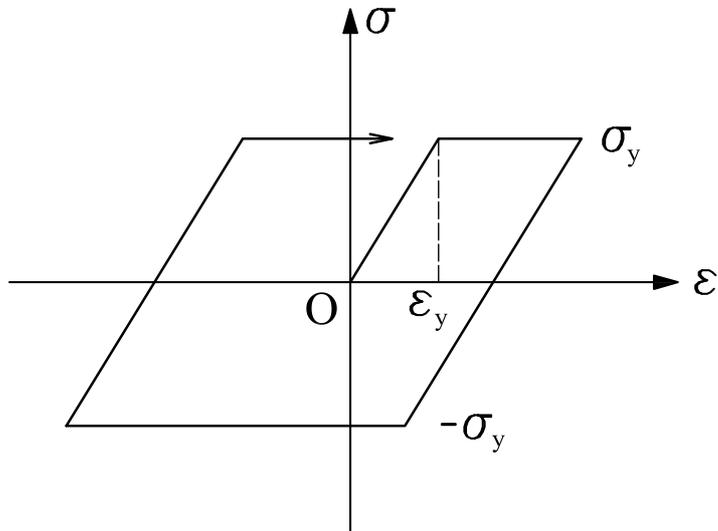


Figura 3.37: comportamento bilineare elasto-plastico dell'acciaio senza incrudimento.

Il modello può essere descritto attraverso le seguenti equazioni:

$$(3.34) \quad \begin{aligned} |\varepsilon| \leq \varepsilon_y & \quad \sigma = E_s \varepsilon \\ |\varepsilon| > \varepsilon_y & \quad \sigma = f_y + E_{sh} (\varepsilon - \varepsilon_y) \end{aligned}$$

nelle quali:

- ε è la deformazione del passo n-esimo e σ è la relativa tensione nel materiale;
- f_y è la tensione di snervamento ed ε_y la relativa deformazione;
- E_s ed E_{sh} sono i moduli tangenti rispettivamente nel primo tratto lineare elastico e nel tratto di incrudimento.

3.3.1.2. *Il modello trilineare.* Partendo dal modello bilineare, una possibile modifica è quella che permette di considerare una ulteriore regione con incrudimento dopo il plateau di snervamento: in tale caso il modello è trilineare (figura 3.39), composto da una risposta iniziale lineare elastica (tratto OA), da un plateau di snervamento (tratto AB) e da una fase di incrudimento lineare (tratto BC).

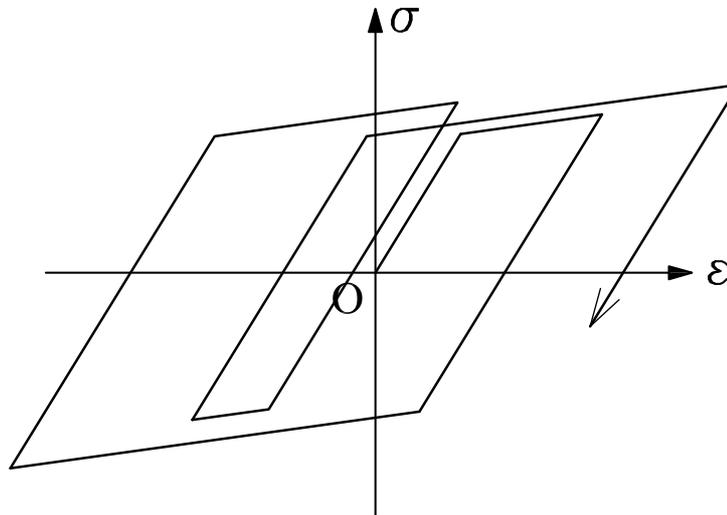


Figura 3.38: comportamento bilineare elasto-plastico dell'acciaio con incrudimento.

Il modello può essere descritto attraverso le seguenti equazioni:

$$(3.35) \quad \begin{array}{ll} |\varepsilon| \leq \varepsilon_y & \sigma = E_s \varepsilon \\ \varepsilon_y < |\varepsilon| \leq \varepsilon_{sh} & \sigma = f_y \\ \varepsilon_{sh} < |\varepsilon| \leq \varepsilon_u & \sigma = f_y + E_{sh} (\varepsilon - \varepsilon_{sh}) \end{array}$$

nelle quali:

- ε è la deformazione del passo n-esimo e σ è la relativa tensione nel materiale;
- f_y è la tensione di snervamento ed ε_y la relativa deformazione;
- ε_{sh} è la massima deformazione per cui si estende il plateau;
- E_s ed E_{sh} sono i moduli tangenti rispettivamente nel primo tratto lineare elastico e nel tratto di incrudimento.

3.3.1.3. *Il modello Menegotto-Pinto.* L'approccio di Menegotto-Pinto [20] prevede di utilizzare una curva per descrivere l'andamento del legame tra tensioni e deformazioni il cui andamento è rappresentato in figura 3.40; esso si basa su una relazione che lega non esplicitamente le quantità σ ed ε , ma che ricorre a due variabili ausiliare, σ^* ed ε^* tali che tra loro vale la relazione:

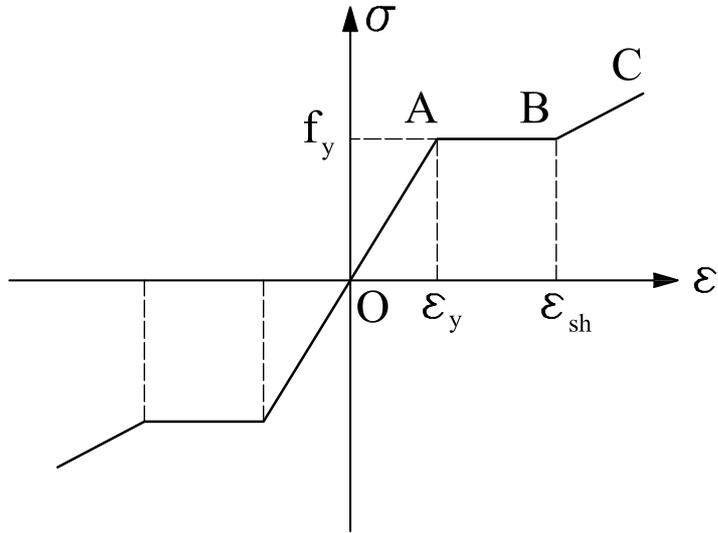


Figura 3.39: comportamento trilineare dell'acciaio.

$$(3.36) \quad \sigma^* = b\varepsilon^* + \frac{(1-b)\varepsilon^*}{(1-\varepsilon^*R)^{\frac{1}{R}}}$$

potendo definire tali variabili ausiliari come:

$$(3.37) \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}$$

$$(3.38) \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}$$

ove il parametro R è funzione della quota di deformazione plastica ad ogni ciclo, ed è determinabile con l'espressione:

$$(3.39) \quad R(\xi) = R_0 - \frac{a_1\xi}{a_2 + \xi}$$

essendo R_0 una costante ed a_1 ed a_2 dei parametri da determinare sperimentalmente.

Per definire le grandezze è però necessario determinare i punti 0 ed R definiti in figura 3.41 rispettivamente di coordinate $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ e $(\varepsilon_r, \sigma_r)$. Il punto 0 è dato dall'intersezione tra le tangenti alla parte iniziale e finale dell'arco che

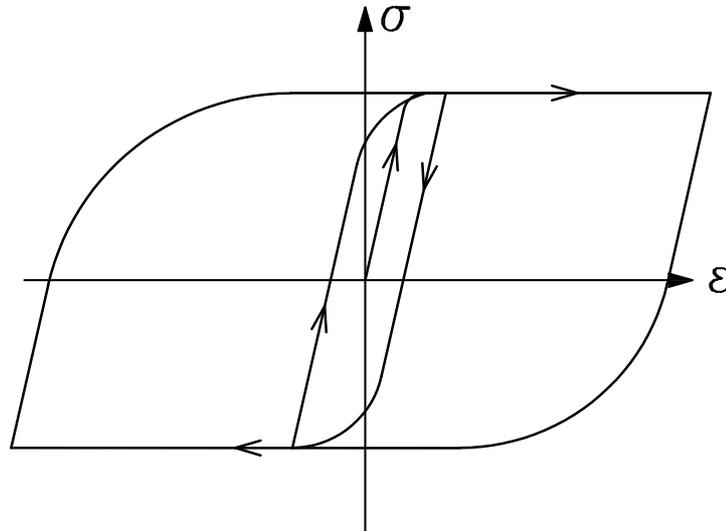


Figura 3.40: modello Menegotto-Pinto per l'acciaio senza incrudimento.

si sta percorrendo; ad esempio, valutando il ciclo descritto nella figura 3.41 è possibile considerare la curva che consente di passare dal punto A al punto B : ci si muove ovvero dal punto con tangente 1 al punto con tangente 2 e il punto 0 è definito dall'intersezione di tali due tangenti. Il punto R invece è dato dal punto in corrispondenza del quale vi è stata l'ultima inversione del ciclo di carico, ovvero, sempre valutando la curva (AB) di figura 3.41, dal punto A . Sia il punto R che il punto 0 devono essere aggiornati ad ogni cambiamento di segno dell'incremento della deformazione, cioè ad ogni inversione di ciclo.

Il modello di Menegotto-Pinto può prevedere anche un incrudimento dell'acciaio, come riportato in figura 3.42, per cui nella sua tipologia più comune non vi sono asintoti orizzontali e deve essere considerato il modulo di incrudimento dell'acciaio. La formulazione rimane comunque la medesima ed è possibile tener conto dell'incrudimento scegliendo opportunamente il punto 0 .

3.3.1.4. *Il modello Menegotto-Pinto modificato da Filippou.* Sebbene il modello di Menegotto-Pinto sia di facile implementazione e sia in grado di riprodurre in maniera soddisfacente il comportamento sperimentale del materiale, il maggiore inconveniente che esso presenta è quello di non tenere in conto

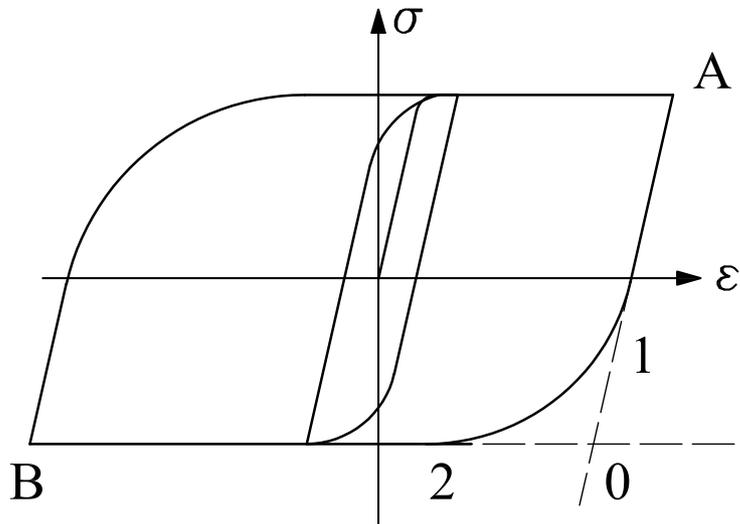


Figura 3.41: modello Menegotto-Pinto per l'acciaio: determinazione del punto 0.

il fenomeno dell'incrudimento isotropo. Tale aspetto è importante nel momento in cui si intende modellare il comportamento di elementi di armatura sottoposti a carichi ciclici.

Il fenomeno si manifesta con un aumento della tensione di snervamento del materiale all'aumentare del numero di cicli compiuti e questo aumento si manifesta con una traslazione dell'asintoto inferiore della curva. Come è possibile vedere in figura 3.43 per riportare tale fenomeno si suppone di traslare l'asintoto della quantità σ_{st} passando dalla retta 1 alla retta 2.

Ciò comporta notevoli conseguenze nell'analisi delle tensioni perché supponendo che la tensione di equilibrio sia σ_1 (riferendoci sempre alla figura 3.43) si vede subito come adottando il modello semplice (senza la traslazione della tensione di snervamento pari a σ_{st}) la corrispondente deformazione sia ε'_1 , mentre adottando il secondo che prevede di applicare la traslazione la deformazione è pari a ε''_1 .

La modifica del modello alla Menegotto Pinto da parte di Filippou [11] consiste nella determinazione della traslazione della tensione definita pari a:

$$(3.40) \quad \sigma_{st} = \sigma_y \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) a_3$$

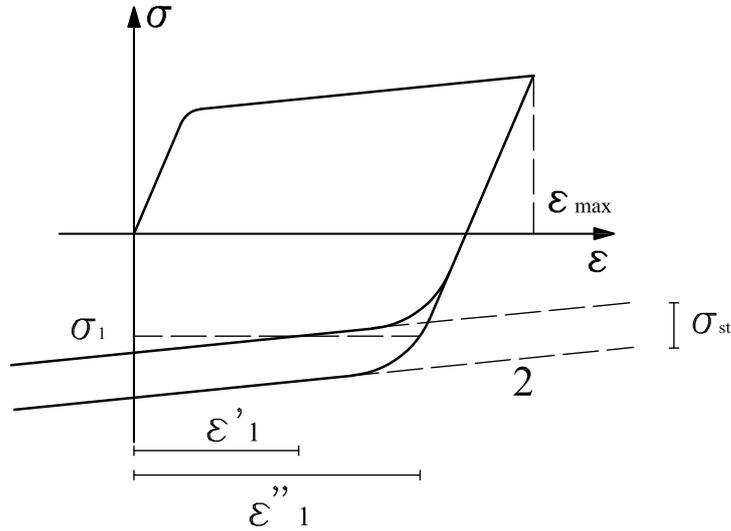


Figura 3.43: modello Menegotto-Pinto modificato da Filippou.

- calcolo della σ essendo nota la σ^* invertendo la (3.38).

L'implementazione è stata eseguita valutando ad ogni passo di carico la differenza di deformazione data da:

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon_n &= \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \\ \Delta\epsilon_{n-1} &= \epsilon_n - \epsilon_{n-1} \end{aligned}$$

essendo ϵ la deformazione al passo n . Il parametro utilizzato per valutare l'inversione di deformazione è stato il prodotto tra le ultime due differenze di deformazione; è pertanto possibile il verificarsi di due condizioni:

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \Delta\epsilon_n \Delta\epsilon_{n-1} &> 0 \\ \Delta\epsilon_n \Delta\epsilon_{n-1} &< 0 \end{aligned}$$

- (1) nel primo caso ($\Delta\epsilon_n \Delta\epsilon_{n-1} > 0$) il fatto che il prodotto tra le differenze di deformazione abbia segno positivo implica che non vi è stato nell'ultimo passo di deformazione una inversione della direzione di deformazione: questo implica a sua volta che non è necessario aggiornare i parametri $\sigma_0, \epsilon_0, \sigma_r, \epsilon_r, \xi, R(\xi)$;
- (2) nel secondo caso $\Delta\epsilon_n \Delta\epsilon_{n-1} < 0$, invece, il fatto che il prodotto sia negativo significa che è avvenuta l'inversione della direzione di deformazione e pertanto è necessario ricalcolare i seguenti parametri:

- σ_r ed ε_r , assunte pari alla tensione ed alla deformazione nell'ultimo punto prima dell'inversione della deformazione;
- σ_0 ed ε_0 , ricalcolate valutando la nuova intersezione degli asintoti valutando l'inversione della curvatura dell'arco plastico;
- ξ , valutato come massima escursione plastica raggiunto nel precedente ciclo;
- $R(\xi)$, funzione di ξ .

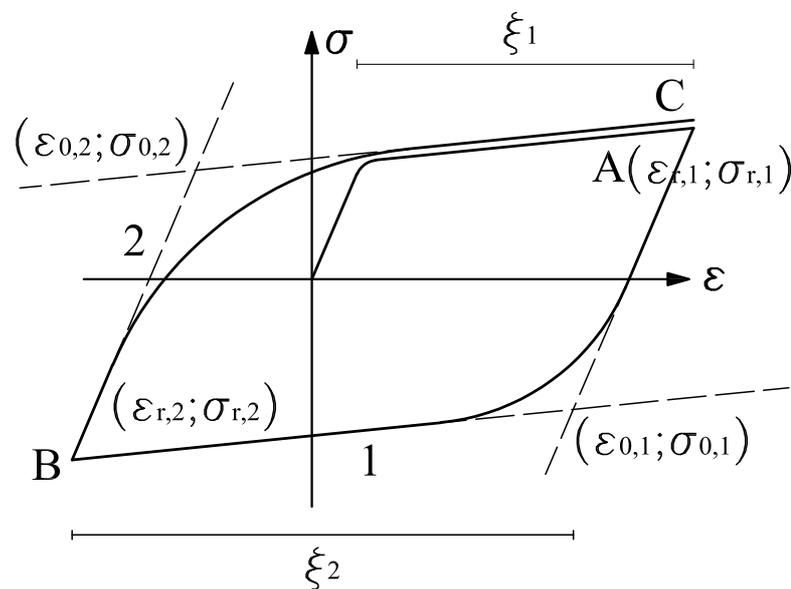


Figura 3.44: modello Menegotto-Pinto implementato.

Supponendo ad esempio di riferirsi alla figura 3.44, valutando il passaggio dall'arco 1 lungo (AB) all'arco 2 lungo (BC), si ha l'aggiornamento dei parametri come rappresentato:

- se relativamente al primo arco il punto $(\sigma_r, \varepsilon_r)$ coincideva col punto A, ovvero il punto ove era avvenuta l'ultima inversione, relativamente alla seconda curva esso coincide col punto B;
- il punto $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ viene valutato per la curva 2 nel quarto quadrante, ove si colloca la zona di curvatura dell'arco (BC) e dove si ha la nuova intersezione degli asintoti;
- il parametro ξ viene aggiornato con la escursione plastica del ciclo precedente, esprimibile come la differenza tra ε_r del passo attuale ed ε_0 del passo precedente.

Per calcolare il valore della tensione in funzioni della deformazione, riprendendo la relazione (3.37) è possibile calcolare la ε^* , attraverso cui ricavare la σ^* dalla (3.36), essendo noto $R(\xi)$ dalla (3.39) e infine ricavare la tensione ricorrendo alla (3.38).

Il calcolo del modulo tangente è stato eseguito valutando la derivata delle tensioni in funzioni delle deformazioni e quindi:

$$(3.43) \quad E_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

$$(3.44) \quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r = \\ &= \left[b \varepsilon^* + \frac{(1-b) \varepsilon^*}{(1 + \varepsilon^* R)^{\frac{1}{R}}} \right] (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r = \\ &= \left\{ b \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right) + \frac{(1-b) \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R \right]^{\frac{1}{R}}} \right\} (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r \end{aligned}$$

che derivata diventa:

$$(3.45) \quad E_T = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = (\sigma_0 - \sigma_r) \left\{ \frac{b}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} + \frac{\left(\frac{1-b}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R \right]^{\frac{1}{R}}} + \right. \\ \left. - \frac{\left(\frac{1-b}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R \right]^{\frac{1}{R}}} \left[\frac{\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R}{\left(1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \right)^R} \right] \right\}$$

Il modello è stato implementato infine utilizzando i seguenti parametri visti nelle equazioni dalla (3.36) alla (3.38):

3.3 IL MODELLO COSTITUTIVO DELL'ACCIAIO

$$(3.46) \quad R_0 = 20$$

$$(3.47) \quad a_1 = 18,5$$

$$(3.48) \quad a_2 = 0,15$$

$$(3.49) \quad a_3 = 0$$

$$(3.50) \quad a_4 = 0$$

Si riportano di seguito dei grafici (figure 3.45-3.48) che rappresentano alcune prove eseguite utilizzando il legame implementato.

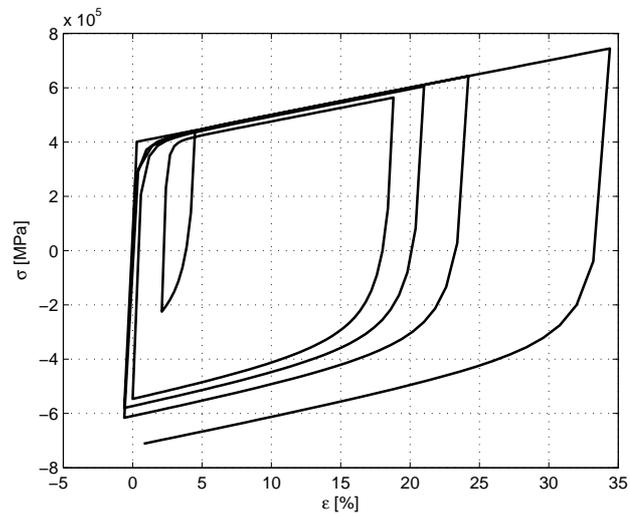


Figura 3.45: modello Menegotto-Pinto implementato, prova ciclica.

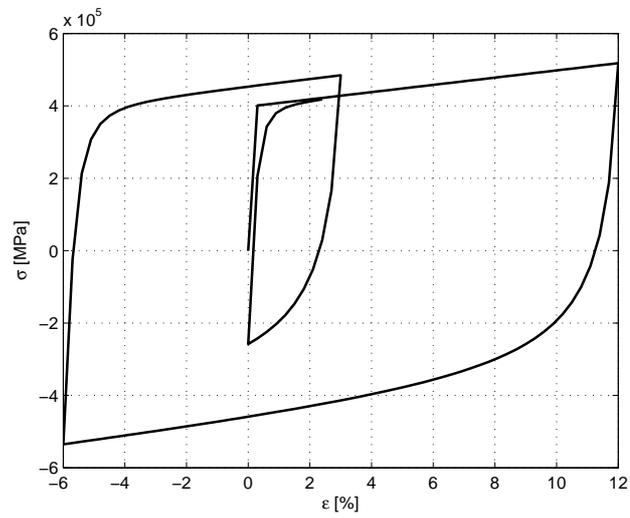


Figura 3.46: modello Menegotto-Pinto implementato, prova ciclica.

3.3 IL MODELLO COSTITUTIVO DELL'ACCIAIO

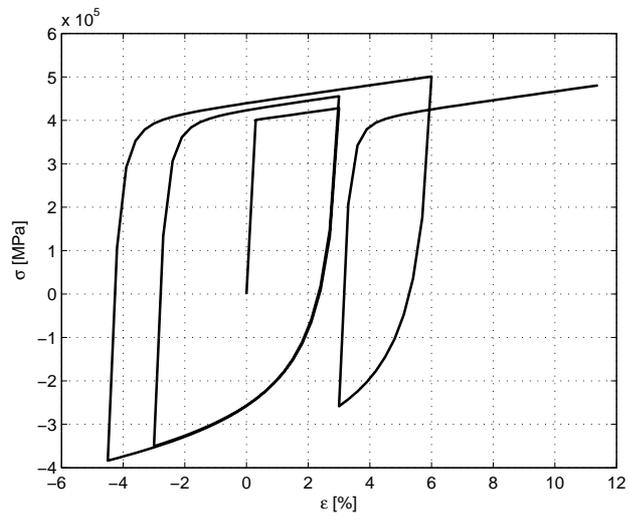


Figura 3.47: modello Menegotto-Pinto implementato, prova ciclica.

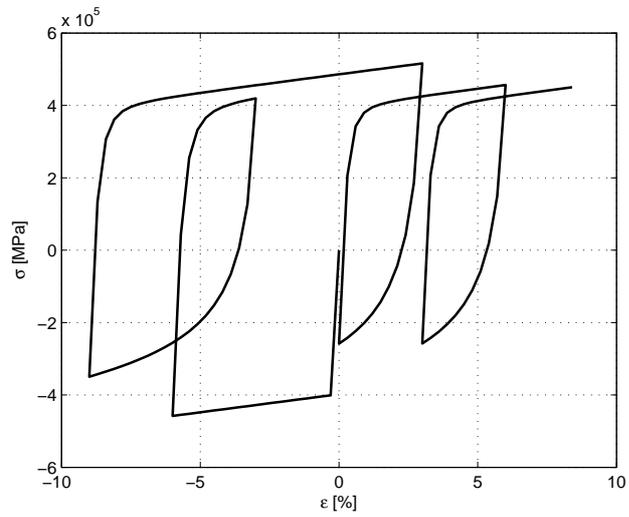


Figura 3.48: modello Menegotto-Pinto implementato, prova ciclica.

CAPITOLO 4

Le prove numeriche di verifica dei modelli

Sono state compiute delle prove per verificare il corretto funzionamento dell'elemento implementato e dei legami costituiti dai modelli. In questa fase si è privilegiata l'analisi di problemi molto semplici, affinché l'essenzialità della struttura testata consentisse di evidenziare immediatamente eventuali aspetti non desiderati e di individuarne univocamente la causa. Le analisi infatti sono state compiute su mensole, a cui sono stati applicati spostamenti e carichi di tipo assiale, trasversale e flessionale.

Tutte le prove sono state eseguite facendo di volta in volta variare quelli che sono stati ritenuti i parametri più significativi per la descrizione del problema. Tali parametri sono:

- il materiale adottato;
- il numero di fibre;
- il numero di elementi;
- il tipo di controllo con cui la prova è stata eseguita (in forza o in spostamento);
- le condizioni di vincolo della struttura.

D'altro canto, nell'esecuzione di tale fase di prove, sono stati mantenuti costanti le caratteristiche geometriche della trave analizzata, sia per quanto riguarda la sezione (figura 4.1), che la dimensione principale lungo l'asse (figura 4.2), che il vincolo di incastro al primo nodo. Si sono adottate fibre tutte della stessa dimensione assegnando a ciascuna un tipo di materiale.

Facendo riferimento alla figura 4.2, nelle prove di spostamento trasversale e di taglio tali azioni sono state applicate lungo l'asse z , mentre nelle prove di rotazione e momento si sono considerate azioni intorno all'asse y .

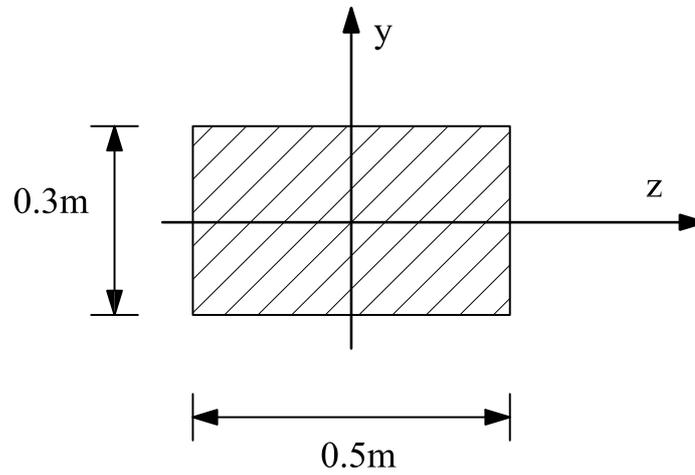


Figura 4.1: sezione tipo utilizzata in tutte le prove e sistema di riferimento.

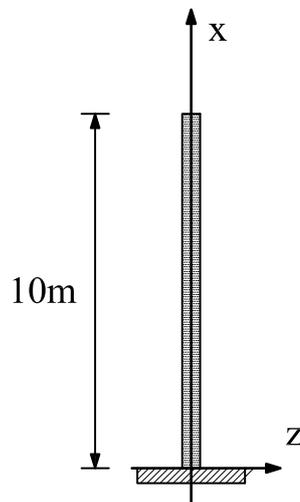


Figura 4.2: struttura utilizzata in tutte le prove e sistema di riferimento adottato.

Le prove sono state compiute sia in controllo di forza che in controllo di spostamento.

Le prove in controllo di spostamento sono state eseguite determinando quale fosse lo spostamento nodale da assegnare alla struttura e calcolando in funzione di questo tutti i parametri di interesse nell'analisi.

Le prove in controllo di forza, invece, sono state eseguite utilizzando una procedura di determinazione del carico denominata *arclength*.

Attraverso tale metodologia numerica è possibile aggirare i problemi tipici di analisi in controllo di forza che riguardano il comportamento post picco dei materiali caratterizzati dalla presenza di un ramo di *softening*. Nel caso

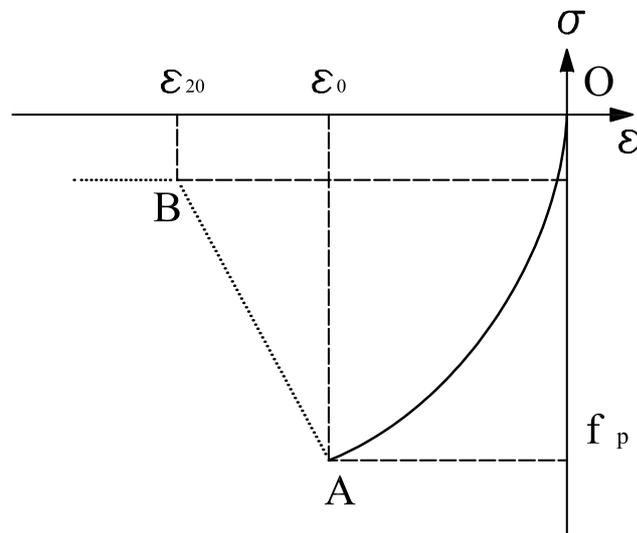


Figura 4.3: problemi di rappresentazione dello scarico in controllo di forza.

che si sta trattando, un materiale con un comportamento con softening è il calcestruzzo, per il quale, dopo aver raggiunto il picco massimo di tensione, si ha un ramo discendente (figura 4.3). Questo significa che in controllo di forza, supponendo di aumentare l'entità della forza di compressione in un elemento omogeneo di calcestruzzo fino ad arrivare alla tensione massima del materiale f_p del punto A , è poi impossibile aumentare ulteriormente la forza applicata. Risulta pertanto impossibile anche descrivere il tratto di curva della figura 4.3 tra il punto (A) ed il punto (B) . Se si riducesse la forza agente, infatti, si avrebbe uno scarico con diminuzione in modulo della deformazione. Tipicamente pertanto, ogni volta che si controlla lo schema di

carico e si supera la capacità limite nascono notevoli problemi ad ottenere la soluzione corretta.

La procedura dell'arclength permette di analizzare il ramo post-picco considerando, oltre che la forza agente, anche la lunghezza del ramo del grafico forza-spostamento. Essa rientra nella categoria dei metodi di analisi continuativa, che si basano sul mantenere costante la lunghezza di tale ramo ad ogni passo ed in questo modo ottenere in maniera più semplice la soluzione anche in caso di controllo di forza oltre il valore di carico limite. Come rappresentato in figura 4.4, infatti, è più facile ottenere la soluzione

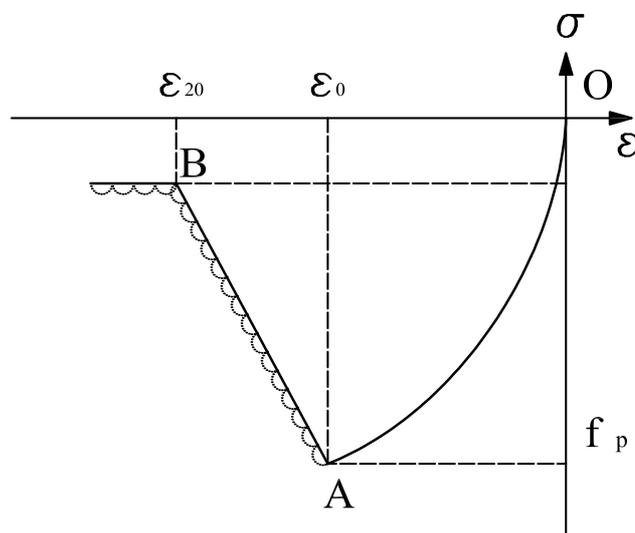


Figura 4.4: utilizzo dell'arclength per ottenere la soluzione della fase di scarico in controllo di forza: la lunghezza della curva ad ogni passo è mantenuta costante e questo permette di descrivere bene il ramo di softening del materiale.

senza problemi di divergenza impostando una lunghezza fissa del ramo di scarico ad ogni passo.

4.1. La verifica dell'elemento omogeneo in acciaio

4.1.1. Le caratteristiche del materiale. Le prove sull'elemento con la sezione omogenea di acciaio sono state compiute utilizzando un materiale dalle caratteristiche seguenti:

- modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
- rapporto tra modulo elastico e snervato: 0.005
- tensione di snervamento: $400MPa$
- parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - $R_0 = 20$
 - $a_1 = 18.5$
 - $a_2 = 0$
 - $a_3 = 0$
 - $a_4 = 0$

4.1.2. Le prove eseguite. Sono state compiute le seguenti prove:

- spostamento assiale applicato all'estremo libero
- azione assiale applicata all'estremo libero
- spostamento trasversale applicato all'estremo libero
- azione tagliante applicata all'estremo libero
- rotazione applicata all'estremo libero
- momento applicato all'estremo libero

Per ciascuno dei punti riportati precedentemente, sono state compiute almeno quattro prove, considerando le differenti combinazioni di numero di fibre e di elementi per modellare la trave:

- 1 elemento, 9 fibre
- 1 elemento, 100 fibre
- 5 elementi, 9 fibre
- 5 elementi, 100 fibre

4.1.3. I risultati ottenuti. I risultati evidenziano che al variare del numero di elementi e di fibre, le curve caratteristiche rimangono le stesse; si riportano a proposito i grafici dell'andamento della tensione-deformazione e della forza-spostamento relativa alle prove assiali, sia in controllo di spostamento (figure 4.5-4.8), che in controllo di forza (figure 4.9-4.12).

Per quanto riguarda le prove assiale, esse evidenziano una uniformità di risposta in tutte le fibre; relativamente alle prove di spostamento trasversale e di rotazione, invece, si è verificata l'antisimmetria di deformazione tra il

lembo teso e quello compresso, prova che l'asse neutro in entrambi i casi è centrale e la sezione si mantiene piana.

Si riportano i grafici delle prove in controllo di forza e di spostamento per quanto riguarda lo spostamento trasversale e la rotazione in sommità (figure 4.13-4.16).

4.1 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN ACCIAIO

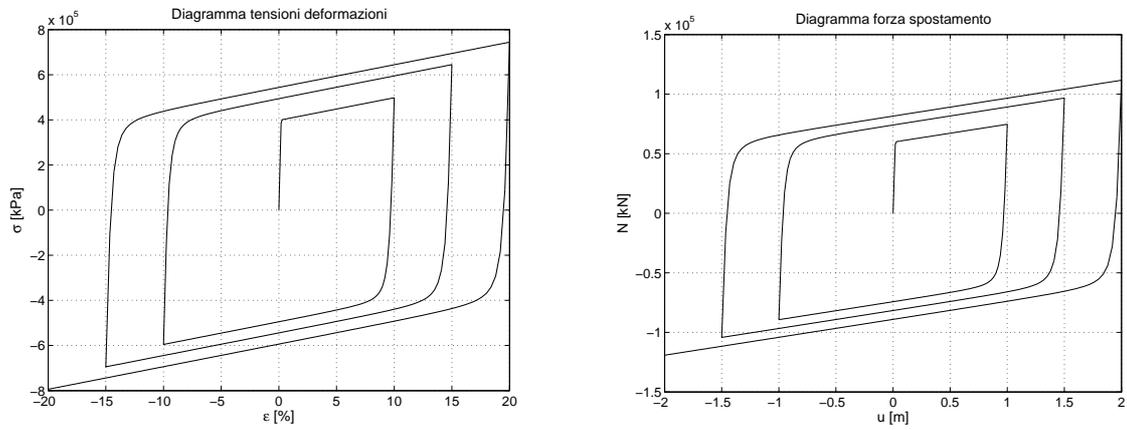


Figura 4.5: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 9 fibre.

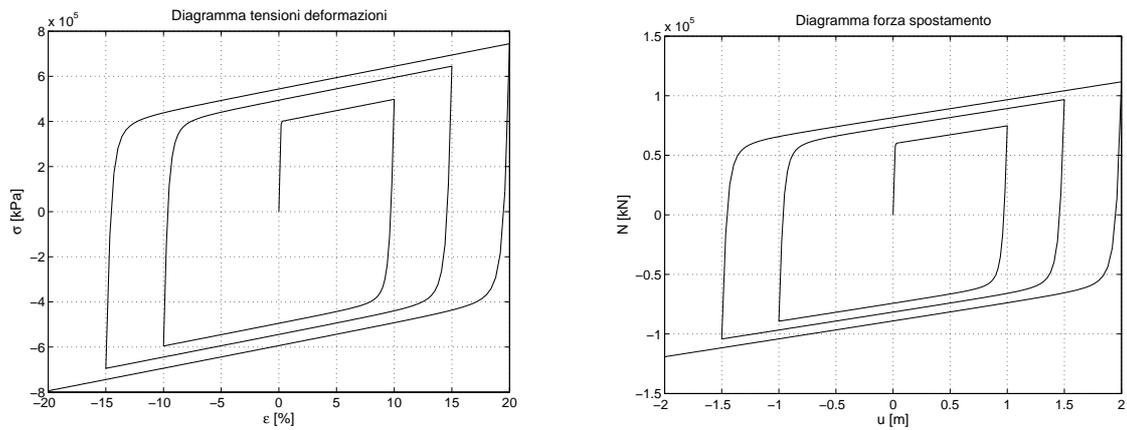


Figura 4.6: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre.

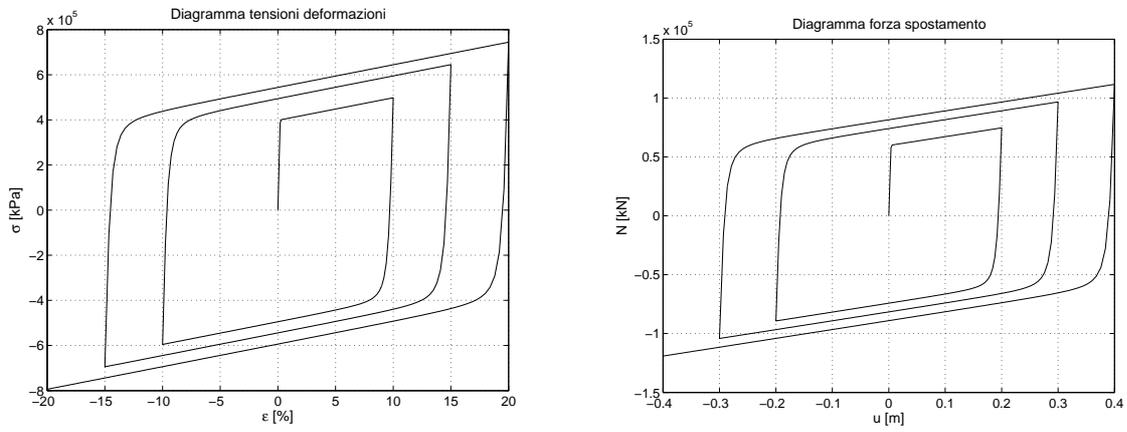


Figura 4.7: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su una trave di 5 elementi composti da 9 fibre.

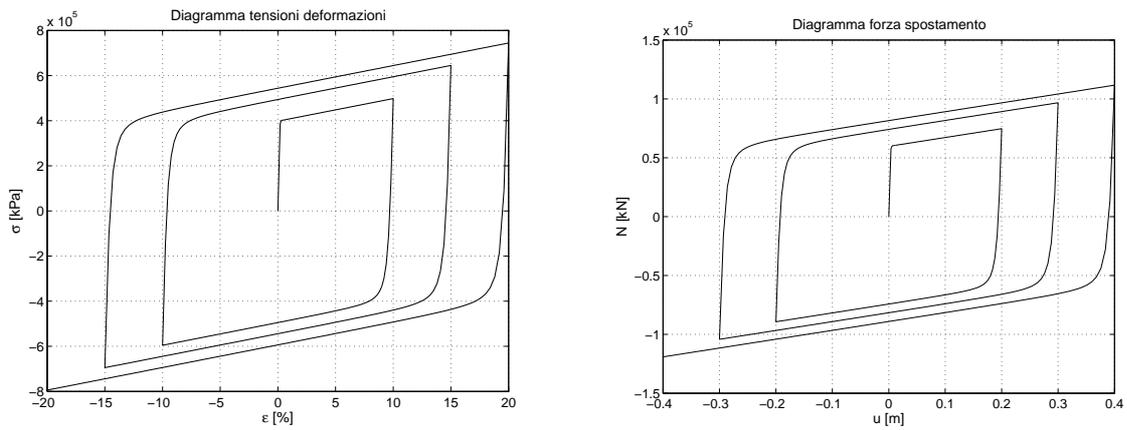


Figura 4.8: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

4.1 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN ACCIAIO

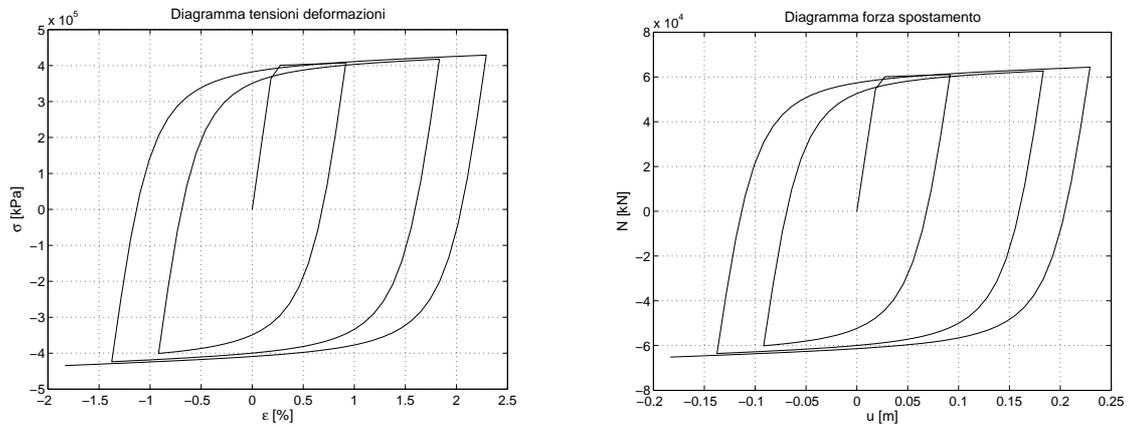


Figura 4.9: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con *arclength* su 1 elemento composto da 9 fibre.

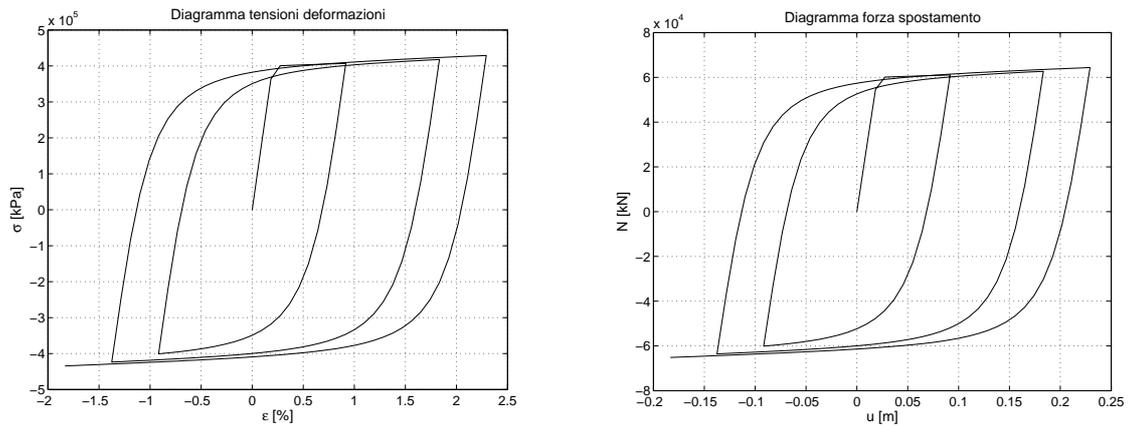


Figura 4.10: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre.

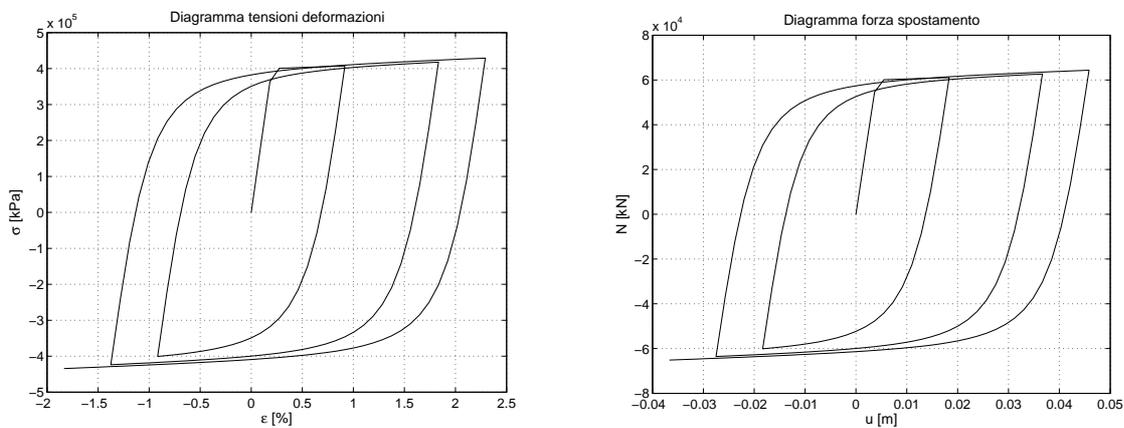


Figura 4.11: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su una trave di 5 elementi composti da 9 fibre.

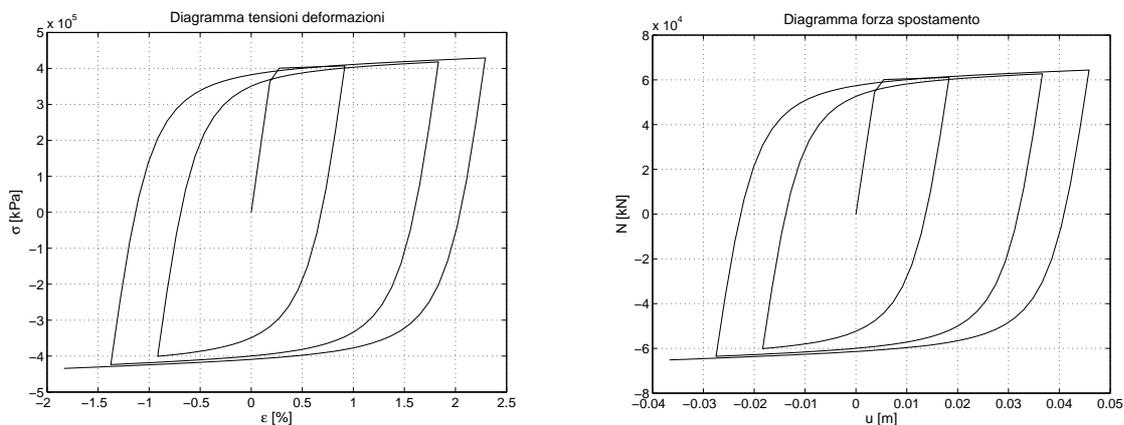


Figura 4.12: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

4.1 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN ACCIAIO

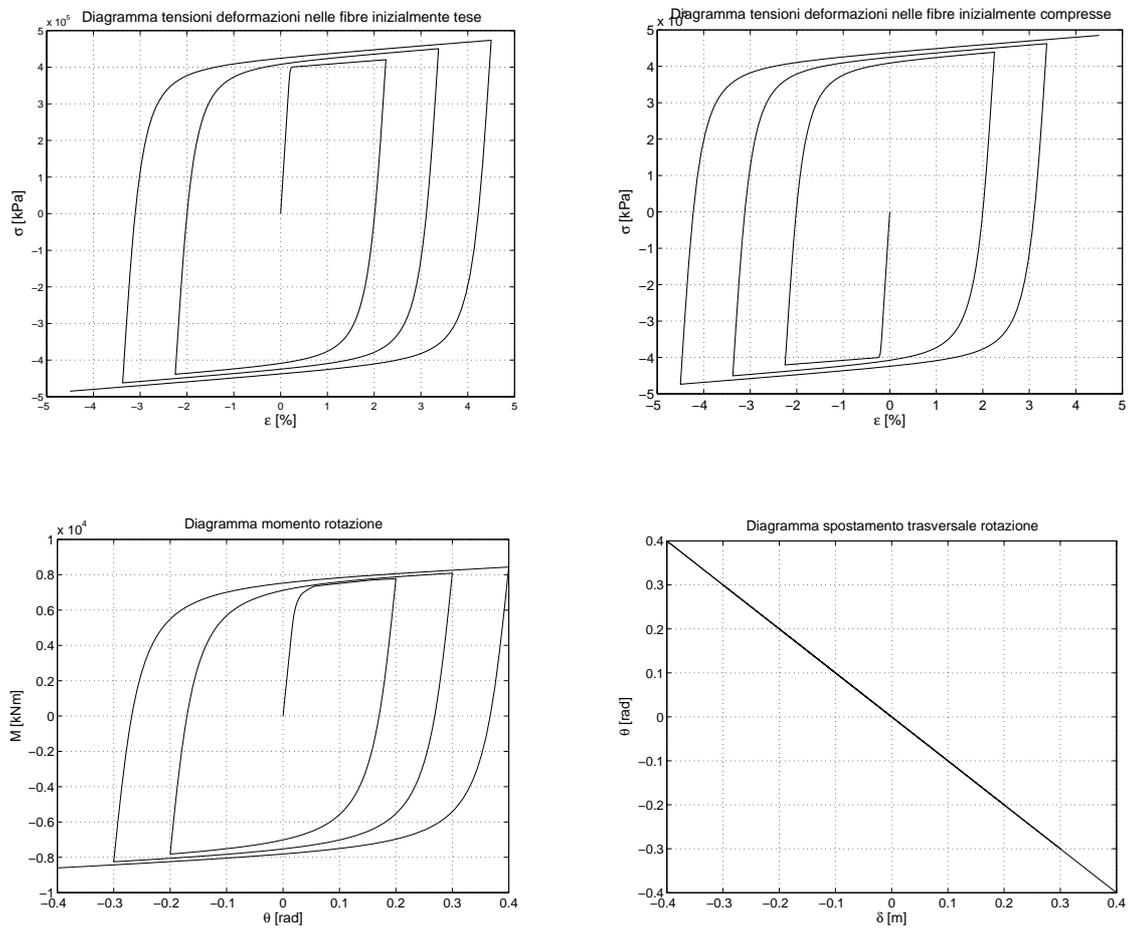


Figura 4.13: diagrammi relativi alla prova di rotazione in controllo di spostamento su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

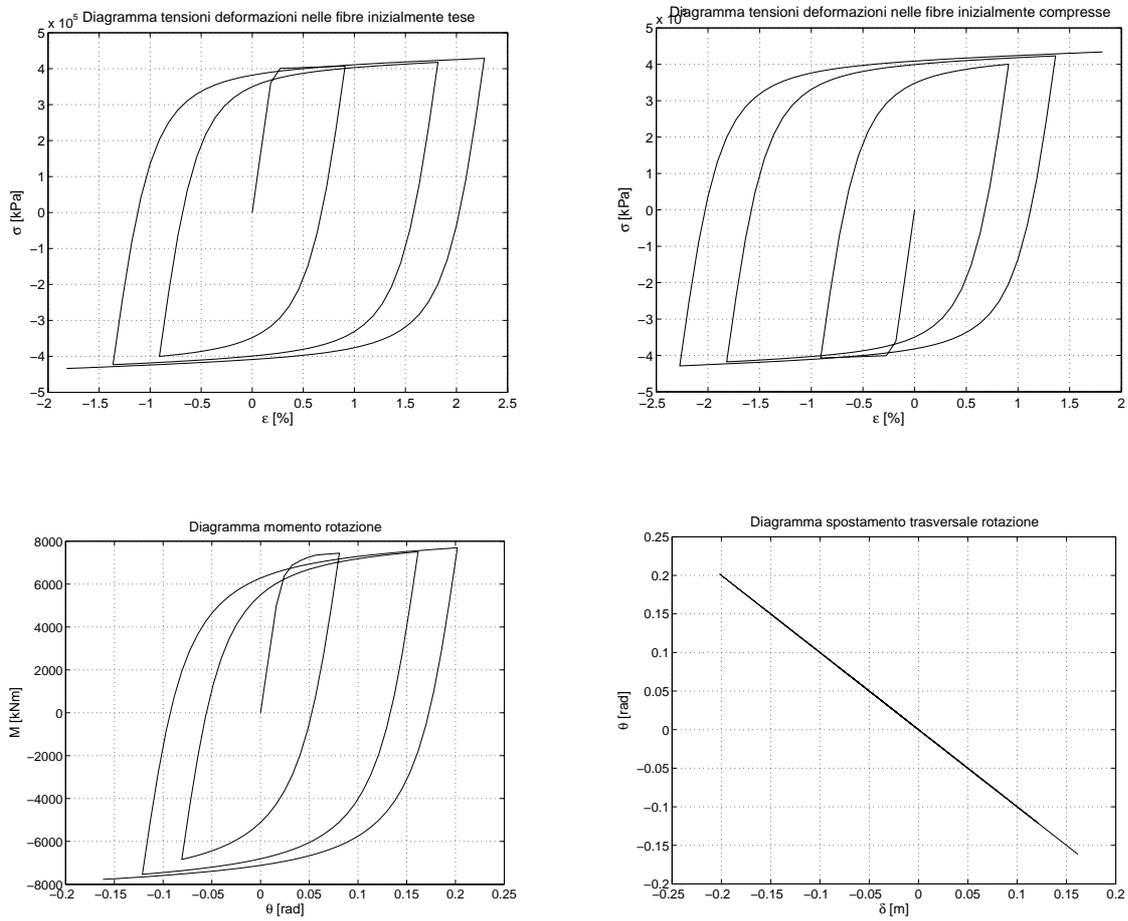


Figura 4.14: diagrammi relativi alla prova di rotazione in controllo di forza applicando un momento utilizzando l'*arclength* su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

4.1 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN ACCIAIO

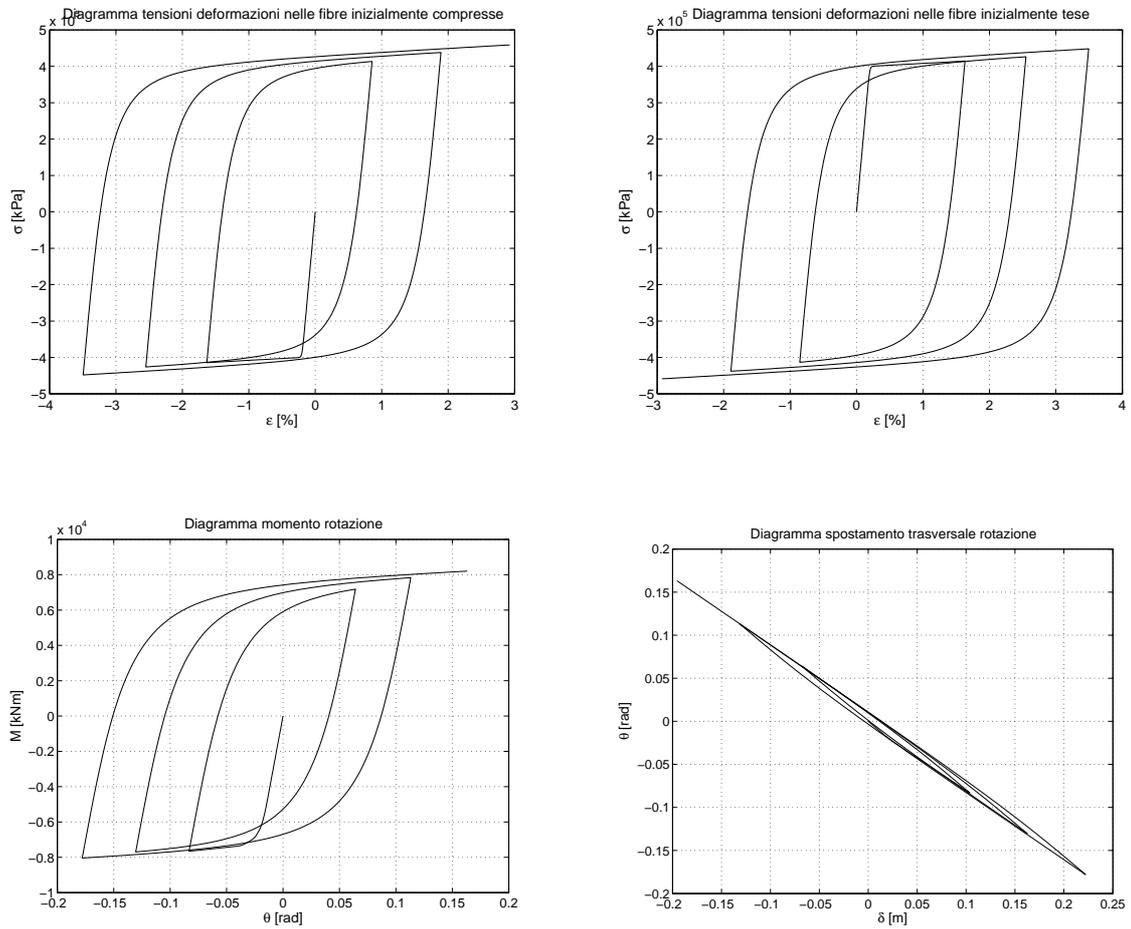


Figura 4.15: diagrammi relativi alla prova di spostamento trasversale in controllo di spostamento su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

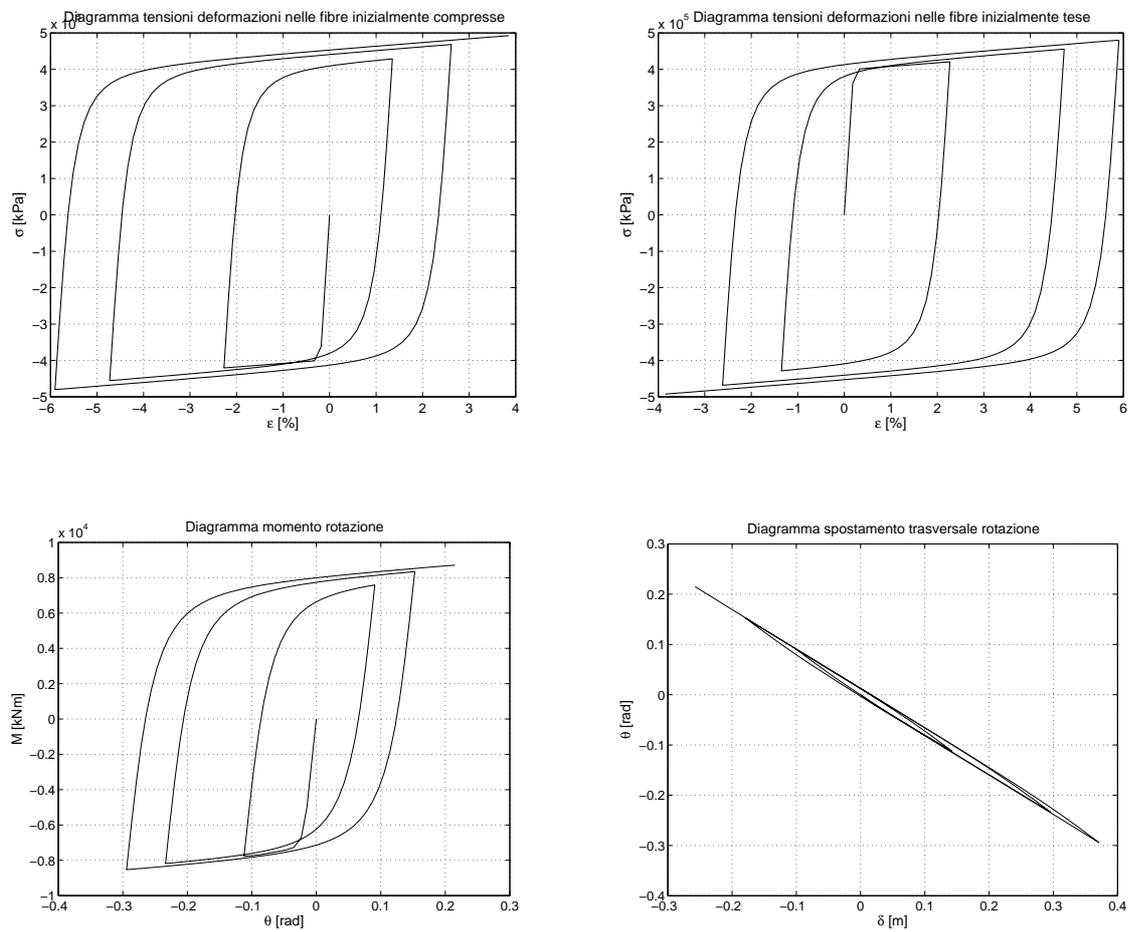


Figura 4.16: diagrammi relativi alla prova di spostamento trasversale in controllo di forza applicando un taglio utilizzando *l'arclength* su una trave di 5 elementi composti da 100 fibre.

4.2. La verifica dell'elemento omogeneo in calcestruzzo

4.2.1. Le caratteristiche del materiale. Le prove sulla mensola con la sezione omogenea di calcestruzzo sono state compiute utilizzando un materiale dalle caratteristiche seguenti:

- tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
- coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - $E_{20} = 0.05$
 - $E_{ts} = 0.3$
- tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
- percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.021$
- passo delle staffe $s = 0.2m$
- altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$

Le caratteristiche dell'armatura trasversale sono state inserite perché il modello del calcestruzzo implementato non può prescindere da esse: pertanto anche valutando un elemento totalmente in calcestruzzo sono stati assegnati i valori a tali parametri.

4.2.2. Le prove eseguite. Sono state compiute le seguenti prove con il calcestruzzo:

- spostamento assiale
- spostamento assiale con le rotazioni in y e in z bloccate
- azione assiale
- azione assiale con le rotazioni in y e in z bloccate
- rotazione
- rotazione con lo spostamento assiale bloccato
- momento
- momento con lo spostamento assiale bloccato
- spostamento trasversale
- spostamento trasversale con lo spostamento assiale bloccato
- azione tagliante
- azione tagliante con lo spostamento assiale bloccato

Per ciascuno dei punti riportati in precedenza sono state compiute quattro prove al variare del numero degli elementi e delle fibre attraverso cui è stata modellata la trave testata:

- 1 elemento, 9 fibre
- 1 elemento, 100 fibre
- 5 elementi, 9 fibre

- 5 elementi, 100 fibre

4.2.3. I risultati ottenuti. A differenza delle prove eseguite sulla mensola interamente in acciaio, nel caso della struttura in calcestruzzo si sono riscontrati problemi di convergenza.

Questo perché il modello del calcestruzzo implementato è caratterizzato dall'essere molto complesso, dall'aver un comportamento asimmetrico in trazione ed in compressione e perché la notevole non linearità del modello procura problemi difficilmente risolvibili.

Nell'ultimo tratto della curva del calcestruzzo in compressione il modulo elastico tangente è nullo; per evitare che in corrispondenza di tale tratto si abbia una matrice di rigidezza tangente singolare, si è fatto in modo che in tale tratto il modulo elastico tangente sia sostituito con il modulo elastico secante: questo da un lato consente di descrivere compiutamente tutta la curva in compressione sia in controllo di forza che di spostamento, ma dall'altro causa la perdita della convergenza quadratica della soluzione.

Si riscontrano notevoli problemi nella analisi strutturale di più elementi. Nel momento in cui infatti non si ha più a che fare con un solo elemento, si

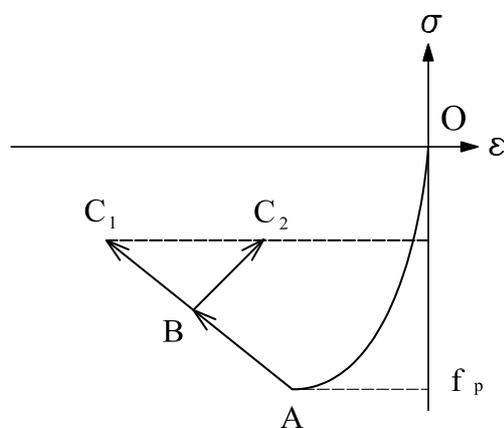


Figura 4.17: fenomeno della localizzazione.

hanno difficoltà di convergenza nella descrizione della fase di scarico della tensione presumibilmente per un fenomeno di localizzazione: la soluzione al problema potrebbe infatti non essere unica, nel senso che, se per un solo elemento la deformazione è univocamente definita dagli spostamenti nodali, nel momento in cui aumenta il numero degli elementi si possono trovare diverse soluzioni che garantiscono l'equilibrio.

La situazione che si può verificare è quella rappresentata nella figura 4.17, nella quale è rappresentata una generica storia di compressione del calcestruzzo. Supponendo di avere oltrepassato la tensione massima f_p e di essere giunti al punto B , la tensione che garantisce l'equilibrio (quella tratteggiata) può essere data sia dalla deformazione del punto C_1 che da quella del punto C_2 , ovvero sia ammettendo un incremento che un decremento di deformazione. Presumibilmente tale mancanza di unicità della soluzione è la causa a cui è imputabile la mancata convergenza nel caso di più elementi.

I problemi più gravi si sono avuti però nella prova di spostamento trasversale in controllo di spostamento, per la quale non si è arrivati a convergenza nemmeno utilizzando un solo elemento. Dai risultati si evince come sia ben descritto il tratto elastico o pseudoelastico sia in trazione che in compressione, ma poi si abbia perdita della convergenza con la mancata soluzione del problema residuale (figure 4.25 e 4.26).

Di seguito si riportano delle tabelle riassuntive dei risultati delle prove eseguite.

spostamento assiale			
rotazioni in sommità bloccate			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica);</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica);</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 1: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a spostamento assiale con rotazioni bloccate.

spostamento assiale			
rotazioni in sommità libere			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 2: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a spostamento assiale con rotazioni libere.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

forza assiale			
rotazioni in sommità bloccate			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica);</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica);</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 3: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a forza assiale con rotazioni in sommità bloccate.

forza assiale			
rotazioni in sommità libere			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 4: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a forza assiale con rotazioni in sommità libere.

spostamento trasversale			
spostamento assiale in sommità bloccato			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
NO	NO	NO	NO
<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>

Tabella 5: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a spostamento trasversale con estremo bloccato assialmente.

spostamento trasversale			
spostamento assiale in sommità libero			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
NO	NO	NO	NO
<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>	<i>assenza di convergenza; l'energia relativa dopo 20 iterazioni è dell'ordine di 10^{-1}</i>

Tabella 6: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a spostamento trasversale con estremo libero di spostarsi assialmente.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

forza trasversale			
spostamento assiale in sommità bloccato			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 7: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a taglio in sommità con estremo bloccato assialmente.

forza trasversale			
spostamento assiale in sommità libero			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>mancanza di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 8: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a taglio in sommità con estremo libero di spostarsi assialmente.

spostamento rotazionale			
spostamento assiale in sommità bloccato			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 9: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a rotazione in sommità con estremo bloccato assialmente.

spostamento rotazionale			
spostamento assiale in sommità libero			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 10: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a rotazione in sommità con estremo libero di spostarsi assialmente.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

forza rotazionale			
spostamento assiale in sommità bloccato			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 11: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a momento in sommità con estremo bloccato assialmente.

forza rotazionale			
spostamento assiale in sommità libero			
1 elemento		5 elementi	
9 fibre	100 fibre	9 fibre	100 fibre
SI	SI	NO	NO
<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>per arrivare a convergenza nel tratto plastico è necessario utilizzare il modulo secante (convergenza non quadratica)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>	<i>manca di convergenza nella descrizione della fase di scarico (problema di localizzazione)</i>

Tabella 12: prova del modello del calcestruzzo su trave soggetta a momento in sommità con estremo libero di spostarsi assialmente.

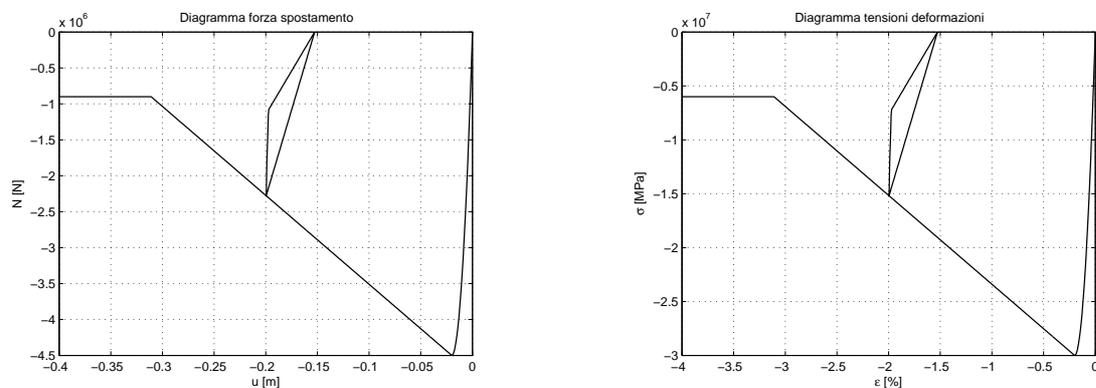


Figura 4.18: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 9 fibre con rotazioni in sommità libere.

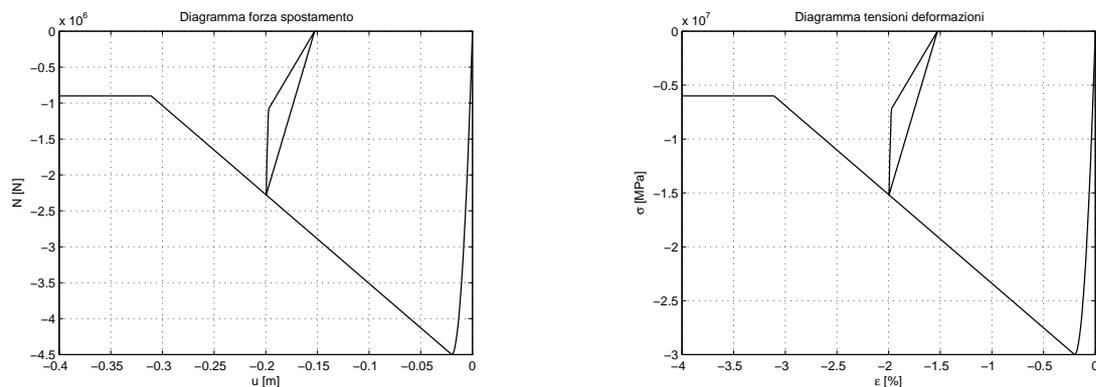


Figura 4.19: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità libere.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

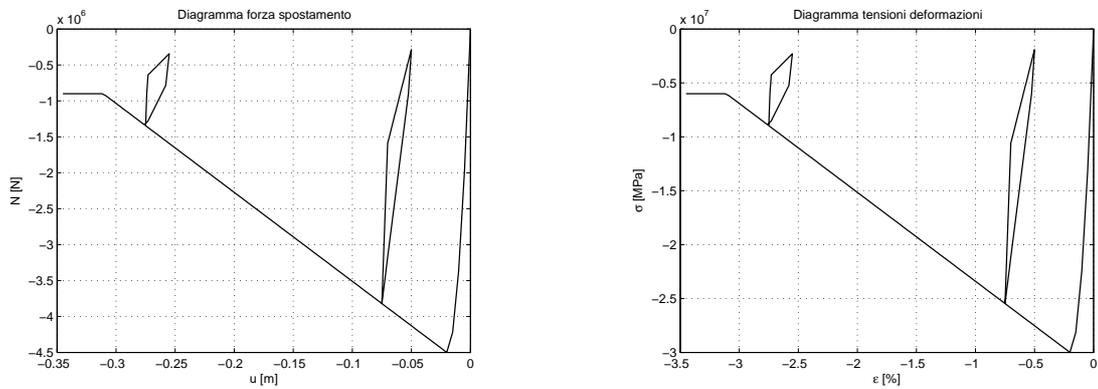


Figura 4.20: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 9 fibre con rotazioni in sommità libera.

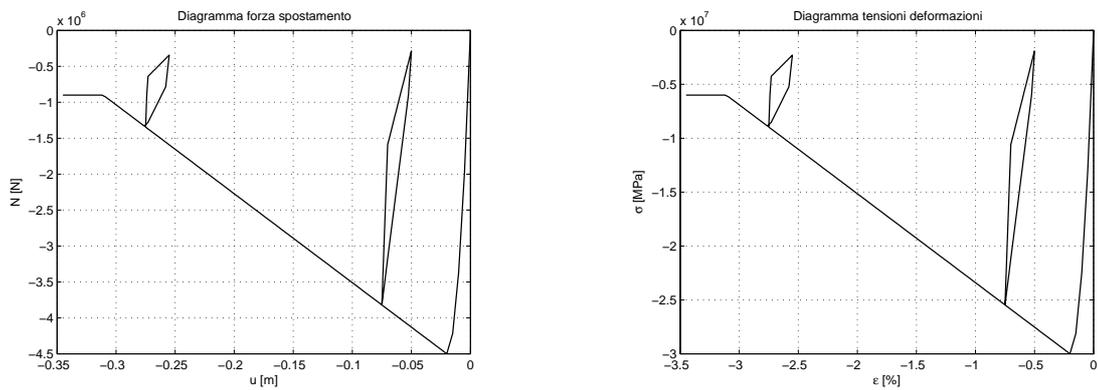


Figura 4.21: diagrammi relativi alla prova assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità libera.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

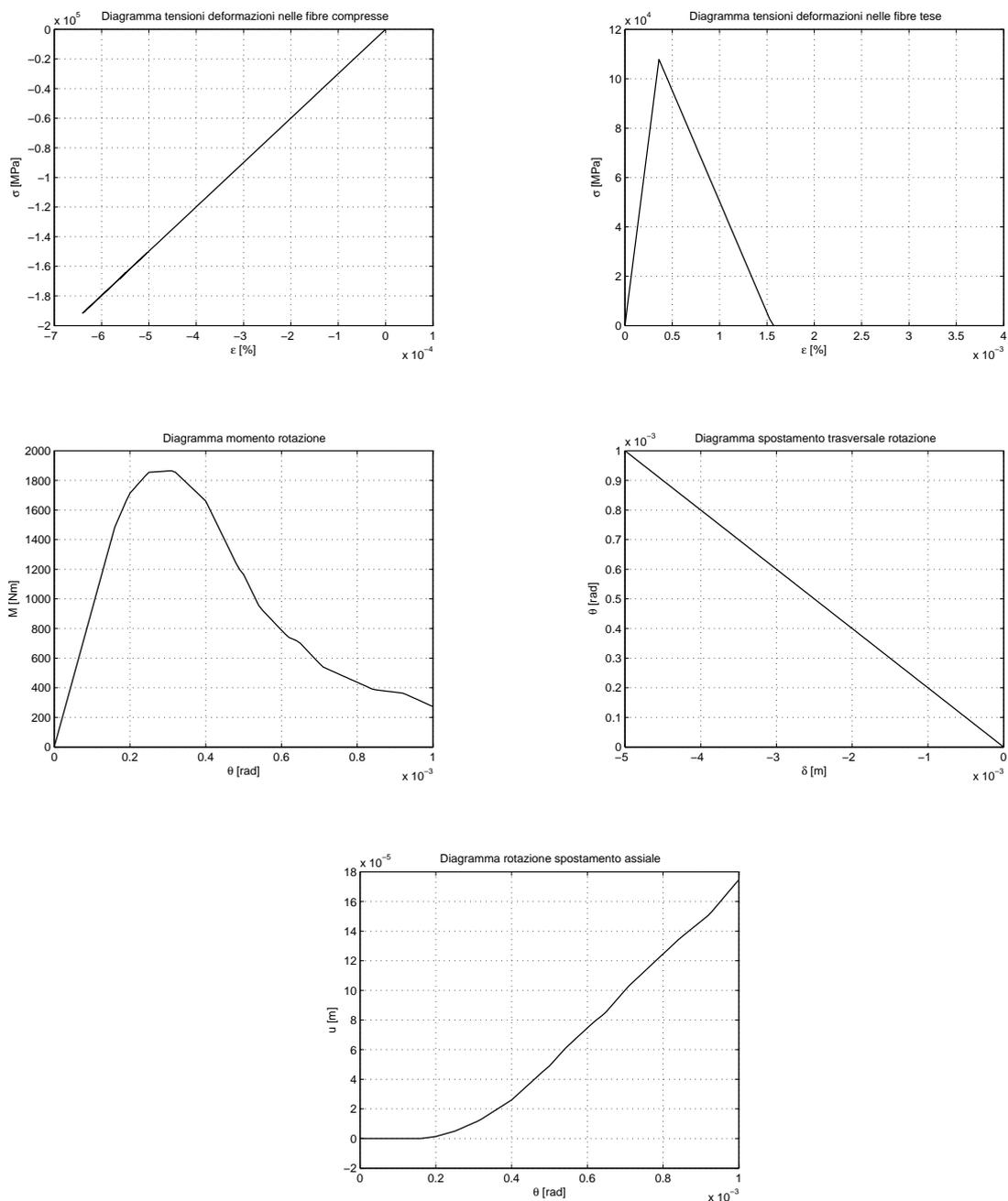


Figura 4.22: diagrammi relativi alla prova di rotazione in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

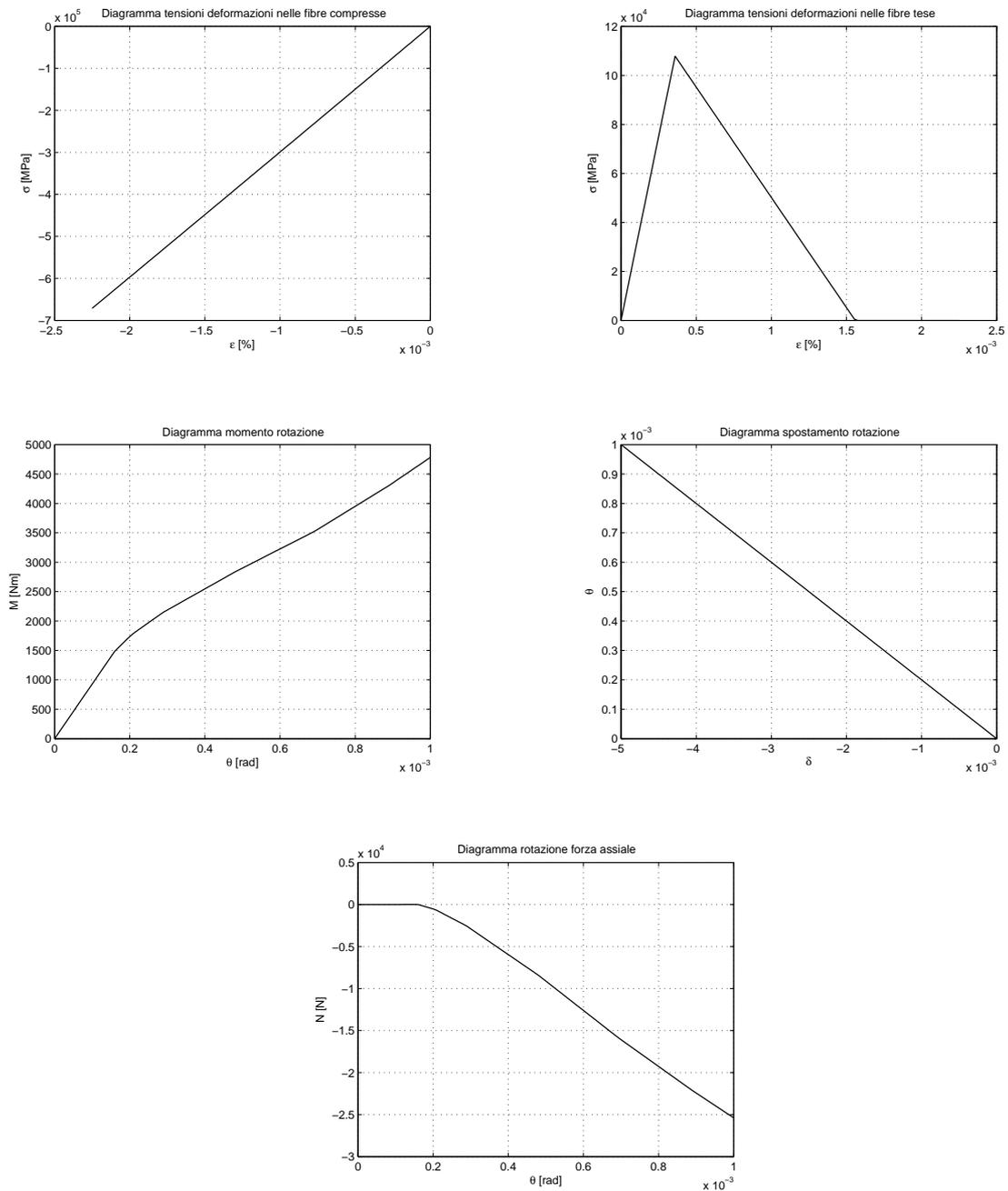


Figura 4.23: diagrammi relativi alla prova di rotazione in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

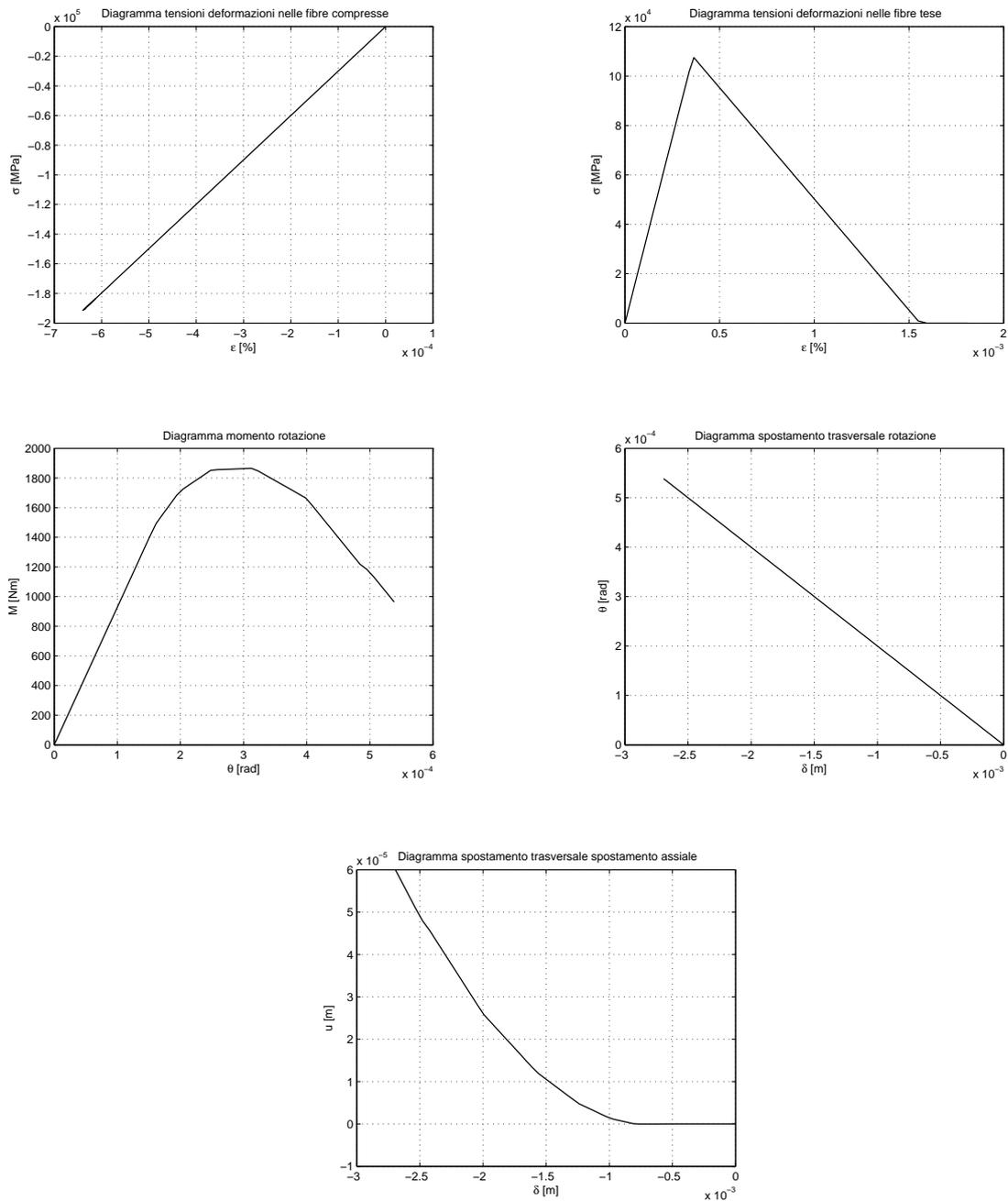


Figura 4.24: diagrammi relativi alla prova di rotazione in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

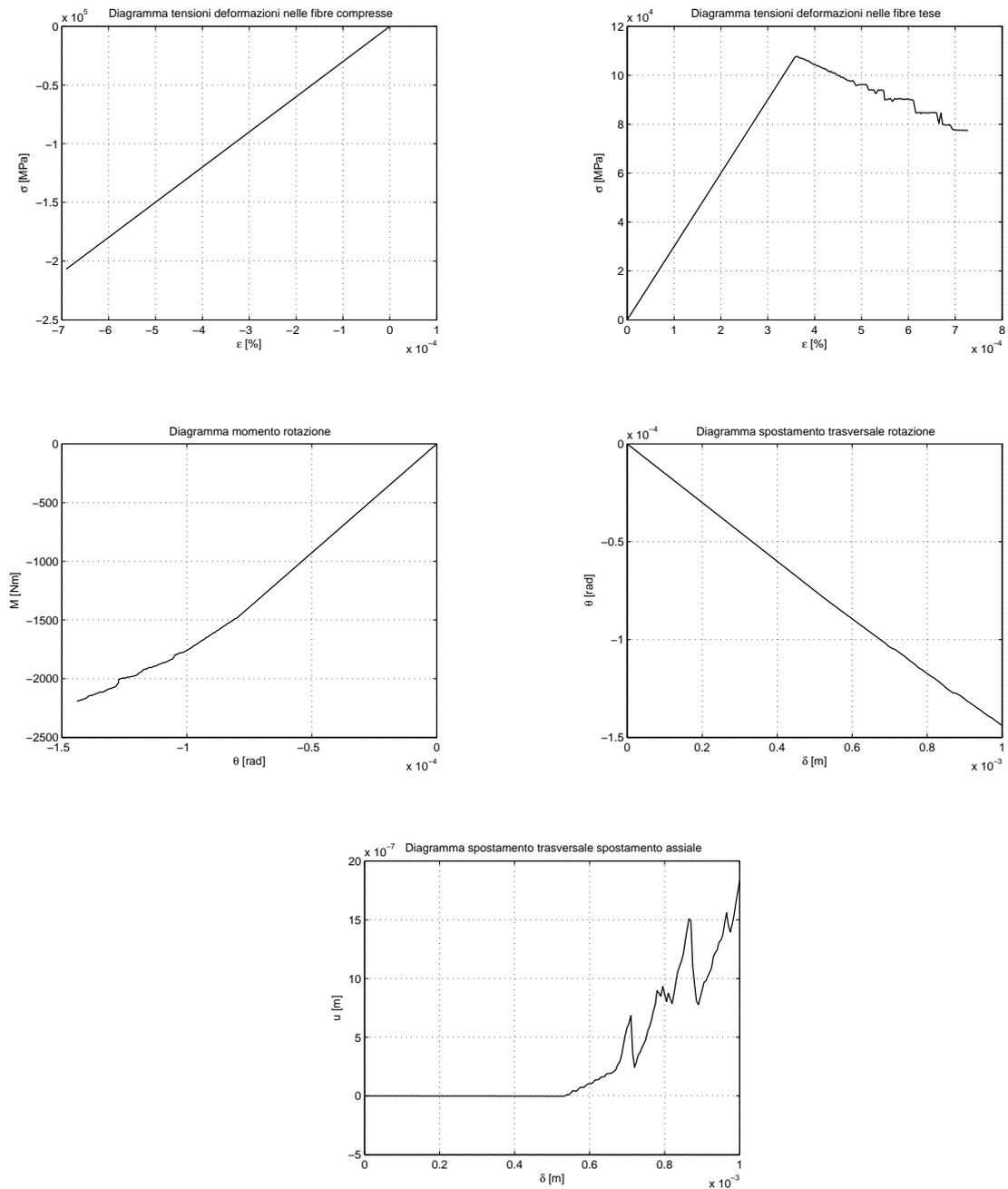


Figura 4.25: diagrammi relativi alla prova di spostamento trasversale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero; dalle figure è possibile riscontrare i problemi di convergenza evidenziati.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

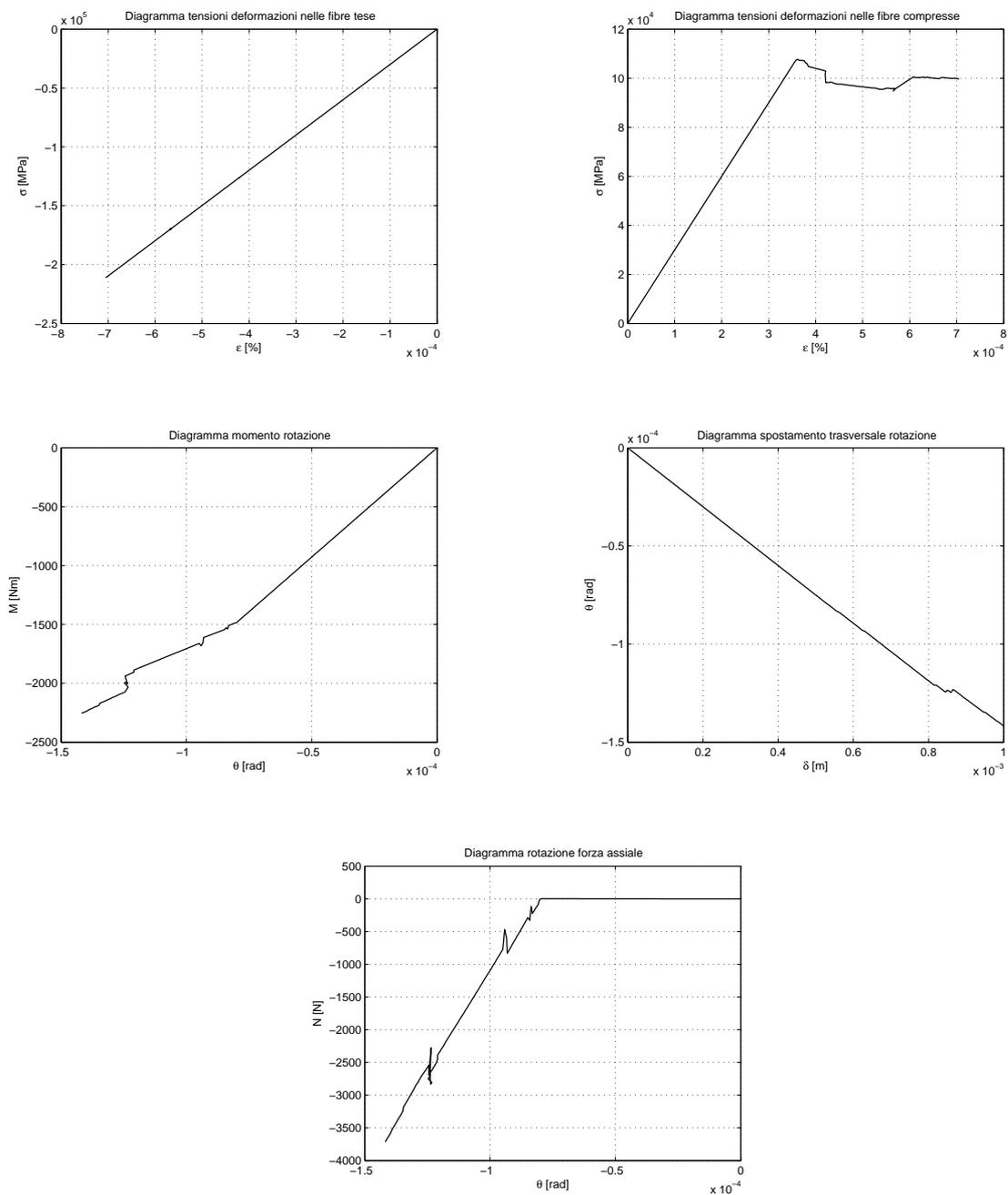


Figura 4.26: diagrammi relativi alla prova di spostamento trasversale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato; dalle figure è possibile riscontrare i problemi di convergenza evidenziati.

4.2 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO OMOGENEO IN CALCESTRUZZO

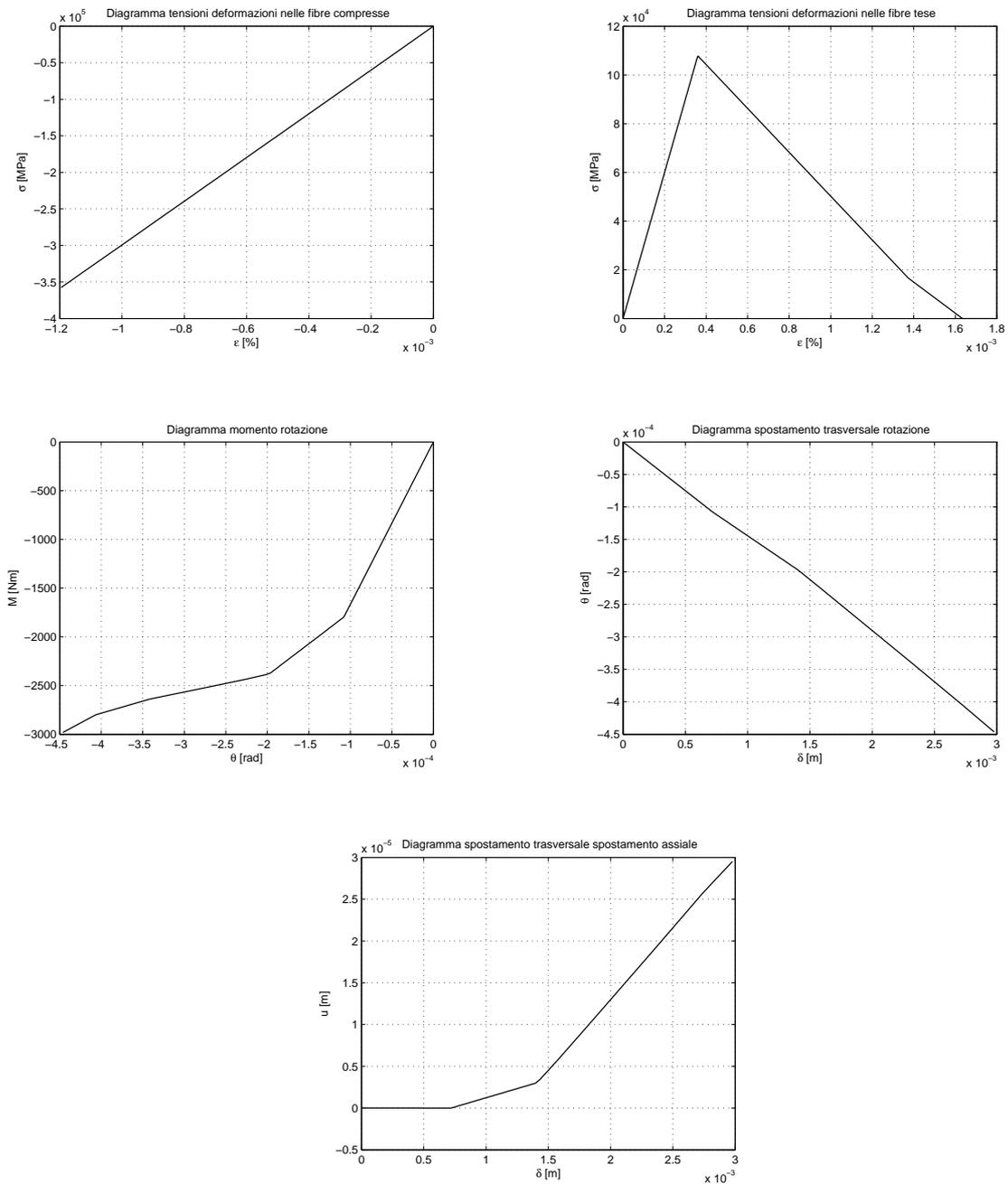


Figura 4.27: diagrammi relativi alla prova di spostamento trasversale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

4.3. La verifica dell'elemento in calcestruzzo armato

4.3.1. Le caratteristiche geometriche. Nelle prove di elementi composti da calcestruzzo armato si utilizzano sezioni di trave non omogenee, definendo per ogni fibra quale sia il materiale di cui essa è composta.

Nei test compiuti si è usata una sezione rettangolare suddivisa in cento fibre della medesima area; le fibre poi sono state ripartite in modo che quattro di esse, poste in prossimità dei quattro vertici, risultassero essere di acciaio, mentre le altre di calcestruzzo (figura 4.28). Tale configurazione è stata scelta

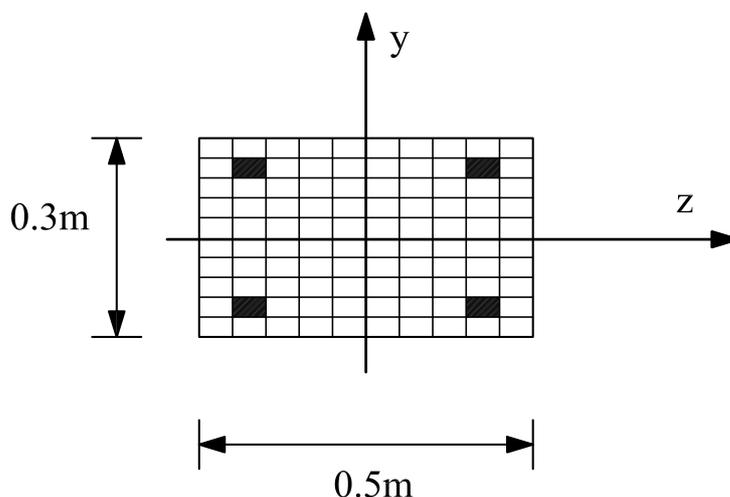


Figura 4.28: sezione non omogenea utilizzata per eseguire le prove: sono evidenziate le 4 fibre di acciaio.

per simulare la tipologia di una trave con armatura simmetrica, supponendo di avere un copriferro in calcestruzzo e un nucleo confinato interno, anche se in tale contesto le caratteristiche adottate per le fibre di calcestruzzo esterne e per quelle interne rispetto all'armatura sono le stesse.

Anche nel caso di sezione non omogenea, lo spostamento trasversale ed il taglio sono stati assegnati in direzione z e la rotazione ed il momento flettente sono stati assegnati intorno all'asse y .

4.3.2. Le caratteristiche dei materiali. Le caratteristiche dei materiali utilizzati per eseguire le prove sono state le seguenti:

4.3.2.1. Il calcestruzzo.

- tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
- coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - $E_{20} = 0.05$
 - $E_{ts} = 0.3$
- tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
- percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.005$
- passo delle staffe $s = 0.2m$
- altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$

4.3.2.2. L'acciaio.

- modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
- rapporto tra modulo elastico e snervato: 0.005
- tensione di snervamento: $400MPa$
- parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - $R_0 = 20$
 - $a_1 = 18.5$
 - $a_2 = 0$
 - $a_3 = 0$
 - $a_4 = 0$

L'unico parametro cambiato rispetto alle prove eseguite in precedenza è la percentuale di armatura trasversale che è stata ridotta.

4.3.3. Le prove eseguite.

- Sono state compiute le seguenti prove :
- spostamento assiale applicato all'estremo libero della trave
 - spostamento assiale applicato all'estremo della trave nel quale sono state bloccate le rotazioni in y e in z
 - azione assiale applicata all'estremo libero della trave
 - azione assiale applicata all'estremo della trave nel quale sono state bloccate le rotazioni in y e in z
 - spostamento trasversale applicato all'estremo libero
 - spostamento trasversale applicato all'estremo della trave nel quale è stato bloccato lo spostamento assiale
 - azione tagliante applicata all'estremo libero della trave
 - azione tagliante applicata all'estremo della trave nel quale è stato bloccato lo spostamento assiale
 - rotazione applicata all'estremo libero della trave

- rotazione applicata all'estremo della trave nel quale è stato bloccato lo spostamento assiale
- momento applicato all'estremo libero della trave
- momento applicato all'estremo libero della trave nel quale è stato bloccato lo spostamento assiale

Per le prove in regime assiale sono state compiute analisi valutando la risposta nelle seguenti condizioni:

- 1 elemento, carico monotono
- 1 elemento, carico ciclico
- 5 elementi, carico monotono
- 5 elementi, carico ciclico

mentre per quanto riguarda le prove in regime trasversale e di rotazione sono state valutate le condizioni:

- 1 elemento, carico monotono
- 1 elemento, carico ciclico

4.3.4. I risultati ottenuti. I risultati ottenuti hanno in parte condizionato anche le prove eseguite, nel senso che, appurato attraverso l'analisi dei risultati delle prove in regime assiale una persistenza dei problemi di localizzazione, negli altri regimi sollecitativi sono state compiute analisi approfondite soltanto con un elemento, avendo verificato di avere gli stessi problemi anche nel caso trasversale e rotazionale.

Inoltre in questo caso non si è distinto tra prove eseguite al variare del numero delle fibre, avendo verificato che, se rimane costante l'area di armatura e la disposizione della stessa, all'aumentare del numero delle fibre i risultati non cambiano significativamente.

4.3.4.1. Le prove in regime assiale. Le prove eseguite in regime assiale ed in controllo di spostamento evidenziano una forte differenza di comportamento tra il caso in cui sono vincolate le rotazioni al nodo libero ed il caso in cui non lo sono. Qualora infatti tali rotazioni siano impedito, la storia risultante dall'analisi è esattamente quella che ci si aspetta, con deformazioni della stessa entità e segno in tutte le fibre della sezione. Tale aspetto è ben descritto dalla figura 4.29, nella quale si vede che i diagrammi di fibre differenti ma dello stesso materiale sono esattamente gli stessi.

Come illustra invece la figura 4.30 relativa al caso nel quale non siano state bloccate le rotazioni, si ha che dopo aver raggiunto il picco della tensione del calcestruzzo può verificarsi uno scarico con diminuzione della deformazione (come illustra il primo grafico della seconda riga). Questo, associato all'andamento del diagramma tensione-deformazione delle fibre

opposte rispetto all'asse neutro (riportato nel primo grafico sempre di figura 4.30), causa la rotazione della sezione che, mantenendosi piana, porta allo scarico anche dell'acciaio, che procede fino all'annullarsi completamente della tensione del calcestruzzo. Pertanto, forse per un problema di arrotondamento numerico, o *round-off*, può accadere che dopo aver raggiunto il massimo della tensione nel calcestruzzo, la sezione ruota.

Nel caso invece della prova assiale in controllo di forza, si ha che il vantaggio di vincolare il nodo libero rispetto alle rotazioni in y ed in z è legato alla convergenza o meno dei risultati nelle varie fase di *arclength*. Bloccando il nodo libero, infatti, si riesce a rappresentare senza problemi qualunque storia di carico, anche ciclica (figura 4.31), mentre se si lasciano le rotazioni libere emergono problemi di convergenza anche in semplici prove monotone (figura 4.32).

4.3.4.2. *Le prove in regime di rotazione e momento.* Le prove sulla trave in calcestruzzo armato composta da un solo elemento evidenziano un ottimo comportamento sia in controllo di spostamento che di forza. In particolare, fissare o meno un vincolo allo spostamento assiale della trave non ha portato a problemi di convergenza o di localizzazione in questo caso. Le figure dalla 4.33 alla 4.36 riportano i buoni risultati per questo tipo di prove.

4.3.4.3. *Le prove in regime di spostamento trasversale e taglio.* Le analisi strutturali su una trave composta da un solo elemento evidenziano un buon comportamento anche per quanto riguarda lo spostamento trasversale o la forza di taglio. Sia in controllo di forza che di spostamento infatti si è raggiunta la convergenza in tutte le prove eseguite; né ha costituito una discriminante per la convergenza l'aver vincolato o meno lo spostamento assiale nel nodo libero.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

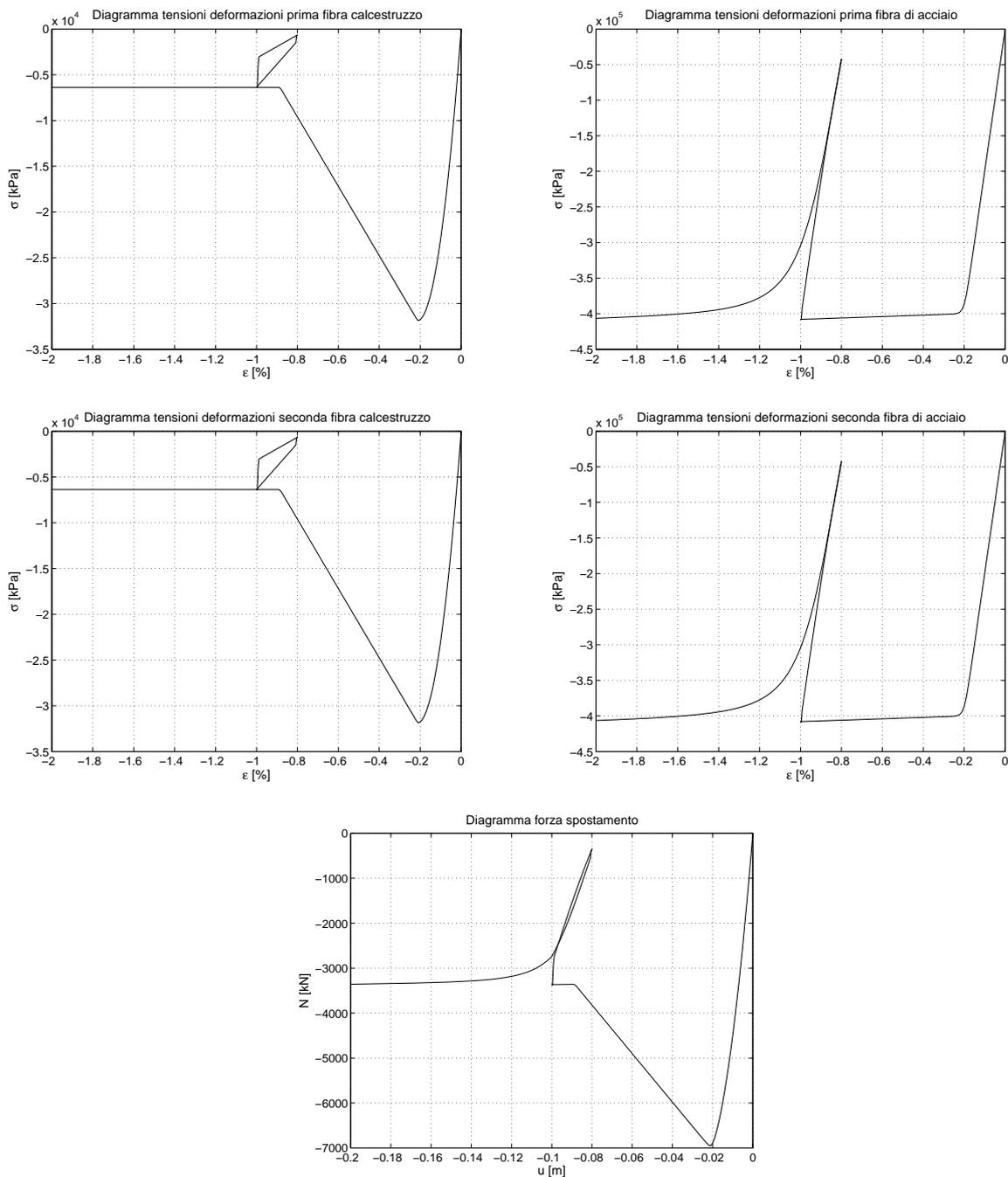


Figura 4.29: prova di spostamento assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità bloccate.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

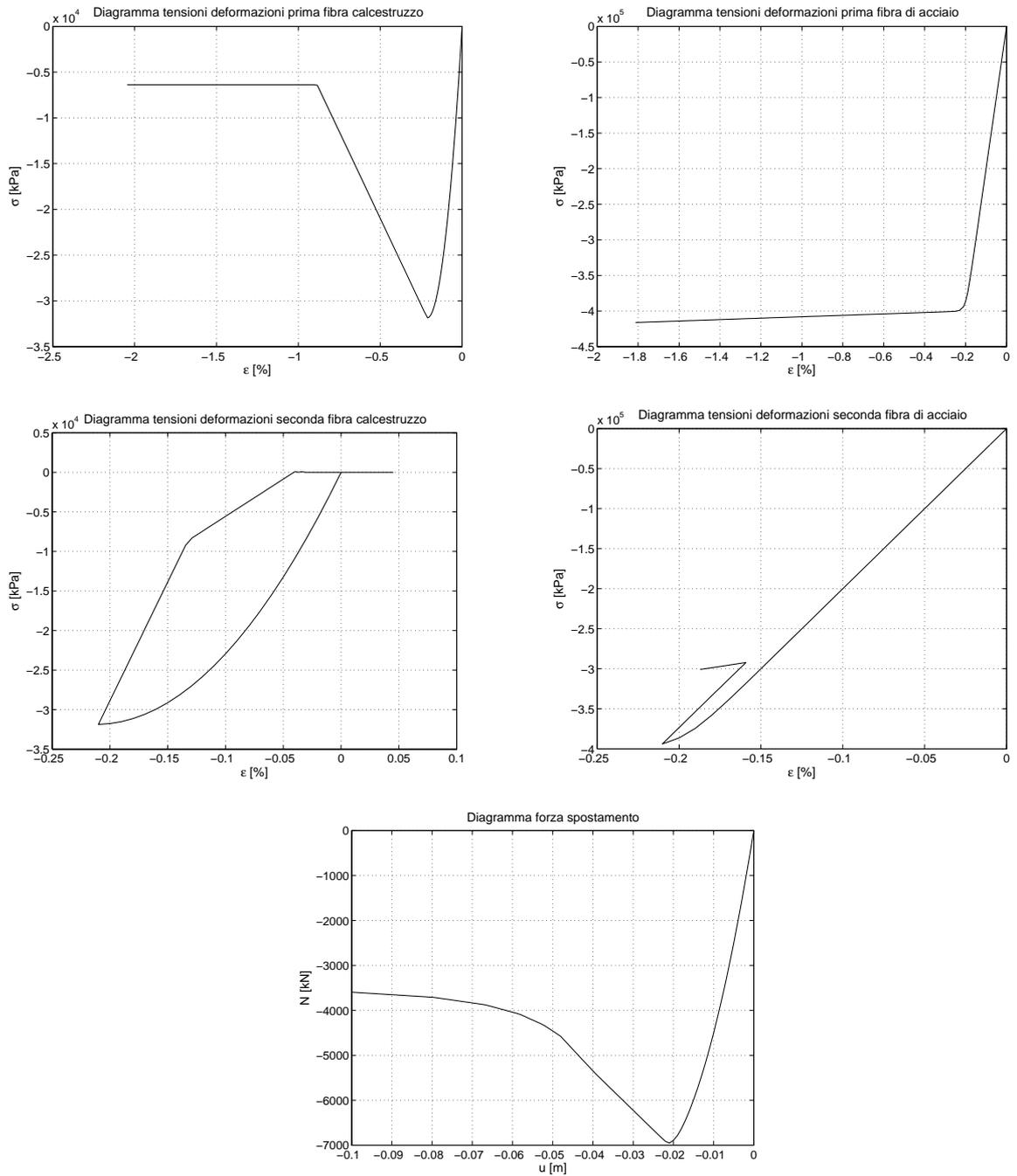


Figura 4.30: prova di spostamento assiale in controllo di spostamento su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità libere.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

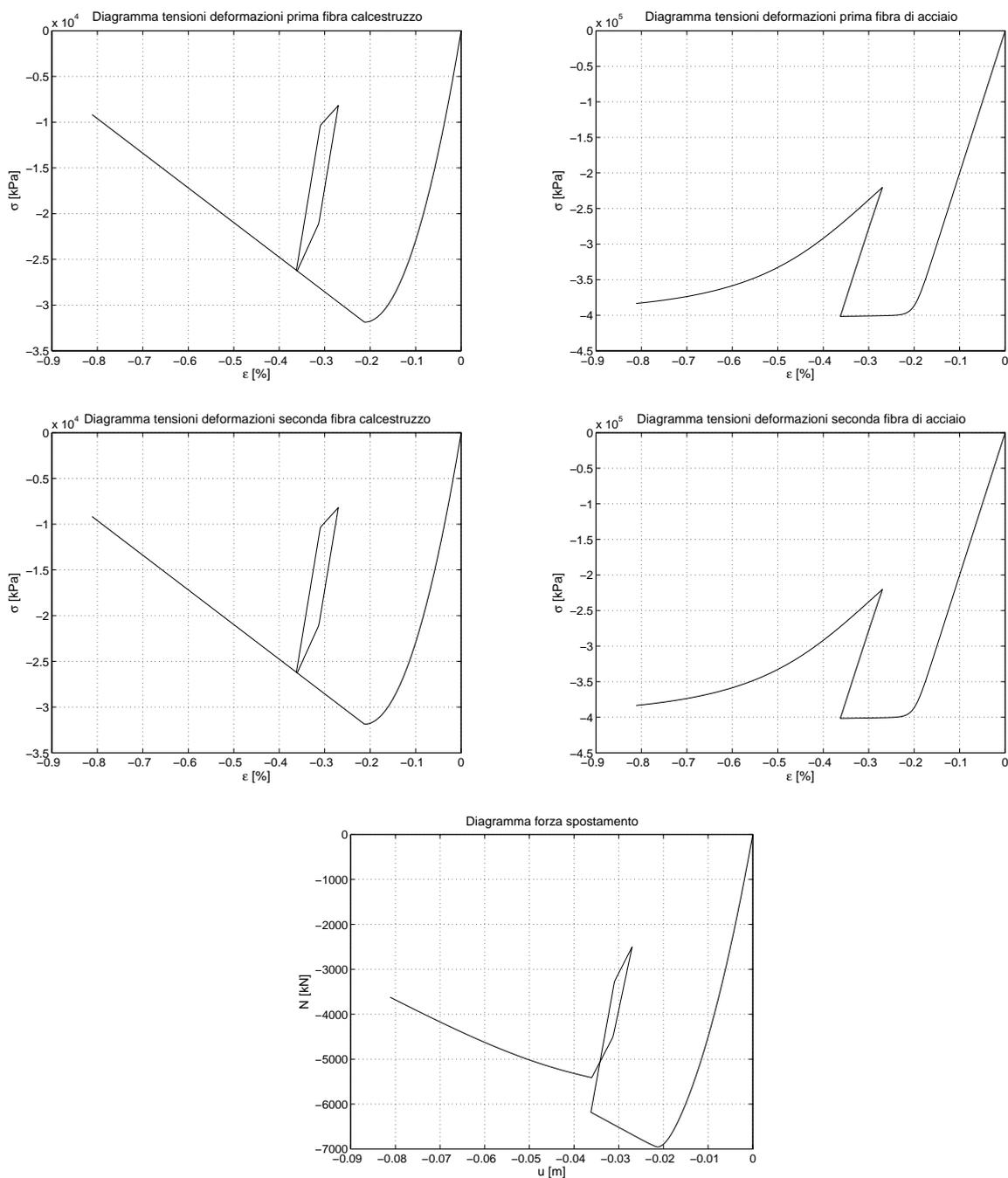


Figura 4.31: prova di spostamento assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità bloccate.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

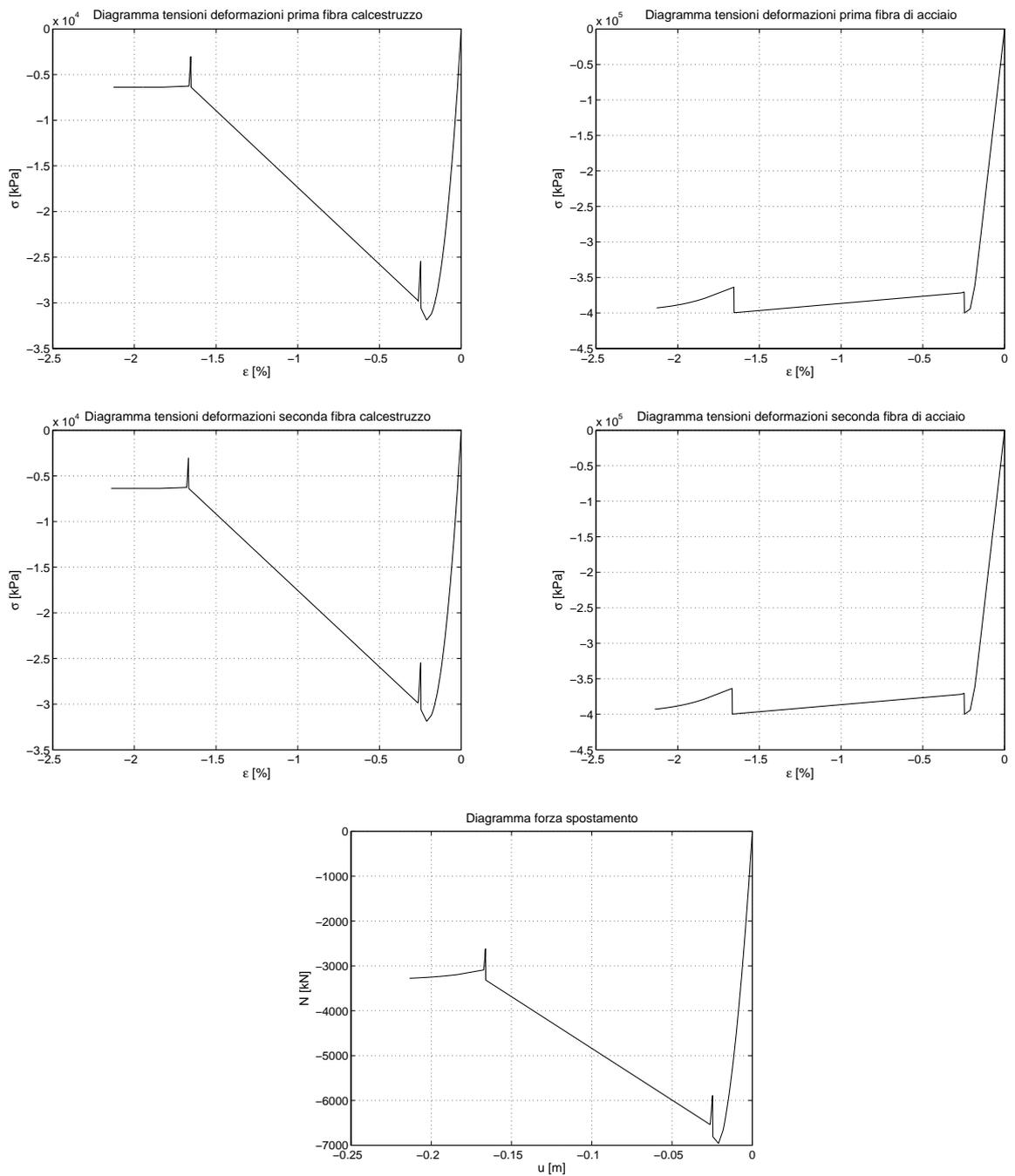


Figura 4.32: prova di spostamento assiale in controllo di forza con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con rotazioni in sommità libere.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

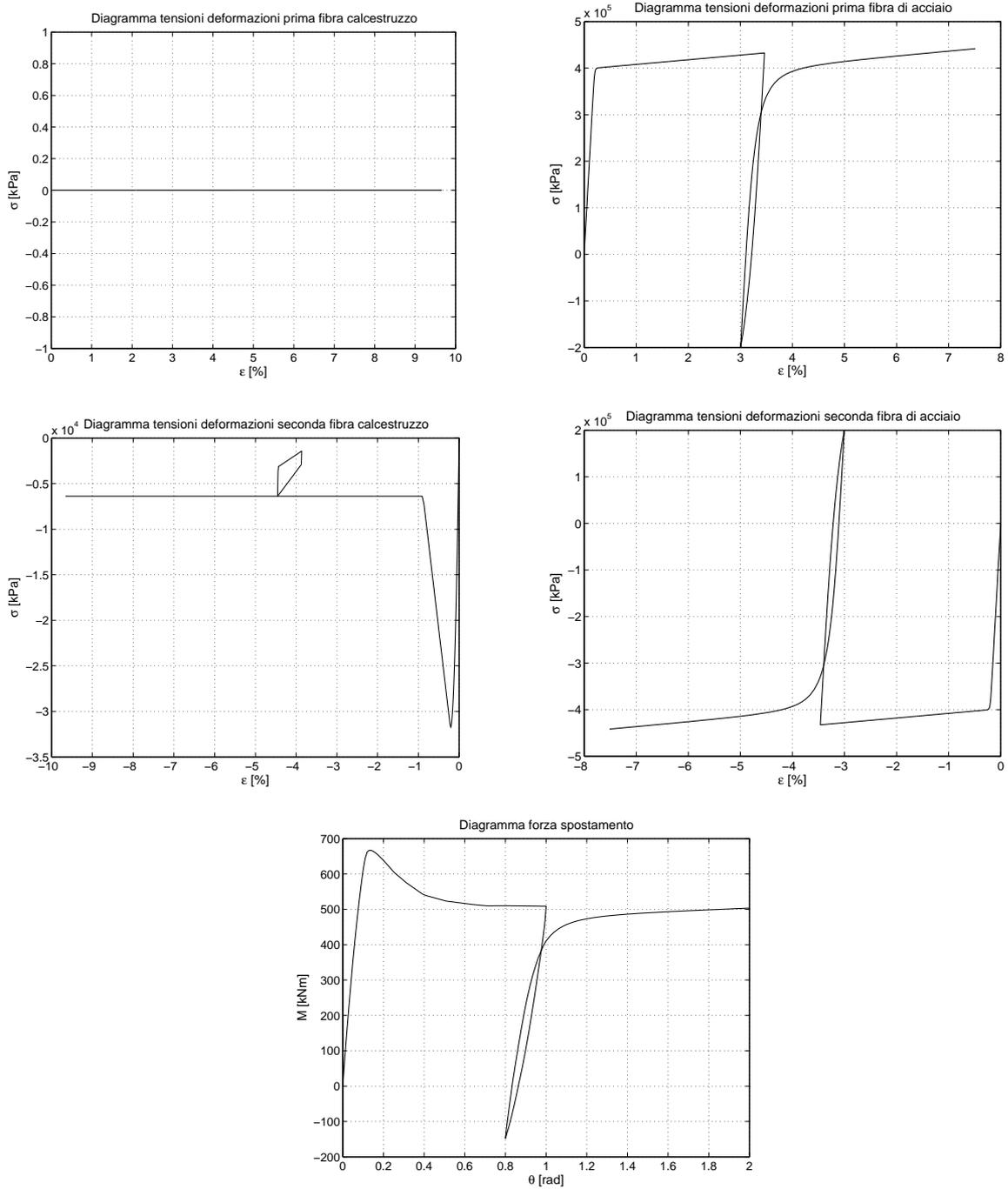


Figura 4.33: prova di rotazione in sommità su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

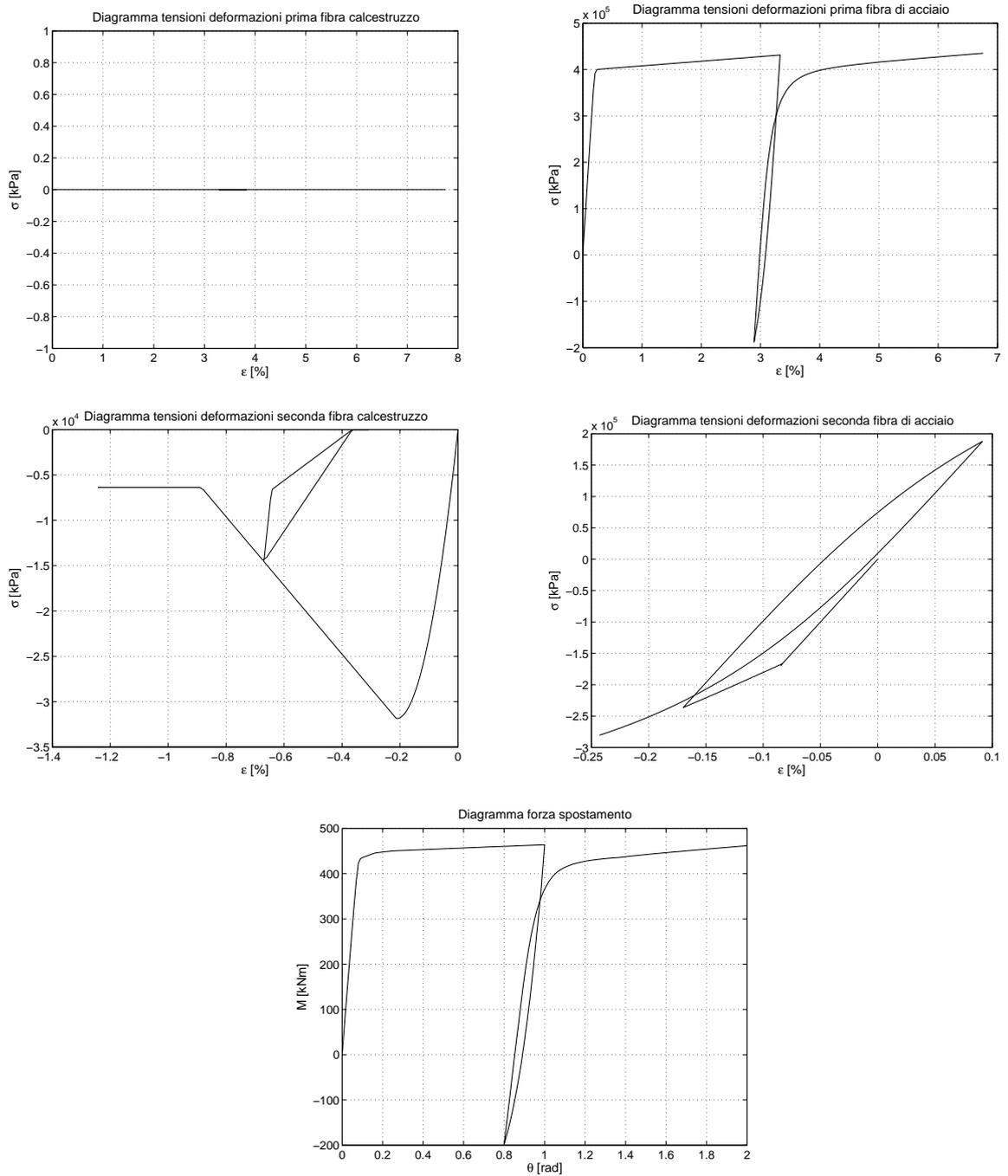


Figura 4.34: prova di rotazione in sommità su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

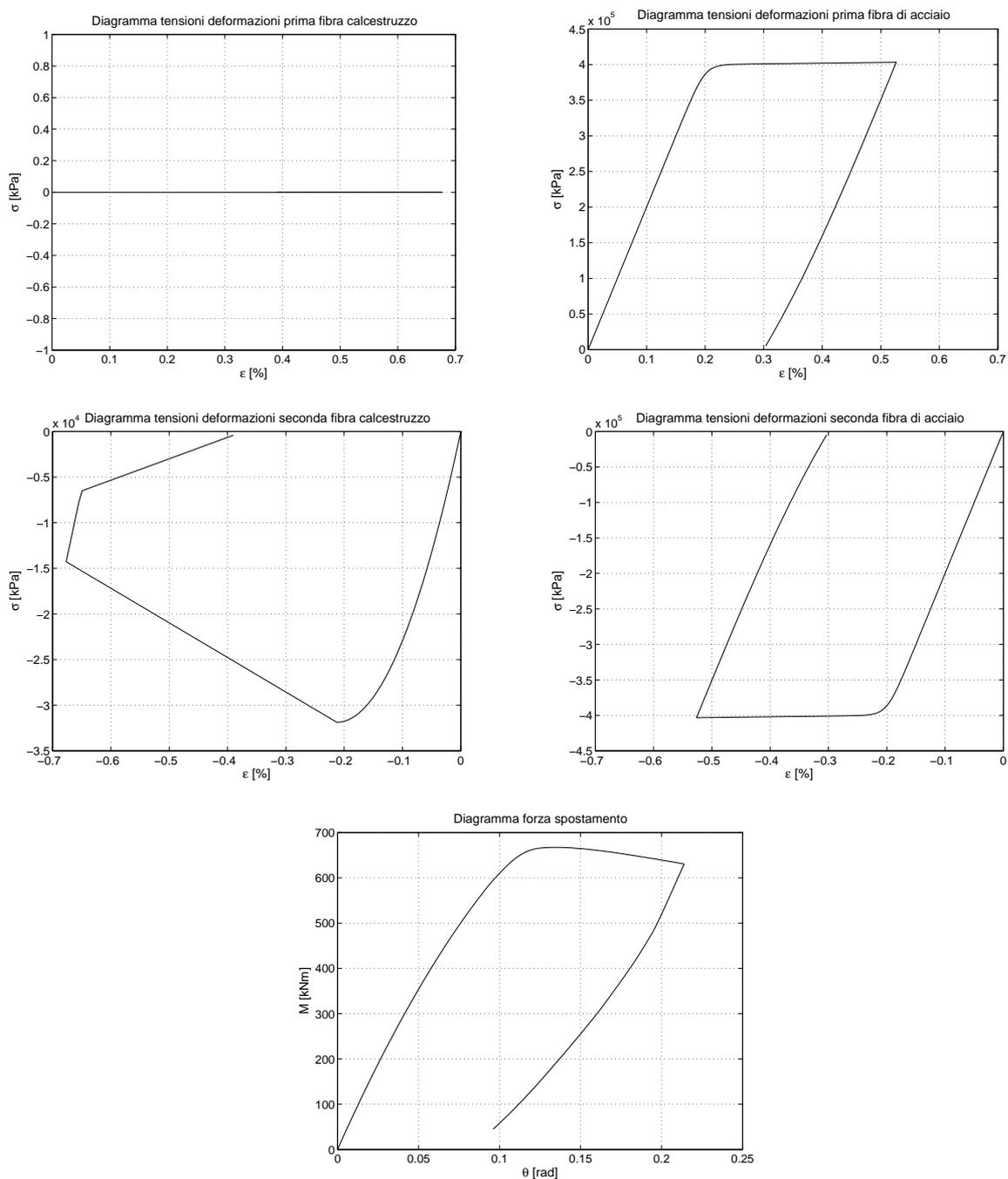


Figura 4.35: prova di momento in sommità utilizzando *l'arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

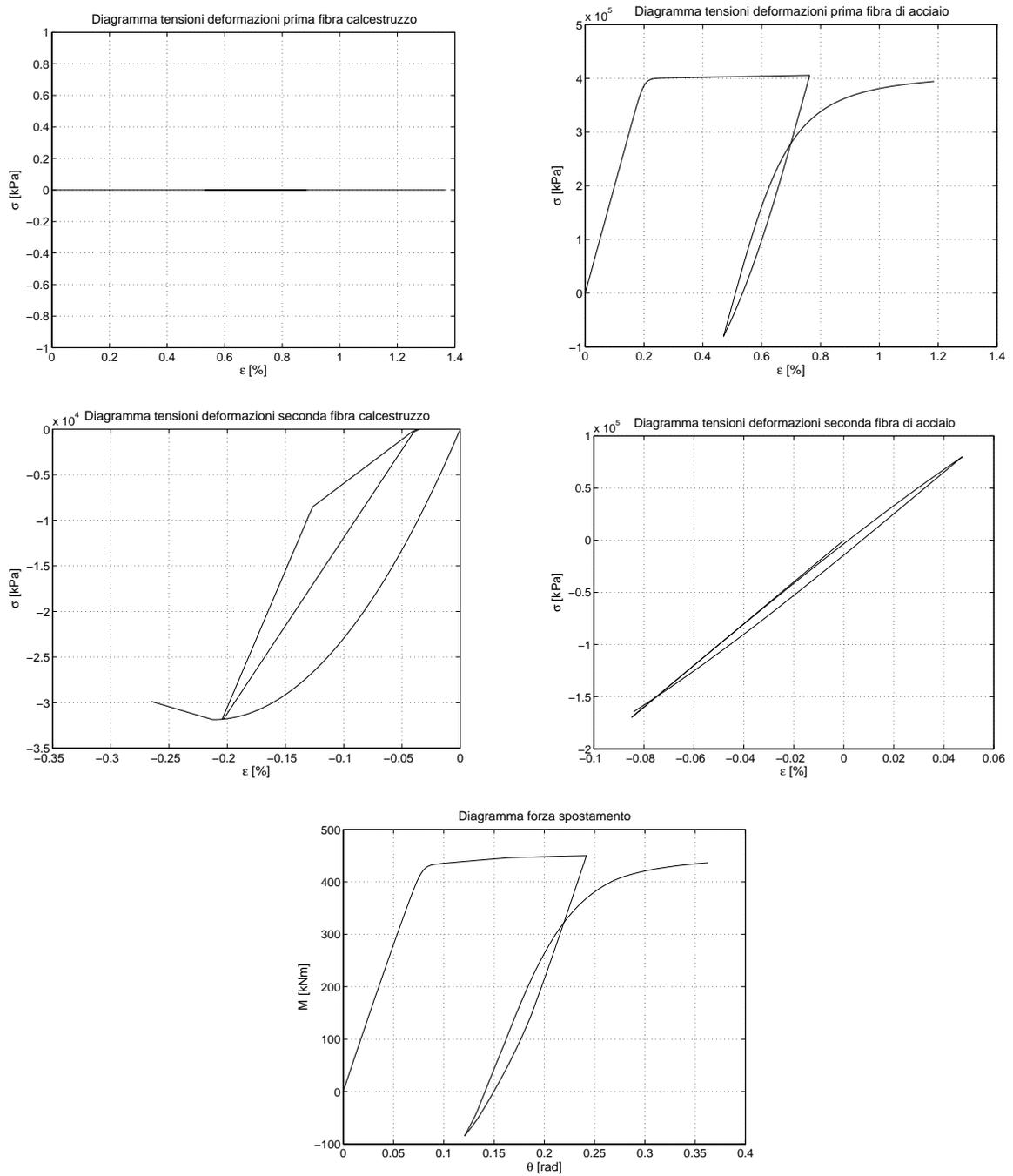


Figura 4.36: prova di momento in sommità utilizzando l'arclength su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

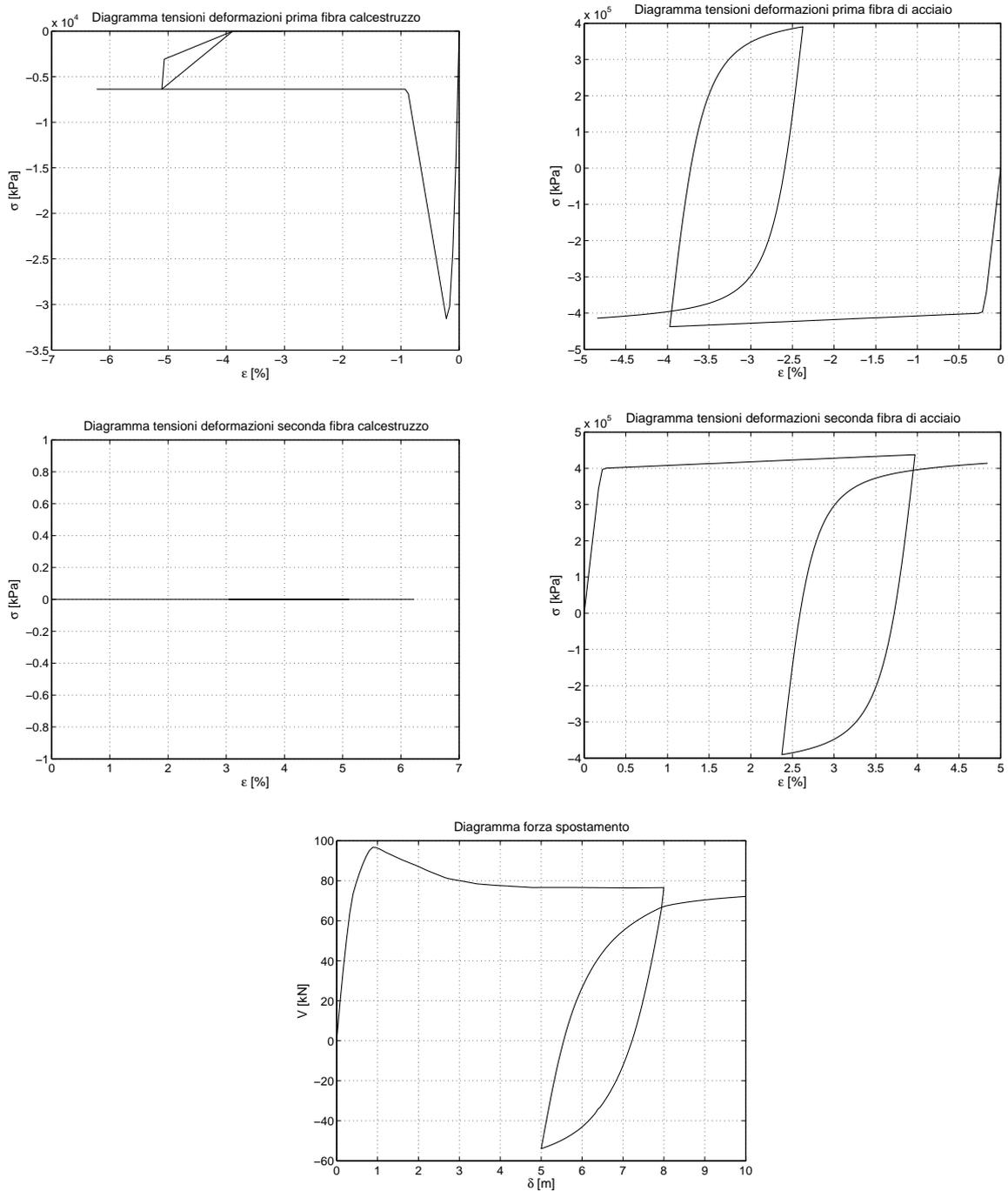


Figura 4.37: prova spostamento trasversale in sommità su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

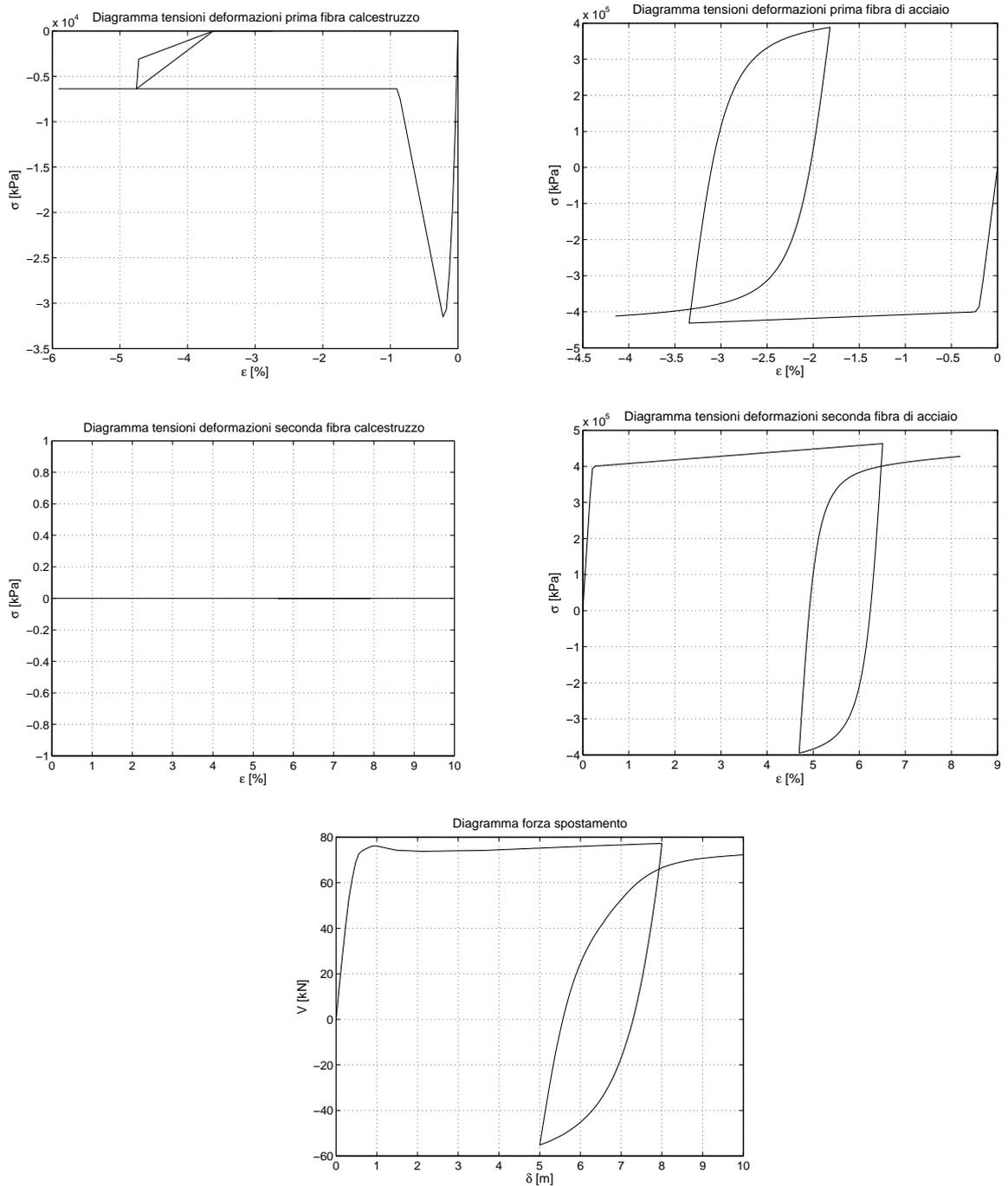


Figura 4.38: prova spostamento trasversale in sommità su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

LE PROVE NUMERICHE DI VERIFICA DEI MODELLI

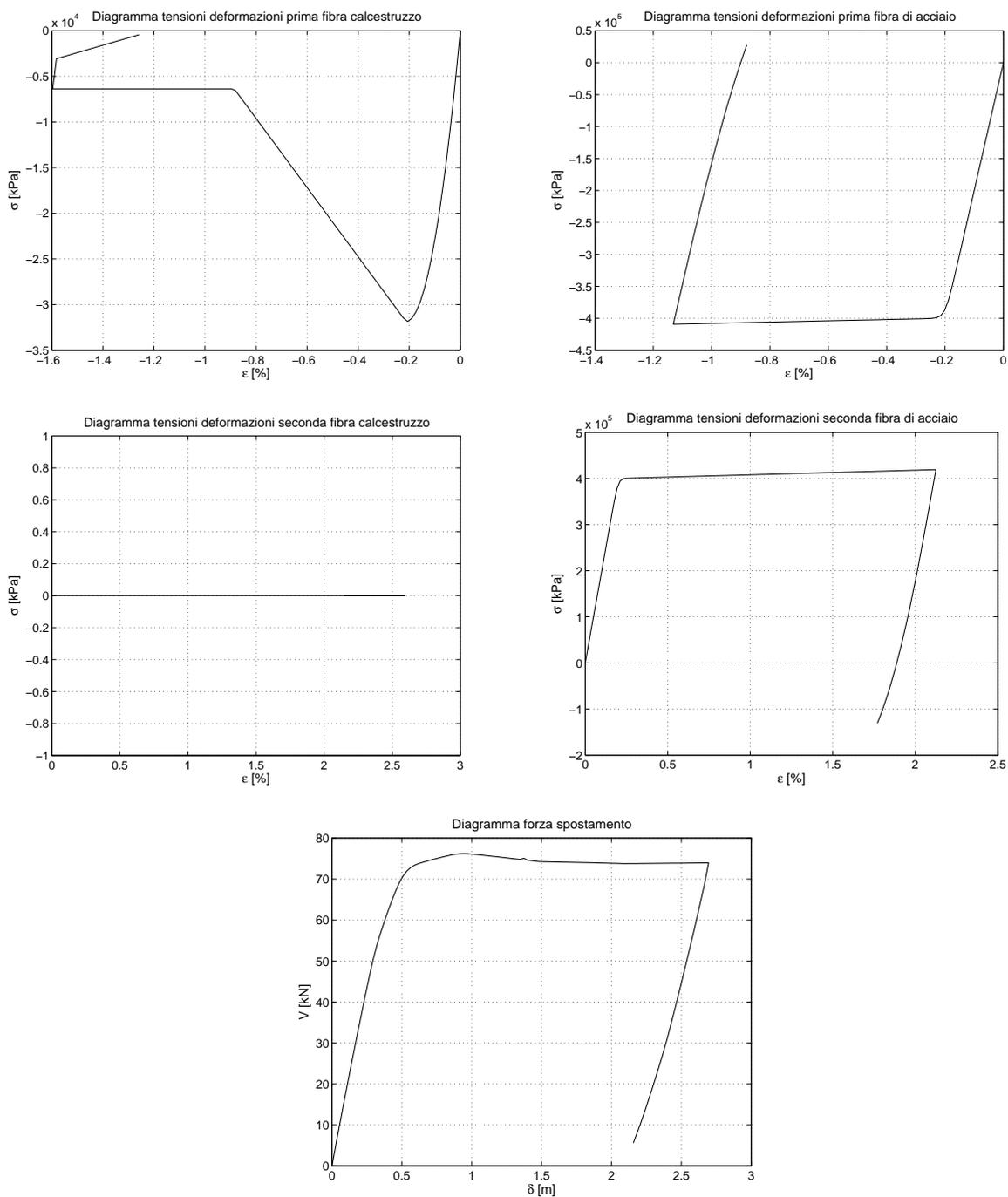


Figura 4.39: prova con taglio in sommità con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità bloccato.

4.3 LA VERIFICA DELL'ELEMENTO IN CALCESTRUZZO ARMATO

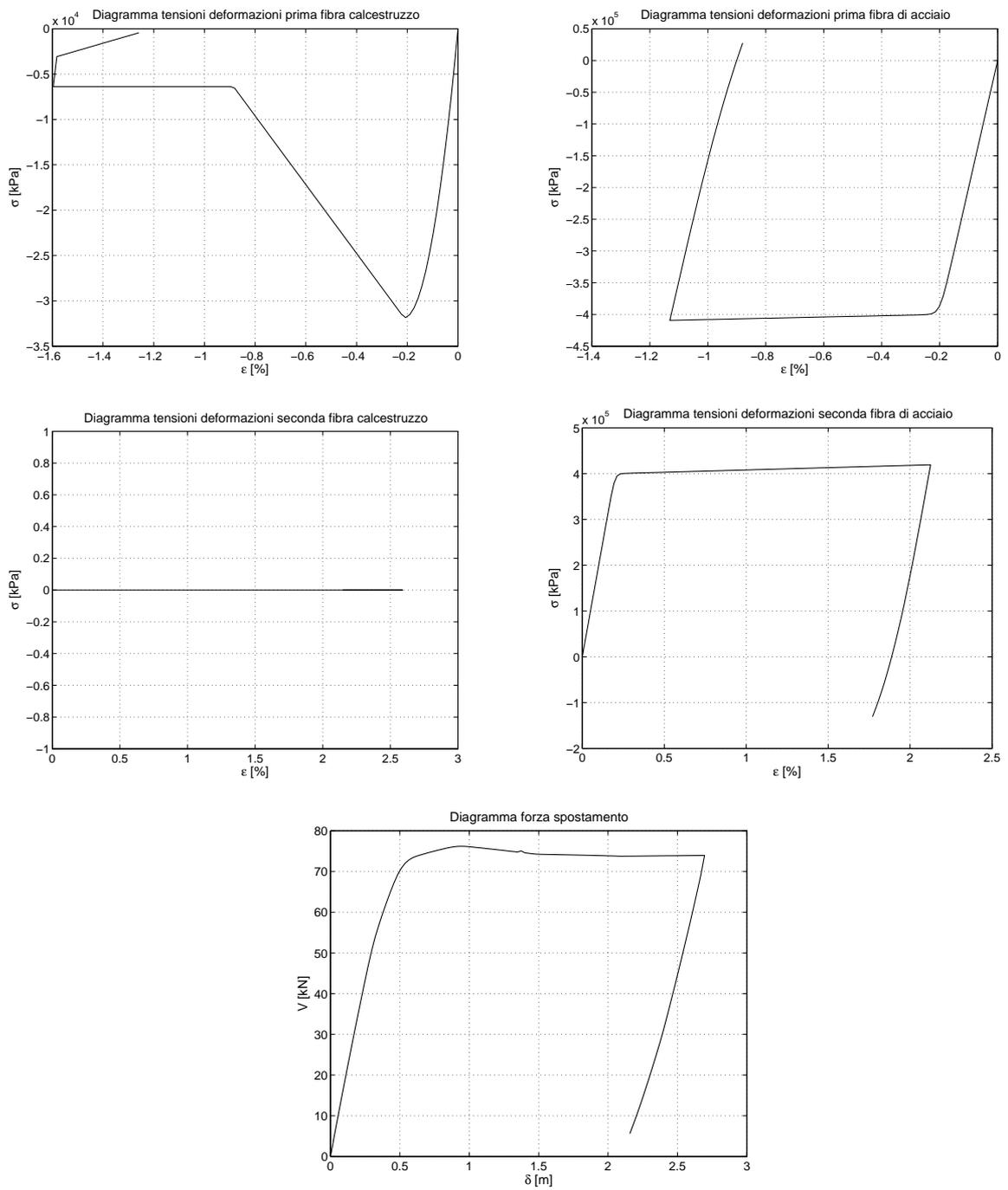


Figura 4.40: prova con taglio in sommità con utilizzo di *arclength* su 1 elemento composto da 100 fibre con spostamento assiale in sommità libero.

L'analisi strutturale pushover

5.1. La valutazione del comportamento non lineare degli edifici

Se in passato era opinione diffusa e condivisa che fosse possibile progettare sempre supponendo un comportamento elastico degli elementi strutturali, coerentemente con quello che poteva essere considerato il motto di tale filosofia progettuale, *ut tensio sic vis*, oggi un approccio al problema che parta da questa assunzione è da ritenersi insufficiente. In alcune condizioni di analisi infatti, come nel caso della progettazione in zona sismica, è possibile dovere considerare tra le azioni agenti delle forze orizzontali di entità tale da essere rilevanti anche rispetto ai carichi verticali.

Persistere nella metodologia della progettazione elastica utilizzata per i carichi gravitazionali in questo caso porterebbe a richiedere che la struttura rimanga in campo elastico per la massima sollecitazione di progetto, considerando anche l'azione sismica; l'effetto di una tale concezione strutturale è quello di incorrere in costi di realizzazione elevatissimi, dovuti alla progettazione di elementi tali da resistere in campo elastico ad azioni di progetto molto maggiori rispetto a quelle utilizzate solitamente per il dimensionamento gravitazionale: la condizione per avere strutture resistenti sarebbe allora quella di costruire edifici enormemente pesanti e costosi, con il rischio che, qualora si verifici una sollecitazione sismica superiore a quella di progetto, si abbia il collasso della struttura.

Dalle considerazioni fatte risulta immediata la necessità di valutare concezioni strutturali differenti che consentano di prevedere un comportamento anelastico del sistema. L'idea alla base di tale possibilità è quella di poter progettare strutture per forze sismiche inferiori rispetto a quelle considerate nell'analisi elastica purché sia garantita la capacità di deformazione del sistema senza una eccessiva perdita di resistenza. In questo caso i vantaggi sono di carattere economico, ma anche relativi alla sicurezza dell'edificio: infatti, in caso di sollecitazioni sismiche agenti maggiori rispetto a quelle di progetto, si riesce comunque a dissipare energia grazie alla capacità di spostamento che consente una deformazione plastica.

5.2. I metodi di analisi non lineare

Assumere in fase di progetto sismico che il comportamento strutturale globale sia elastico, è alla base dei seguenti errori:

- si ha una sottostima dello spostamento;
- non si combinano opportunamente i carichi gravitazionali con quelli sismici;
- l'analisi porta a progettare dei dettagli inadeguati per consentire la deformazione plastica.

Se le moderne teorie relative alla concezione strutturale sono tali da indurre a ritenere non ottimale l'ipotesi di avere un comportamento elastico per il progetto in zona sismica, appare evidente che anche i metodi di analisi adottati non potranno essere quelli classici lineari elastici utilizzati per l'analisi di strutture sottoposte ai soli carichi gravitazionali.

Gli approcci per considerare il comportamento non lineare possono essere di due tipi:

- la valutazione della deformazione duttile attraverso il fattore di struttura;
- la valutazione diretta delle cause e dei fenomeni di non linearità.

5.2.1. L'utilizzo del fattore di struttura. La progettazione di un edificio secondo i principi prestazionali che sono alla base della realizzazione di strutture in zona sismica, consente di ipotizzare che gli elementi siano caratterizzati da una duttilità adeguata a consentire una opportuna dissipazione di energia. Questo significa che se si seguono le linee guida per una opportuna progettazione sismica, la struttura deve essere in grado di entrare in campo non lineare dissipando energia in campo plastico ed essendo così in grado di resistere ad accelerazioni molto maggiori rispetto a quelle di prima plasticizzazione.

Un primo modo per valutare l'effetto della non linearità è pertanto quello di utilizzare un fattore di struttura attraverso cui ridurre le sollecitazioni sismiche derivanti da analisi elastica alla luce della capacità dissipativa delle strutture. Come è possibile vedere dal confronto della figura 5.1 e della figura 5.2, che riportano l'andamento del taglio alla base in funzione dello spostamento di un generico punto della struttura assunto come punto di controllo, qualora si supponga di avere un comportamento duttile e di essere entrati in campo plastico, a parità di spostamento si ha un livello di forza agente molto minore rispetto al comportamento elastico. Questo proprio perché l'ingresso in campo non lineare della struttura (in questo caso supposta caratterizzata da un comportamento elastoplastico) garantisce una dissipazione di energia e la riduzione della forza agente. Analisi compiute hanno evidenziato che per

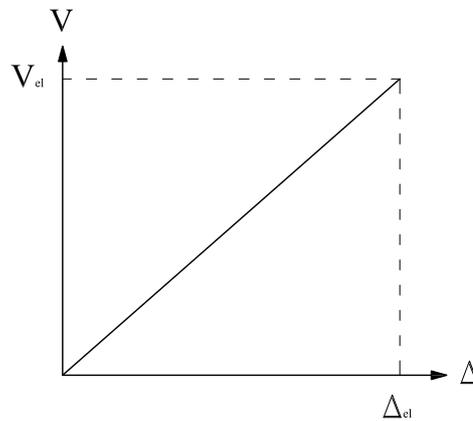


Figura 5.1: legame elastico tra taglio alla base e spostamento.

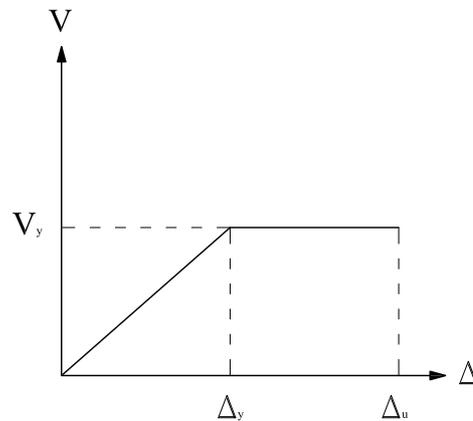


Figura 5.2: legame anelastico (duttile) tra taglio alla base e spostamento.

strutture sufficientemente deformabili supponendo due casi, uno caratterizzato da una risposta strutturale puramente elastica ed uno caratterizzato da una risposta elasto-plastica, lo spostamento massimo è lo stesso (figura 5.3).

Pertanto, qualora si ipotizzi che lo spostamento ultimo anelastico Δ_u sia pari allo spostamento elastico Δ_{el} , il rapporto tra la V_{el} agente nel caso elastico e la V_y agente nel caso anelastico è esattamente pari alla duttilità μ definita

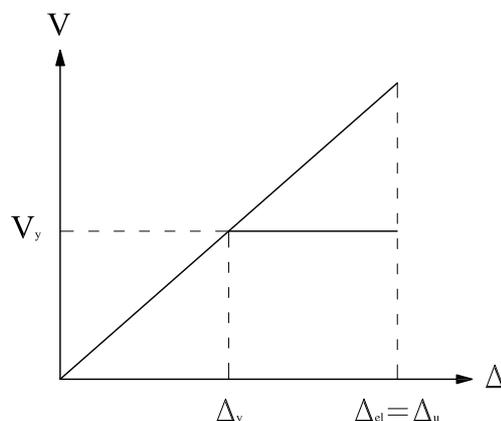


Figura 5.3: medesimo spostamento ultimo nel caso di comportamento plastico ed elastico.

come:

$$(5.1) \quad \Delta_u = \Delta_{el} \Rightarrow \mu = \frac{\Delta_{el} - \Delta_y}{\Delta_y} = \frac{V_{el}}{V_y}$$

Il fattore di struttura deve quindi essere rappresentativo della capacità di deformazione duttile della struttura; esso è funzione principalmente della tipologia strutturale, della regolarità ed evidentemente della duttilità dell'edificio in questione ed in generale può assumere valori fino a 5-7 a seconda dei limiti imposti dalle differenti normative.

In generale è possibile rappresentare l'azione sismica attraverso spettri, ovvero relazioni che legano il periodo proprio della struttura al massimo valore di accelerazione al suolo a cui essa può essere soggetta. Il modo più semplice per considerare il comportamento plastico è allora quello di valutare delle azioni sismiche di progetto ridotte rispetto alle azioni sismiche calcolate supponendo un comportamento elastico. Ciò è possibile ricavando tali azioni attraverso degli spettri di progetto differenti dagli spettri elastici, ottenuti da questi riducendoli attraverso il fattore di struttura.

Tale metodologia è caratteristica dell'*analisi statica lineare* e dell'*analisi dinamica lineare*, per le quali, dopo aver calcolato lo spettro di progetto e le relative azioni sismiche e sollecitazioni, il modo di procedere per il dimensionamento degli elementi resistenti è analogo al calcolo lineare elastico utilizzato nel caso delle azioni non sismiche.

5.2.2. La valutazione diretta della nonlinearità strutturale. L'utilizzo del fattore di struttura non consente di cogliere il progressivo passaggio degli elementi della struttura da un comportamento lineare ad uno postelastico.

I metodi diretti di valutazione della nonlinearità strutturale si propongono di superare tale punto di debolezza considerando il comportamento postelastico sia dei materiali, valutando legami costitutivi anche fortemente non lineari, che dell'impianto strutturale nella sua globalità.

Le analisi condotte con tale modalità sono molto utili anche per la possibilità di essere utilizzate in fase di verifica, ad esempio per analizzare la sovreresistenza degli elementi: ipotizzando infatti di aver compiuto un dimensionamento con analisi lineari utilizzando un certo fattore di struttura, ricorrere ad una verifica con analisi non lineare consente di valutare l'esatta corrispondenza alla realtà o meno del fattore di struttura adottato.

Un approccio diretto è utilizzato sia nell'*analisi statica non lineare* che nell'*analisi dinamica non lineare*.

5.3. L'analisi pushover

Rispetto agli anni passati oggi si pone una minore attenzione all'analisi strutturale modale elastica a più gradi di libertà. Sebbene questa sia stata definita come il metodo più completo per lo studio degli effetti sismici sulle strutture, infatti, si dimostra carente qualora la si voglia applicare alla verifica di strutture esistenti. Se utilizzata per la progettazione di edifici nuovi infatti fornisce risultati soddisfacenti data la consistenza tra il fattore di struttura ipotizzato e la duttilità che si vuole ottenere, mentre non si può dire la stessa cosa relativamente agli edifici esistenti: questo avviene per l'incapacità di cogliere compiutamente le variazioni della risposta strutturale dovute al comportamento non elastico dei singoli elementi, che non è affrontabile con un approccio lineare. Ecco allora che senza voler addentrarsi nella complessità computazionale legata all'analisi dinamica non lineare, assurge a mezzo d'indagine indispensabile quella che è conosciuta come analisi statica non lineare o *analisi pushover*.

5.3.1. L'analisi pushover classica. Per analisi strutturale di tipo pushover si intende un tipo di quella che classicamente viene chiamata *analisi dei meccanismi di collasso*. La procedura è basata sul calcolo iterativo di soluzioni equilibrate attraverso una analisi di un modello strutturale, ovviamente non lineare, sottoposto ad uno schema di carichi laterali. Dato che i carichi sono incrementati in modo monotono l'analisi è definibile incrementale.

Questo significa che, dato un modello strutturale con comportamento non lineare caricato con le azioni gravitazionali, vi si applica un particolare schema di azioni orizzontali, incrementate ad ogni passo dell'analisi moltiplicandole tutte per lo stesso coefficiente di amplificazione; il rapporto tra le

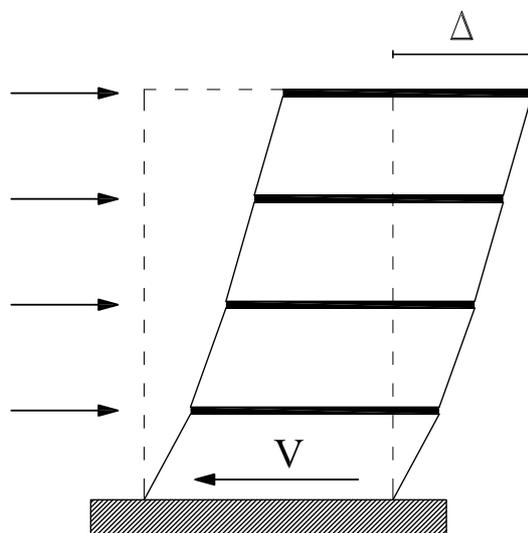


Figura 5.4: schema di analisi pushover su una struttura a telaio.

differenti forze quindi non varia al procedere dell'analisi, almeno nella sua formulazione più semplice, ma varia la risultante totale.

L'obiettivo è quello di caricare lateralmente il modello fino a raggiungere il collasso (figura 5.4), ottenendo la curva di capacità dell'edificio (figura 5.5), ovvero una curva che riporti in ordinata il taglio alla base agente ed in ascissa lo spostamento di un punto di controllo identificato con un nodo il cui spostamento è ritenuto particolarmente significativo, ad esempio un nodo della copertura.

L'analisi è eseguita determinando uno spostamento e , dopo aver ottenuto la curva di capacità, valutando se per tale valore la struttura conservi o meno un sufficiente livello di resistenza. Si tratta di una verifica facilmente eseguibile perché l'analisi è compiuta in modo da arrivare ad una soluzione per ogni passo di carico laterale: questo implica che per ogni passo si conosce sia lo spostamento, e pertanto le deformazioni e le rotazioni, che la distribuzione delle sollecitazioni e delle reazioni nella struttura: ma allora in ogni nodo ed elemento è possibile valutare la capacità di deformazione con la deformazione derivante dall'analisi e le sollecitazioni resistenti con quelle agenti, essendo in grado di valutare la sicurezza della struttura.

5.3.2. Le basi teoriche dell'analisi pushover. La risposta dinamica di una struttura generica a più gradi di libertà sottoposta ad una accelerazione

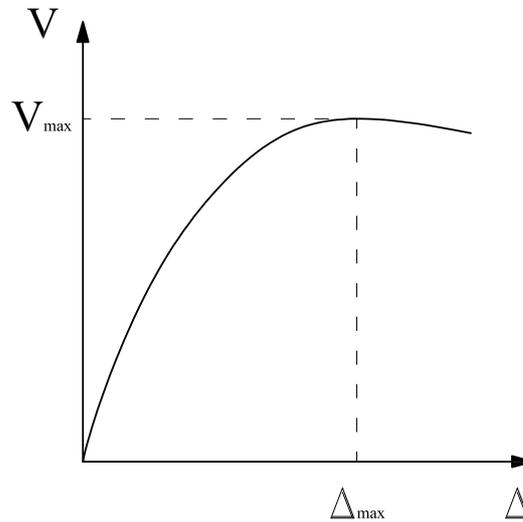


Figura 5.5: curva di capacità derivante da analisi pushover.

orizzontale \ddot{u}_g è descritta dall'equazione differenziale:

$$(5.2) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m \mathbf{1} \ddot{u}_g(t) = \mathbf{p}_{eff}(t) = -s \ddot{u}_g(t)$$

Nel caso di una struttura a più piani, nell'ipotesi di considerare dei solai infinitamente rigidi ad ogni piano, \mathbf{u} è un vettore di N componenti, ove N è il numero dei piani, costituito dagli spostamenti rispetto alla base dei piani, mentre \mathbf{m} , \mathbf{c} e \mathbf{k} sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidità della struttura. Il vettore $\mathbf{1}$ è un vettore colonna con tutte le componenti unitarie, \mathbf{s} è un vettore pari a $\mathbf{m}\mathbf{1}$ e rappresenta l'andamento delle forze effettivamente agenti \mathbf{p}_{eff} .

Il vettore spostamento \mathbf{u} può essere decomposto nelle componenti espresse in termini di coordinate di vibrazione modali (ϕ_n) e se q_n rappresenta l' n -esima coordinata modale si ottiene:

$$(5.3) \quad \mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t)$$

Avendo espresso il vettore spostamento in funzione delle forme modali come nella (5.3), è possibile ora riscrivere il contenuto della (5.2) disaccoppiando gli

N gradi di libertà; sostituendo la (5.3) nella (5.2) e utilizzando le relazioni di ortogonalità che valgono tra le diverse forme di vibrazione modali si ottiene:

$$(5.4) \quad \ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = -\Gamma_n\ddot{u}_g(t)$$

L'espressione può essere ulteriormente semplificata ponendo:

$$(5.5) \quad q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$

ed ottenendo:

$$(5.6) \quad \ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n(t) + \omega_n^2D_n(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

nella quale ζ_n è la percentuale di smorzamento relativa al critico, ω_n è la frequenza propria di vibrazione e Γ_n è il fattore di partecipazione modale. Risolvendo la (5.6) in funzione di ognuno dei $D_n(t)$, si ottiene la base della *modal response history analysis* (MRHA), secondo cui il vettore \mathbf{u} è dato da:

$$(5.7) \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_n D_n(t)$$

Supponendo ora di concentrare l'attenzione su un solo modo di vibrare, ad esempio lo n -esimo, la relazione (5.7) diviene:

$$(5.8) \quad \mathbf{u}_n(t) = \phi_n q_n(t)$$

e pertanto è possibile tornare ad esprimere la (5.2) come:

$$(5.9) \quad \mathbf{m}\phi_n\ddot{q}_n(t) + \mathbf{c}\phi_n\dot{q}_n(t) + \mathbf{k}\phi_nq_n(t) = -\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) = \mathbf{p}_{eff}(t) = -\mathbf{s}\ddot{u}_g(t)$$

Valutando la decomposizione della forza \mathbf{p}_{eff} tenendo conto dell'ortogonalità delle differenti forme modali anche rispetto alla matrice di massa, si dimostra che se si considera l' n -esimo modo di vibrare, l'unica componente non nulla di \mathbf{p}_{eff} è la \mathbf{s}_n . Allora è possibile esprimere \mathbf{s}_n e $\mathbf{p}_{eff,n}$ come:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \Gamma_n \mathbf{m} \phi_n \\ \mathbf{p}_{eff,n} &= -\Gamma_n \mathbf{m} \phi_n \ddot{u}_g(t) \end{aligned}$$

e di conseguenza appare evidente che il solo $\mathbf{p}_{eff,n}$ è responsabile della risposta del modo n-esimo.

È possibile definire allora una forza statica equivalente che possa essere associata con lo spostamento dello n-esimo modo di vibrare $\mathbf{u}_n(t)$:

$$(5.11) \quad \mathbf{f}_n(t) = \mathbf{k}\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{k}\phi_n q_n(t) = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n \Gamma_n D_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t)$$

nella quale A_n è la pseudo-accelerazione:

$$(5.12) \quad A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t)$$

Pertanto, per la risposta elastica, qualunque quantità di interesse $r(t)$ (può trattarsi di spostamenti, forze interne degli elementi od altro) può essere ottenuta come combinazione delle rispettive componenti modali in base al principio di combinazione della modal response history analysis:

$$(5.13) \quad r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} A_n(t)$$

nella quale r_n^{st} è la risposta statica della quantità r dovuta alla forza esterna \mathbf{s}_n . Il valore di picco della quantità r per il modo n-esimo si ottiene in corrispondenza del periodo caratteristico del modo che si sta studiando: pertanto, se A_n è l'ordinata dello spettro in pseudo-accelerazione di progetto per tale periodo, il valore di picco r_{no} è dato da:

$$(5.14) \quad r_{no} = r_n^{st} A_n$$

Per trovare a questo punto il valore di picco della risposta totale è necessario comporre insieme i differenti modi di vibrare della struttura, che possono essere combinati attraverso una combinazione quadratica completa (CQC) o attraverso la radice quadrata della somma dei quadrati (SRSS).

5.3.3. L'analogia con l'analisi dinamica non lineare. L'assunzione alla base dell'analisi pushover, che ne giustifica e ne fonda l'impiego in campo sismico, è che tale analisi permetta di rappresentare con buona approssimazione quelli che sono i contenuti di una analisi dinamica non lineare, conducendo a risultati che siano prossimi a quelli che si otterrebbero con quest'ultima analisi.

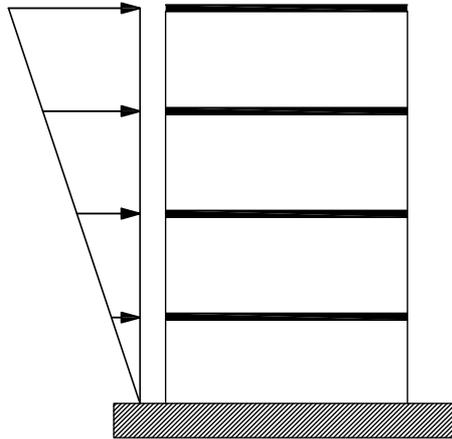


Figura 5.6: schema di carico triangolare.

Pertanto generalmente il ricorso ad analisi pushover è alternativo e computazionalmente più facile e veloce rispetto ad eseguire una *time history analysis* completa. Evidentemente però, non è possibile ritenere che ciò che si ottiene da una analisi dinamica non lineare sia coincidente con i risultati di una analisi statica non lineare perché si tratta di due modalità di procedere molto differenti. Per questo, nell'eseguire l'analisi pushover si sottopone generalmente la struttura a due differenti schemi di carico, uno con una distribuzione triangolare delle forze orizzontali agenti ed uno con una distribuzione di forze costante.

La distribuzione triangolare (figura 5.6) è la distribuzione dei carichi orizzontali proporzionale agli spostamenti nodali del primo modo di vibrare. Supponendo infatti che nelle strutture analizzate siano predominanti, per quanto riguarda la percentuale di massa partecipante, gli effetti di questo primo modo, si assume che anche i carichi sismici si ripartiscano in conformità a questo. Ovviamente le ipotesi di base perché una tale distribuzione di carico fornisca risultati realistici è che veramente il primo modo di vibrare sia il più importante e che la struttura non presenti danneggiamenti e diminuzioni della rigidità tali da far variare la ripartizione delle azioni nei piani: la distribuzione triangolare dei carichi è pertanto rappresentativa della condizione non danneggiata della struttura, quella iniziale rispetto al verificarsi del sisma.

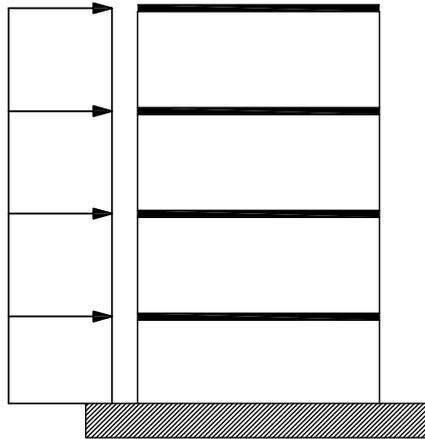


Figura 5.7: schema di carico costante.

Per tenere in conto di una distribuzione delle rigidità nella struttura successiva rispetto al danneggiamento, ovvero in seguito alla plasticizzazione di alcuni elementi, si utilizza la distribuzione costante delle forze orizzontali (figura 5.7): si suppone infatti che la condizione danneggiata sia caratterizzata da una distribuzione di forze d'inerzia proporzionale alle masse di piano.

Come illustra la figura 5.8, nella quale sono riportate le due curve di capacità derivanti dalle due distribuzioni di carico ed i punti ottenuti dalla integrazione diretta dell'equazione del moto come da analisi dinamica non lineare, l'obiettivo di compiere una doppia analisi ricorrendo a due differenti schemi di carico è quello di riuscire a definire due curve di capacità tali da contenere nell'area delimitata dal loro andamento sul piano $V - \Delta$ tutti i punti risultanti da analisi dinamica non lineare incrementale. Questo consente di valutare in ogni condizione il valore più sfavorevole derivante dall'analisi pushover e di essere così a vantaggio di sicurezza rispetto ai valori ottenuti dall'analisi dinamica non lineare. Il limite di questa analisi è legato alla applicabilità a strutture più o meno regolari: è infatti stato dimostrato che per strutture non regolari le due curve di capacità valutate con le distribuzioni viste in precedenti possono essere non conservative.

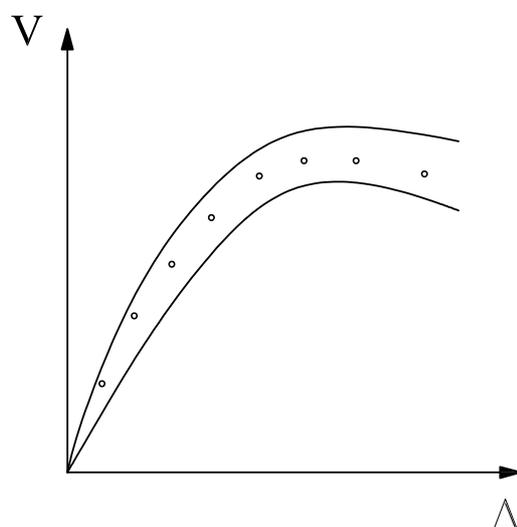


Figura 5.8: confronto delle curve di capacità.

5.3.4. L'analisi pushover in controllo di forza o di spostamento. Nella trattazione condotta fino ad ora si è considerato il caso in cui l'analisi pushover sia condotta caricando la struttura con uno schema di forze orizzontali. In realtà nulla impedisce di applicare, invece che forze, degli spostamenti nodali alla struttura.

Il fatto che l'input sismico sia stato modellato in passato più spesso come forze e non come spostamenti è dovuto a ragioni storiche: dato che l'analisi sismica si è sviluppata nella sua accezione moderna in zone a bassa sismicità come l'Inghilterra e la Germania, le azioni di rilievo maggiore erano ancora quelle gravitazionali e pertanto appariva ovvio rendere l'effetto del sisma omogeneo rispetto a queste ultime. In effetti però la modellazione dell'effetto sismico in termini di spostamenti e non di forze costituisce un approccio più naturale e razionale; partendo da tale assunzione si è assistito allo sviluppo del *displacement based design* che adotta come parametro principale per l'input sismico la capacità di spostamento e non più la forza inerziale.

È possibile eseguire allora una analisi pushover nella quale non si applichino degli schemi di carico come forze ma degli schemi di carico nella forma di spostamenti. Evidentemente, pensare di condurre un'analisi pushover classica in controllo di spostamento conduce a risultati errati perché, come mostra la figura 5.9, in fase di analisi spesso si impone uno schema di deformata (quello tratteggiato) che in realtà non ha alcuna corrispondenza fisica

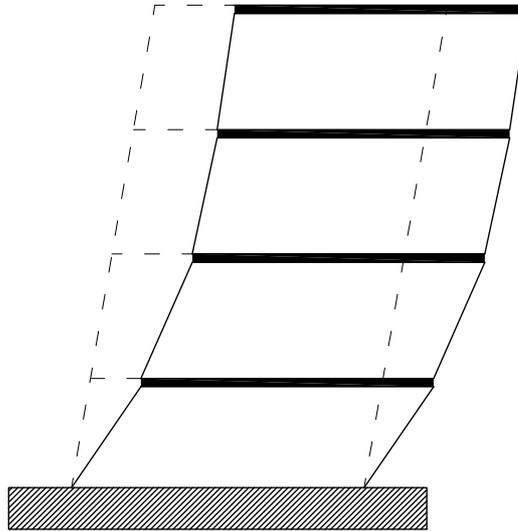


Figura 5.9: confronto della deformata reale e della deformata imposta nel controllo di spostamento.

con la deformata reale (quella continua): tuttavia, la possibilità di condurre una analisi nella quale si controlli lo spostamento è il passo che permette di arrivare a definire ulteriori possibili modi di procedere.

5.3.5. L'analisi pushover in controllo di risposta. Limitare la possibilità di compiere analisi statica non lineare solo secondo le modalità classiche in controllo di forza o di spostamento, conduce sempre a problemi nell'esecuzione o nell'analisi dei risultati ottenuti: questo perché se da un lato, eseguendo il controllo di spostamento, l'analisi è compiuta imponendo una deformata che non è quella reale, dall'altro, ovvero eseguendo il controllo di forza, è impossibile andare ad analizzare la curva di capacità nei passi successivi al valore di picco, ovvero si perde la totalità del fenomeno del degrado.

Per ovviare a tali problematiche è stata proposta una ulteriore modalità di analisi che prende il nome di *response control*. Il principio su cui tale modo di procedere si basa è quello di fissare lo spostamento di un punto di controllo della struttura in funzione del quale si calcola l'entità dei carichi applicati: il vantaggio è quello di consentire che gli spostamenti di tutti gli altri nodi siano liberi, ovvero non stabiliti a priori come nel caso del punto di controllo ma funzione dei carichi applicati. Le fasi dell'analisi sono allora:

- la determinazione dello spostamento del punto di controllo;
- il calcolo della risultante agente per ottenere quello spostamento;
- il calcolo degli spostamenti di tutti gli altri nodi conoscendo la forza agente.

Il sistema numerico è vincolato da un lato dal valore del *target displacement* del punto di controllo e dall'altro dalla forma dello schema di carico utilizzato, che deve essere definito all'inizio dell'analisi. In funzione del primo vincolo è possibile calcolare l'entità della risultante agente sulla struttura e quindi il moltiplicatore del carico orizzontale. Conoscendo poi la distribuzione completa dei carichi è possibile ottenere gli spostamenti e gli altri parametri significativi in tutti gli elementi della struttura.

5.3.6. Le evoluzioni proposte per l'analisi statica non lineare. Secondo le prescrizioni delle normative vigenti, l'analisi pushover deve essere condotta sottoponendo la struttura in esame ad uno schema di carichi orizzontali di forma costante. Sia la distribuzione delle forze applicata che la valutazione dello spostamento del punto di controllo sono basate sull'ipotesi che nell'analisi è possibile trascurare i modi di vibrare oltre il primo e che la deformata modale non vari al procedere del danneggiamento.

Studi recenti hanno però evidenziato come possano essere sollevati dei dubbi sull'attendibilità dei risultati ottenuti attraverso l'analisi condotta in maniera così convenzionale, legati ai seguenti aspetti:

- previsione poco accurata delle deformazioni nelle strutture dove sono rilevanti in termini di massa partecipante i modi di vibrare superiori;
- imprecisione nella localizzazione della concentrazione dei danni, causa della variazione della risposta della struttura;
- incapacità della riproduzione degli effetti dinamici, dato che l'analisi pushover convenzionale in quanto metodo statico non è in grado di riportare le fonti di dissipazione dinamiche;
- difficoltà nella modellazione di effetti tridimensionali;
- impossibilità di descrivere le azioni di carico cicliche.

Partendo da tali constatazioni, sono stati condotti differenti studi per ottenere uno sviluppo del metodo migliorandone l'efficienza e portandone i risultati ad avvicinarsi a quelli derivanti da una analisi dinamica non lineare.

Le soluzioni proposte a tali problemi sono state di due tipi: da un lato si è assistito alla proposta di metodologie che tenessero in conto anche i modi di vibrare superiori, dall'altro si sono sviluppate procedure che tenessero conto del danneggiamento progressivo della struttura.

5.3.6.1. Le modalità di analisi pushover che tengono in conto anche i modi di vibrare superiori. Un primo approccio che consente di considerare anche i modi

di vibrare superiori è la *multi-modal pushover procedure* (MMP) [30]: si tratta di un metodo semplice ed efficiente che consiste nell'eseguire una serie di analisi pushover, ognuna caratterizzata da uno schema di carichi laterali che riproduce di volta in volta l'andamento della deformata modale del modo che si sta considerando. Seguendo tale modo di procedere, è possibile evidenziare quale sia il modo più critico che causa il primo danneggiamento, mentre non è possibile dedurre dalla serie di risposte ottenute indipendentemente quale sia la risposta globale.

Per valutare l'entità della risposta globale dopo aver utilizzato un metodo di analisi esattamente pari a quello proposto nella MMP è possibile utilizzare la *pushover results combination* [21]; seguendo tale metodologia la risposta globale è data dalla opportuna combinazione delle risposte ottenute attraverso le diverse analisi pushover: in particolare la risposta strutturale finale si assume essere pari alla somma delle varie risposte pesate (utilizzando come peso di ogni termine i rispettivi fattori di partecipazione modale).

Un'altra procedura simile, che si basa ancora sulla MMP, è la *modal pushover analysis* [7]. Tale metodo prevede di operare sulle curve di capacità ottenute dalle varie analisi per determinare per ogni modo in maniera separata la deformazione di plasticizzazione ed i parametri di risposta. A questo punto la domanda totale è ricavabile come combinazione secondo la regola SRSS dei valori di picco di ciascun modo. Questo modo di procedere consente di ottenere una buona vicinanza rispetto ai dati ottenuti con l'analisi dinamica non lineare relativamente allo spostamento di piano rispetto alla base ed allo spostamento interpiano che in genere sono parametri difficilmente ottenibili attraverso analisi pushover.

Le analisi multi-modali costituiscono pertanto un'importante evoluzione del metodo pushover tradizionale, tenendo in conto che spesso per ottenere una corretta valutazione del problema è sufficiente considerare solo i primi tre o quattro modi di vibrare.

5.3.6.2. *Le procedure di pushover adattiva.* I metodi che vengono comunemente definiti *adattivi* sono caratterizzati dalla particolare attenzione posta nella variazione della resistenza locale della struttura e nel cambiamento della forma dei carichi agenti indotte dalla progressiva accumulazione del danneggiamento. In essi si tiene esplicitamente conto dei seguenti aspetti:

- la progressiva degradazione della rigidezza;
- l'allungamento del periodo proprio della struttura;
- l'influenza dei modi superiori.

I modelli adattivi sono accumulati, seppure nelle differenze delle diverse formulazioni, dalla proposizione di uno schema di carico o di spostamenti

iniziali che ad ogni passo viene aggiornato tenendo conto dei risultati dell'analisi condotta sulla struttura al passo precedente. Pertanto la particolarità dell'analisi è data dalla determinazione del carico orizzontale al passo n -esimo.

Un primo metodo per il calcolo del vettore dei carichi orizzontali è quello della sostituzione totale del vettore al passo $n-1$ con un altro vettore dato dal prodotto del vettore di carico nominale P_0 per il fattore di carico del passo n , λ_n , per il vettore normalizzato di forma del carico al passo n , F_n :

$$(5.15) \quad P_n = \lambda_n F_n P_0$$

Un altro metodo è invece quello della procedura incrementale del carico, per il quale, partendo dal carico applicato al passo $n-1$, P_{n-1} , si somma a questo il prodotto dell'incremento di carico del passo n -esimo $\Delta\lambda_n$ per il vettore del carico nominale P_0 per il vettore normalizzato di forma del carico al passo n , F_n :

$$(5.16) \quad P_n = P_{n-1} + \Delta\lambda_n F_n P_0$$

In generale il secondo metodo garantisce una stabilità del sistema migliore.

Il primo modello proposto che si basa su una procedura di determinazione del carico totalmente adattiva è quello elaborato da Bracci [4]: in esso si assume che il vettore di carico iniziale sia dato (in genere corrispondente alla prima deformata modale, quindi triangolare) e che venga aggiornato attraverso degli incrementi calcolati in relazione al taglio agente alla base ed agli spostamenti interpiano.

Il modello di Gupta e Kunnath [12], invece, fonda l'aggiornamento del carico applicato su un'analisi delle caratteristiche dinamiche della struttura al passo di interesse: pertanto viene dapprima eseguita una analisi modale all'inizio di ogni passo (utilizzando i valori di rigidezza ottenuti a convergenza nel passo precedente) e poi una analisi statica che combina opportunamente gli effetti dei differenti modi di vibrare.

L'approccio di Requena e Ayala [27], invece, si basa sulla filosofia di aggiornare la forma del vettore incrementale di carico solo qualora al passo precedente ci sia stata una o più plasticizzazioni.

Il modello di Elnashai [10] propone invece un algoritmo di analisi pushover che sia allo stesso tempo completamente adattivo e multimodale: si tiene in conto del danneggiamento attraverso un aggiornamento del vettore di forze agenti e del periodo proprio ottenuto dall'analisi modale. Le caratteristiche dinamiche della struttura sono ricavate ad ogni passo attraverso una analisi modale della stessa valutando la matrice di rigidezza del passo. Tale modello è stato sviluppato e testato attraverso l'implementazione nel

programma di calcolo *SeismoStruct* da Antoniou e Pinho, che si sono occupati di analisi pushover adattiva sia in controllo di forza che di spostamento [2] [3].

Un'ultima proposta per l'analisi pushover adattiva è quella di Albanesi [1] che propone un'approccio energetico al problema nella *adaptive energy-based pushover analysis* tenendo in conto oltre che le forze d'inerzia del problema anche l'energia cinetica sviluppata.

5.3.7. L'implementazione dell'analisi pushover. L'analisi pushover è una modalità di analisi che può essere definita dalla seguente procedura:

- definizione del modello caricato con azioni gravitazionali e, se adattiva, con le masse presenti;
- determinazione dello schema di carico laterale;
- calcolo della soluzione equilibrata ad ogni passo, che consiste a sua volta in:
 - applicazione del carico in forma incrementale;
 - calcolo dell'operatore di legame tangente (matrice di rigidità o flessibilità a seconda dell'approccio con cui si voglia affrontare il problema);
 - calcolo degli spostamenti e delle deformazioni;
 - calcolo delle azioni interne e delle sollecitazioni;
- determinazione della curva di capacità;

Si tratta di un metodo statico, visto che l'analisi dinamica è approssimata attraverso una serie di analisi statiche per diversi valori di entità dell'input, incrementale, dato che la forza o lo spostamento nodale assegnato sono monotoni non decrescenti, ed iterativo: quest'ultimo aspetto caratterizza la ricerca delle soluzioni ad ogni passo, dato che compiendo un'analisi non lineare, per raggiungere la soluzione è necessario ricorrere a metodi di analisi iterativi.

5.3.8. L'utilizzo dell'analisi pushover. Il risultato di un'analisi statica non lineare pushover è quello di fornire la curva di capacità, che può essere vista come il parametro più rappresentativo del comportamento globale della struttura: si tratta di una curva che lega il taglio alla base agente determinato in una analisi statica passo-passo, con lo spostamento di un punto di controllo. In ogni caso e per ogni tipo di struttura è possibile allora compiere una analisi di questo tipo, ideale per definire il comportamento anche in campo non lineare di qualunque tipo di edifici.

Secondariamente, l'analisi pushover è un metodo molto utile e diffuso per la verifica di edifici e molteplici normative, inclusa quella italiana, prescrivono di eseguire verifiche strutturali ricorrendo a tale procedura.

5.3.8.1. *La verifica strutturale attraverso analisi pushover nelle prescrizioni della normativa italiana.* Il testo di riferimento per la descrizione della verifica di edifici utilizzando analisi pushover è il Decreto del Presidente del Consiglio dei Ministri n. 3274 del 2003.

Supponendo di aver compiuto una scelta opportuna del punto di controllo, così che esso sia rappresentativo dell'evolvere della deformazione e degli spostamenti della struttura, per utilizzare i risultati dell'analisi per la verifica è possibile procedere nel seguente modo:

- definizione di un sistema ad un grado di libertà con comportamento bilineare che sia rappresentativo del sistema originario;
è lecito compiere tale operazione supponendo che sia possibile descrivere compiutamente la struttura in funzione di un solo modo di vibrare. Il metodo consiste innanzi tutto nel trasformare la curva di capacità relativa al sistema reale analizzato nella curva di capacità di un sistema ad un solo grado di libertà: è possibile compiere questo passo dividendo i valori di ordinata e di ascissa della curva per il coefficiente di partecipazione del primo modo di vibrare.

A questo punto è necessario ricondurre la curva di capacità ad una curva bilineare equivalente. È possibile scegliere come taglio di snervamento il taglio massimo ottenuto ed eguagliare le aree sottese dalle due curve. Come rappresentato attraverso la figura 5.10, partendo dalla curva di capacità ottenuta dall'analisi divisa per il fattore di partecipazione, è possibile trovare la bilineare equivalente e da questa i parametri del punto di snervamento definito dalle coordinate V_y e Δ_y .

- determinazione dello spostamento massimo del sistema equivalente per lo stato limite che si sta considerando;
avendo ottenuto il periodo del sistema ad un grado di libertà ricavandolo dalla curva bilineare equivalente è possibile calcolare attraverso lo spettro di progetto in spostamento il valore dello spostamento massimo, funzione del periodo proprio della struttura e dello stato limite che si sta valutando.
- determinazione dello spostamento del sistema originale a più gradi di libertà;
moltiplicando lo spostamento ottenuto per il sistema equivalente ad un grado di libertà per il coefficiente di partecipazione del primo modo di vibrare è possibile calcolare lo spostamento elastico del sistema a più gradi di libertà.

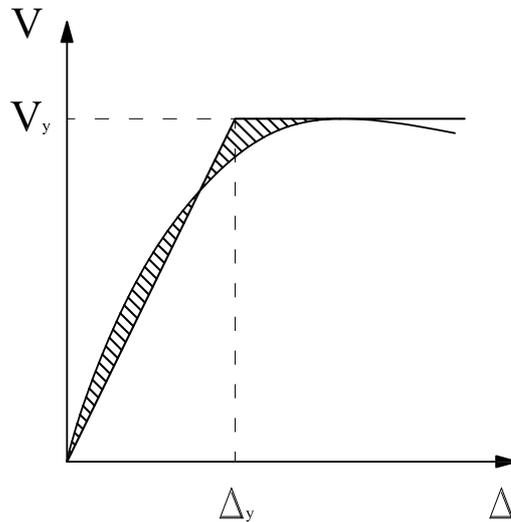


Figura 5.10: determinazione della curva bilineare equivalente dalla curva di capacità risultante.

- verifica dell'edificio;
se le ipotesi sulla cui base si è compiuta l'analisi sono state soddisfatte, si dispone di un valore dello spostamento del punto di controllo per l'input sismico di progetto. Ritornando pertanto ai risultati dell'analisi pushover è sufficiente ricavare da questa i valori di interesse relativi allo spostamento di progetto in termini di sollecitazioni e di deformazioni e da queste eseguire la verifica sia degli elementi fragili (in termini di resistenza) che degli elementi duttili (in termini di duttilità).

CAPITOLO 6

Le prove di analisi pushover

Gli elementi sviluppati, sia nella formulazione in piccoli spostamenti che in quella in grandi spostamenti, sono stati utilizzati per compiere delle prove *pushover* su telai in calcestruzzo armato.

I risultati ottenuti sono poi stati confrontati con quelli forniti da altri programmi di analisi non lineare per evidenziare analogie o differenze.

6.1. Le prove dell'elemento in piccoli spostamenti

I primi test compiuti sono stati quelli relativi all'elemento con non linearità del materiale, ma formulato nell'ipotesi di piccoli spostamenti. Tali prove

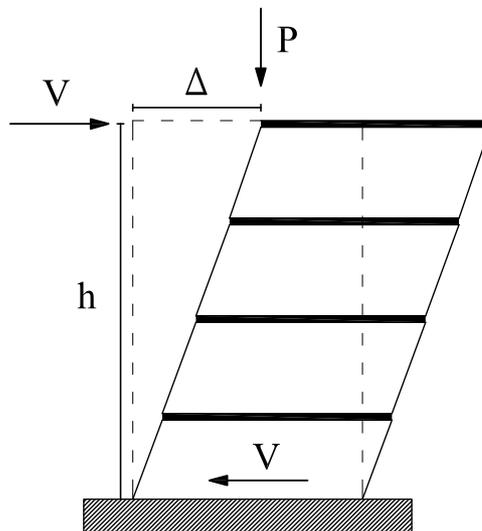


Figura 6.1: effetto $P - \Delta$ in un telaio.

sono servite a valutare la capacità di cogliere il valore del massimo taglio alla

base del telaio sottoposto a forze orizzontali, tenendo ben presenti quelli che sono i limiti della formulazione.

Il fatto che nell'ipotesi di piccoli spostamenti l'equazione di equilibrio sia sempre calcolata relativamente alla configurazione indeformata, infatti, impedisce di considerare l'effetto $P - \Delta$ nella struttura: come illustra la figura 6.1, per spostamenti rilevanti Δ , anche il carico P interviene nel produrre momento alla base.

Tale aspetto influisce particolarmente nei risultati ottenuti nel ramo di degrado della curva di capacità, perché mentre nel caso reale si assiste ad una rapida riduzione della resistenza a taglio, nel caso in piccoli spostamenti tale valore rimane pressoché costante.

Affinché dunque queste prove siano significative si sono eseguite analisi facendo in modo che il momento del secondo ordine non fosse mai maggiore del 10% di quello dato dalle forze orizzontali, ovvero, facendo riferimento alla figura 6.1:

$$(6.1) \quad P \Delta \leq 0,1 V h$$

6.1.1. La prova su un telaio ad una campata e un piano. La prima prova è stata compiuta su un semplice portale ad una campata ed ad un piano.

6.1.1.1. *Le caratteristiche geometriche.* Come illustra la figura 6.2, dato l'obiettivo esemplificativo della prova, sono state scelte caratteristiche geometriche molto semplici, lontane da quelle caratteristiche di qualsiasi struttura reale, considerando un'altezza pari a 10 metri e una lunghezza del traverso anch'essa pari a 10 metri. Le sezioni sono state scelte tenendo conto che sia il carico orizzontale che quello verticale agiscono prevalentemente sulle colonne a cui è stata assegnata una sezione maggiore (sezione A) rispetto alla sezione del traverso (sezione B). Entrambe le sezioni poi sono state suddivise in 100 fibre ed è stata assegnata l'armatura nella forma di quattro fibre in prossimità di ciascun angolo (evidenziate in figura 6.2).

6.1.1.2. *Le caratteristiche dei materiali.* Per quanto riguarda i materiali, sono stati scelti dello stesso tipo sia per le colonne che per il traverso e le caratteristiche sono:

- Calcestruzzo
 - tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
 - coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - * $E_{20} = 0.05$
 - * $E_{ts} = 0.3$

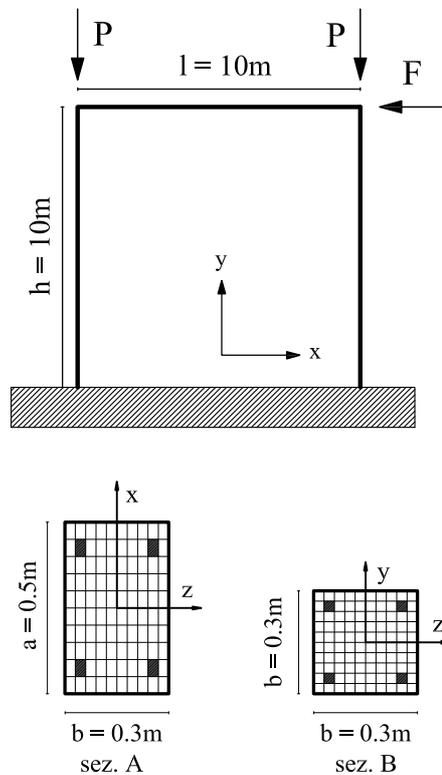


Figura 6.2: telaio testato nella prima prova.

- tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
- percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.005$
- passo delle staffe $s = 0.2m$
- altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$
- Acciaio
 - modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
 - rapporto tra modulo elastico tangente massimo e snervato: 0.005
 - tensione di snervamento: $400MPa$
 - parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - * $R_0 = 20$

- * $a_1 = 18.5$
- * $a_2 = 0.15$
- * $a_3 = 0$
- * $a_4 = 0$

Non si è operata alcuna distinzione tra il calcestruzzo del copriferro e quello della zona confinata.

6.1.1.3. *Le prove eseguite.* Sono state compiute più prove al variare del numero di elementi utilizzati per modellare le colonne. Nella prima si è utilizzato un solo elemento per descrivere l'intero pilastro, nella seconda si sono utilizzati due elementi, suddividendo la colonna in due posizionando un nodo in mezzeria, mentre nella terza prova si è ulteriormente suddiviso l'elemento di base della seconda prova, come illustrato nella figura 6.3. Le

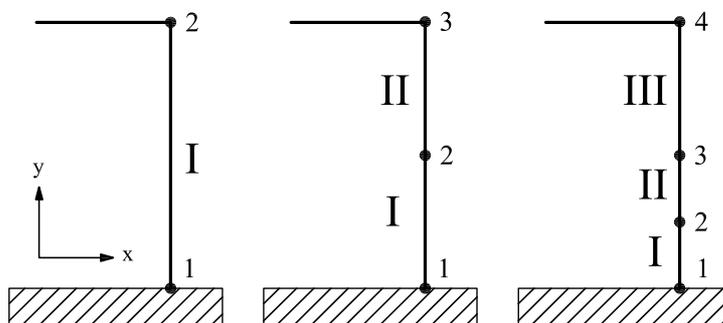


Figura 6.3: modellazione delle colonne nelle differenti prove, utilizzando 1, 2 e 3 elementi.

prove eseguite utilizzando l'elemento sviluppato in piccoli spostamenti sono poi state ripetute anche utilizzando SeismoStruct che considera invece una formulazione in grandi spostamenti.

I carichi gravitazionali sono stati applicati soltanto nei nodi del traverso, diretti verso il basso e pari a $100kN$. Relativamente ai carichi orizzontali,

invece, sono stati applicati in sommità ad una sola delle colonne, ma con modalità differenti relative alla natura *incrementale* di tale carico. Infatti, mentre nel caso dell'elemento sviluppato si è assegnato il taglio sulla colonna attraverso la procedura dell'arclength, fissando il solo passo di carico, nel caso di SeismoStruct si è scelta una modalità in controllo di risposta fissando il carico orizzontale pari a $100kN$.

Inoltre, per rispettare la condizione del punto (6.1) si è fatto in modo che lo spostamento laterale del traverso non fosse molto maggiore di un metro.

6.1.1.4. *I risultati ottenuti.* I risultati ottenuti evidenziano come, sia utilizzando SeismoStruct che l'elemento sviluppato in questo lavoro, la massima ordinata della curva di capacità è fortemente legata al numero di elementi utilizzati per modellare le colonne: all'aumentare di questo, infatti, il taglio resistente diminuisce.

Si riportano di seguito le curve di capacità ottenute dalle prove, posizionando a sinistra il risultato dell'elemento sviluppato ed a destra il risultato di SeismoStruct nella stessa prova.

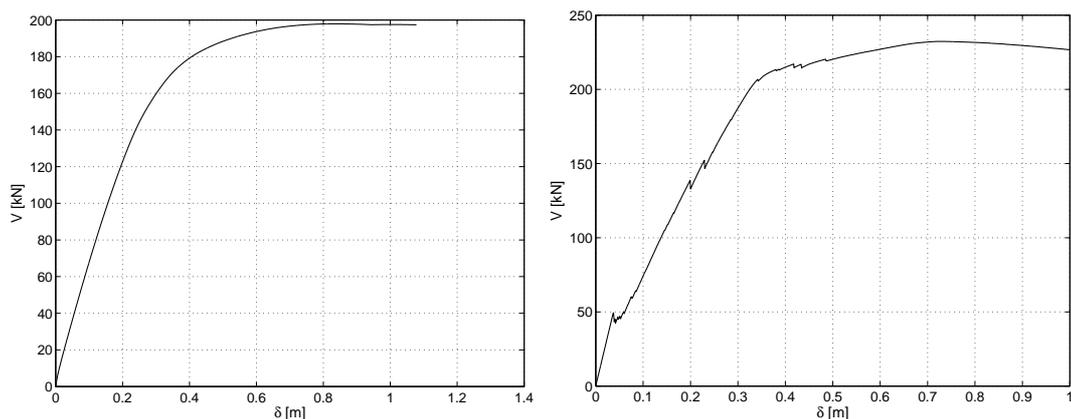


Figura 6.4: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 1 elemento.

LE PROVE DI ANALISI PUSHOVER

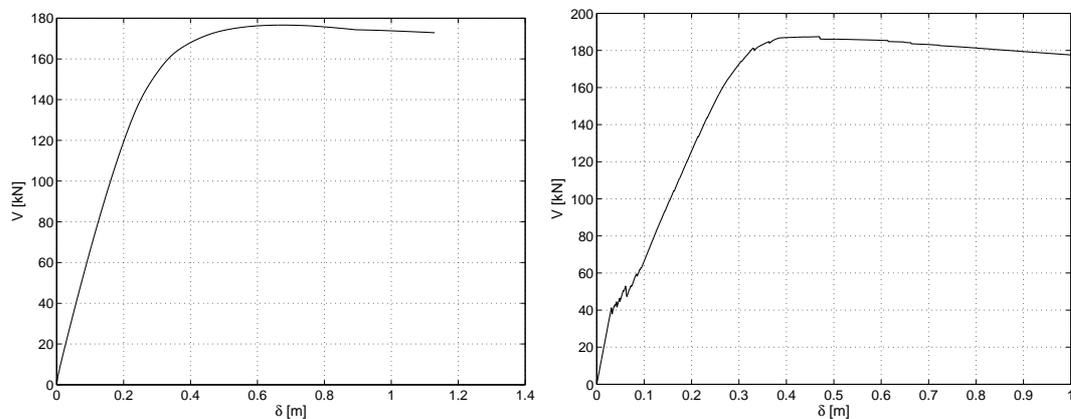


Figura 6.5: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 2 elementi.

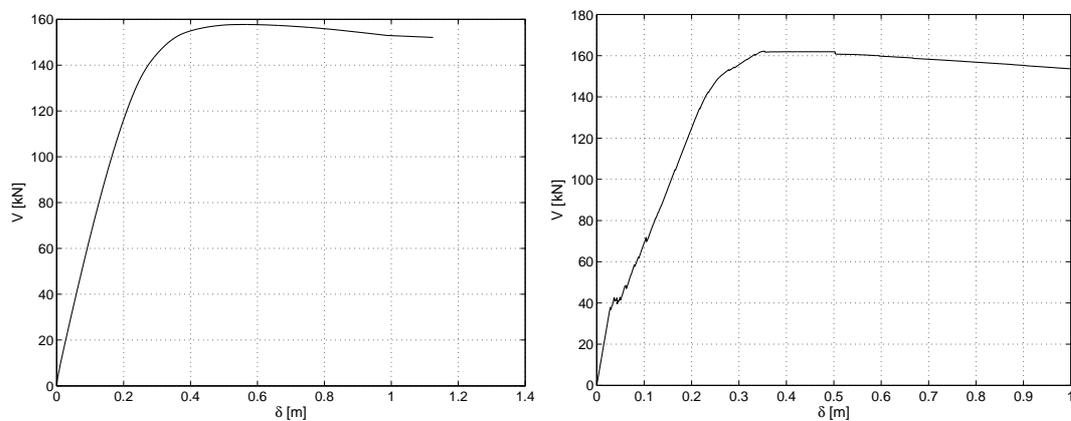


Figura 6.6: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 3 elementi.

Infine, nel seguente grafico (figura 6.7) si riportano tutte le curve di capacità ottenute con Seismostruct e con l'elemento sviluppato in piccoli spostamenti.

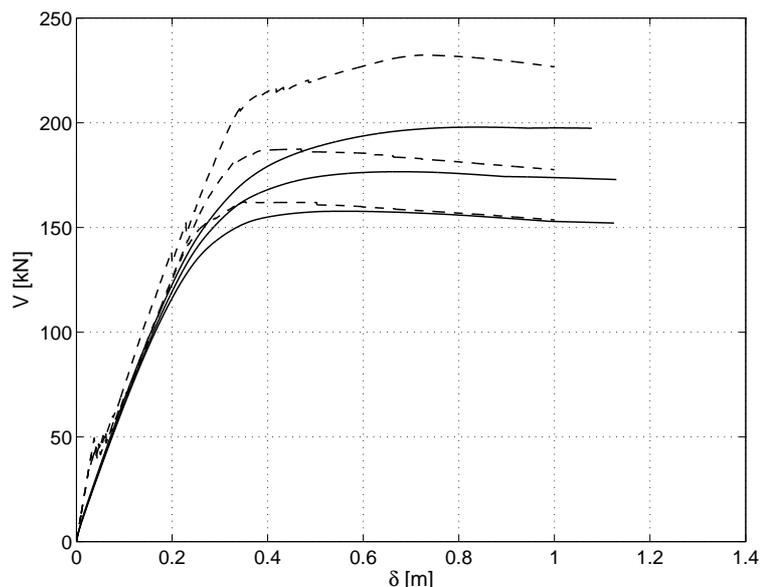


Figura 6.7: confronto delle curve di capacità ottenute con l'elemento implementato (linee continue) e SeismoStruct (linee tratteggiate).

Come anticipato in precedenza le curve più alte sono quelle con un minor numero di elementi.

6.1.2. La prova su un telaio ad una campata e tre piani. La seconda prova pushover dell'elemento in piccoli spostamenti e legame non lineare è stata eseguita su un telaio analogo a quello della prima prova ma composto da tre piani.

6.1.2.1. Le caratteristiche geometriche. Come illustra la figura 6.8, si è analizzato un telaio di tre piani con altezza interpiano di 10 metri e una lunghezza del traverso anch'essa pari a 10 metri. Le sezioni sono state scelte come nel caso precedente, avendo una sezione maggiore (sezione A) nelle colonne e una sezione minore (sezione B) nel traverso.

Entrambe le sezioni poi sono state suddivise in 100 fibre ed è stata assegnata

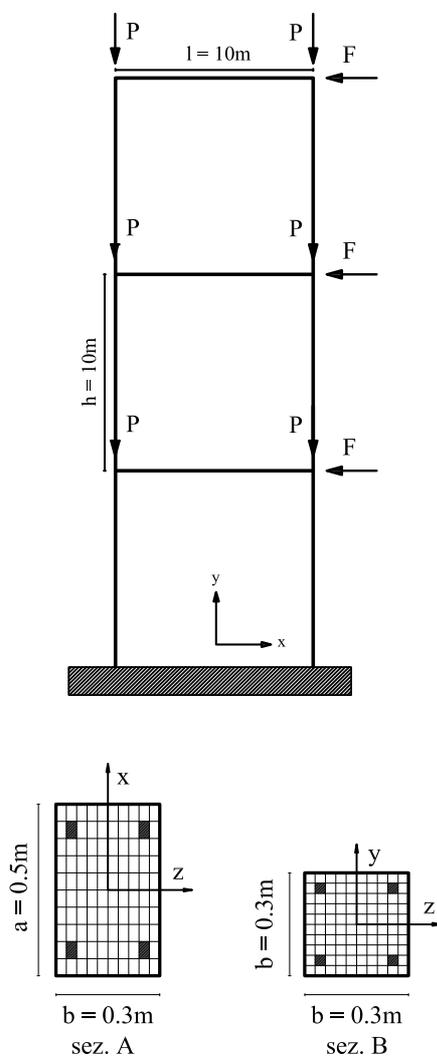


Figura 6.8: telaio testato nella seconda prova.

l'armatura nella forma di quattro fibre in prossimità di ciascun angolo (evidenziate in figura 6.8).

6.1.2.2. *Le caratteristiche dei materiali.* Per quanto riguarda i materiali, sono stati scelti dello stesso tipo sia per le colonne che per il traverso e le

caratteristiche sono:

- Calcestruzzo
 - tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
 - coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - * $E_{20} = 0.05$
 - * $E_{ts} = 0.3$
 - tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
 - percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.005$
 - passo delle staffe $s = 0.2m$
 - altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$

- Acciaio
 - modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
 - rapporto tra modulo elastico tangente massimo e snervato: 0.005
 - tensione di snervamento: $400MPa$
 - parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - * $R_0 = 20$
 - * $a_1 = 18.5$
 - * $a_2 = 0.15$
 - * $a_3 = 0$
 - * $a_4 = 0$

Anche in questo caso non si è fatto distinzione tra il calcestruzzo del copri-ferro e quello confinato.

6.1.2.3. *Le prove eseguite.* Sono state compiute più prove al variare del numero di elementi utilizzati per modellare le colonne. Nella prima si è utilizzato un solo elemento per descrivere l'intero pilastro, nella seconda si sono utilizzati due elementi, suddividendo la colonna in due, mentre nella terza prova si sono ulteriormente suddivisi gli elementi della seconda prova. Pertanto in questo caso l'ultima prova è stata compiuta suddividendo anche la metà superiore delle colonne, per poter descrivere meglio il comportamento del telaio anche nello spazio interpiano.

Le prove eseguite utilizzando l'elemento sviluppato in piccoli spostamenti sono poi state ripetute anche utilizzando SeismoStruct che considera invece una formulazione in grandi spostamenti.

I carichi gravitazionali sono stati applicati soltanto nei nodi del traverso, diretti verso il basso e pari a $100kN$, per un totale di sei carichi gravitazionali agenti (figura 6.8). Per quanto riguarda i carichi orizzontali, invece, sono

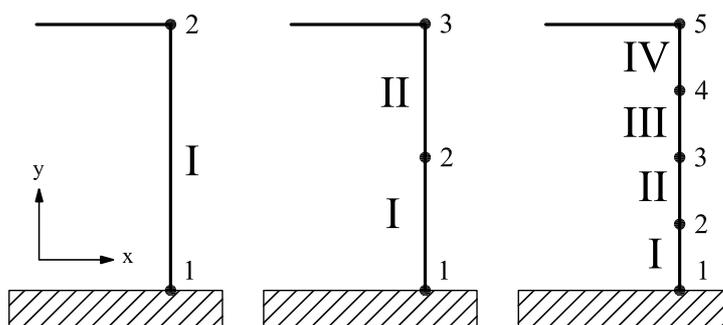


Figura 6.9: modellazione delle colonne nelle differenti prove, utilizzando 1, 2 e 4 elementi.

stati applicati in sommità alle colonne di una pilastrata con la stessa modalità della prima prova. Questa volta lo spostamento massimo a cui si è spinta l'analisi è stato di circa due metri.

6.1.2.4. *I risultati ottenuti.* In questa prova si è visto che uno spostamento di due metri è già sufficiente ad evidenziare la differenza di degrado della resistenza a taglio nella fase post-picco della storia di carico. Inoltre anche in questo caso si è assistito ad un decremento del taglio massimo all'aumentare del numero di elementi utilizzati per modellare le colonne.

Si riportano di seguito le curve di capacità ottenute dalle prove, posizionando a sinistra il risultato dell'elemento sviluppato ed a destra il risultato di SeismoStruct nella stessa prova.

6.1 LE PROVE DELL'ELEMENTO IN PICCOLI SPOSTAMENTI

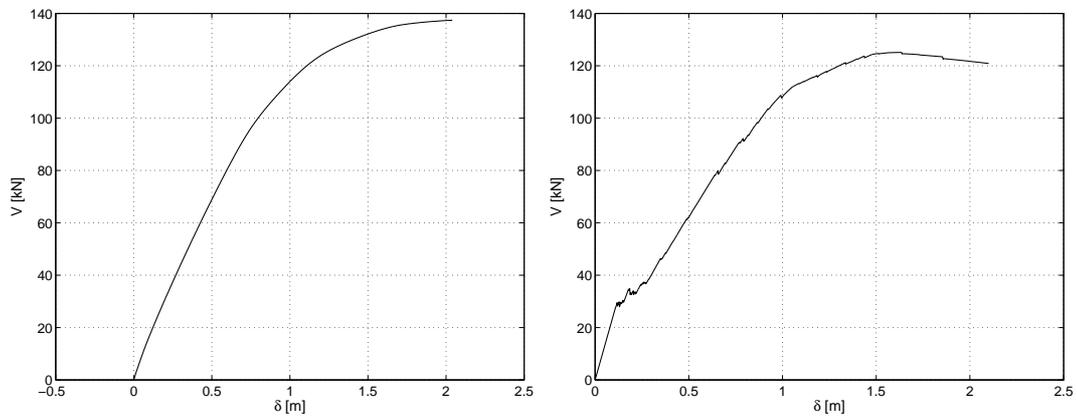


Figura 6.10: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 1 elemento.

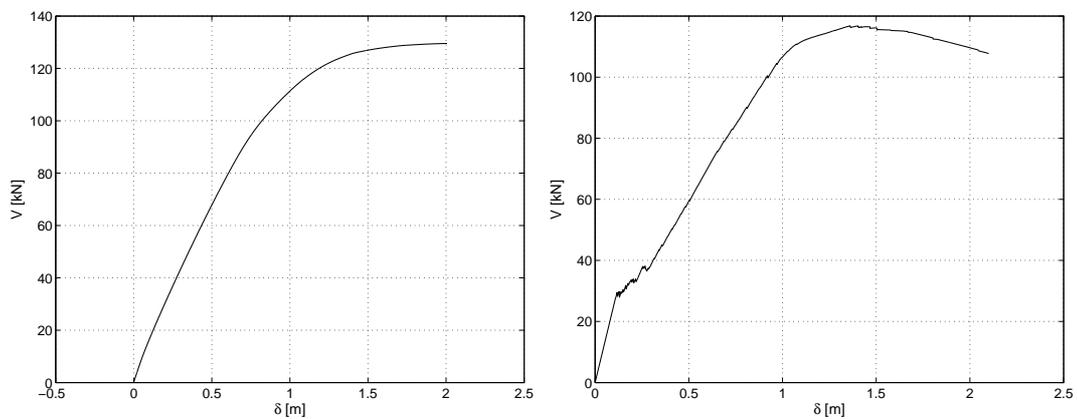


Figura 6.11: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 2 elementi.

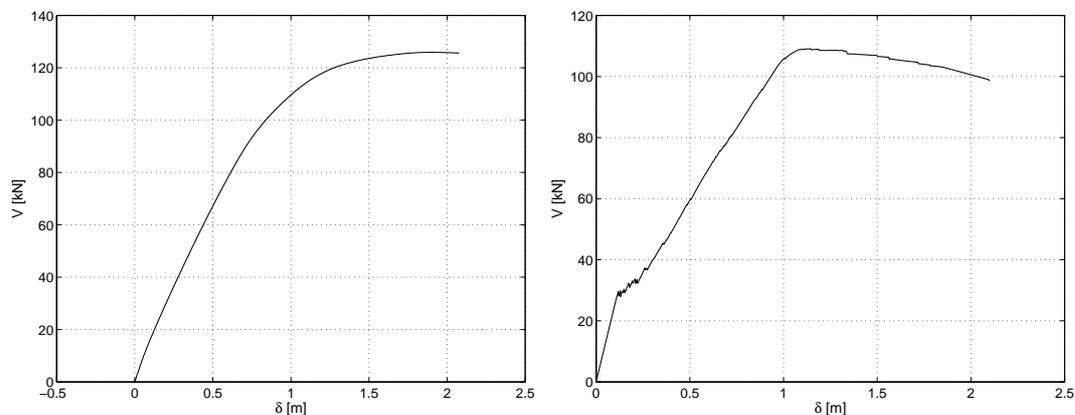


Figura 6.12: curve di capacità nel caso della modellazione delle colonne con 4 elementi.

Nel grafico di figura 6.13 si riportano invece tutte le curve di capacità ottenute con Seismostruct e con l'elemento sviluppato in piccoli spostamenti per il caso del telaio a tre piani.

6.1.3. La prova di applicazione di due schemi di carico differenti su un telaio a tre piani. La terza prova è stata fatta sottoponendo lo stesso telaio della prova 2 a due differenti schemi di carico, uno uniforme e uno triangolare, per poterne apprezzare le differenze.

Ha senso fare le prove con le due distribuzioni perché si assume che la prima, quella uniforme, proporzionale alla distribuzione delle masse nella struttura, sia caratteristica di un telaio danneggiato soggetto ad azione sismica, mentre la seconda, quella triangolare, sia caratteristica di un telaio non ancora danneggiato. L'ipotesi base dell'impiego di analisi statica pushover è infatti che i punti ottenuti da analisi dinamica siano posti nella ragione compresa tra le due curve.

6.1.3.1. *Le caratteristiche geometriche.* Le dimensioni del telaio sono esattamente quella adottate nella seconda prova, come illustra la figura 6.14. Le

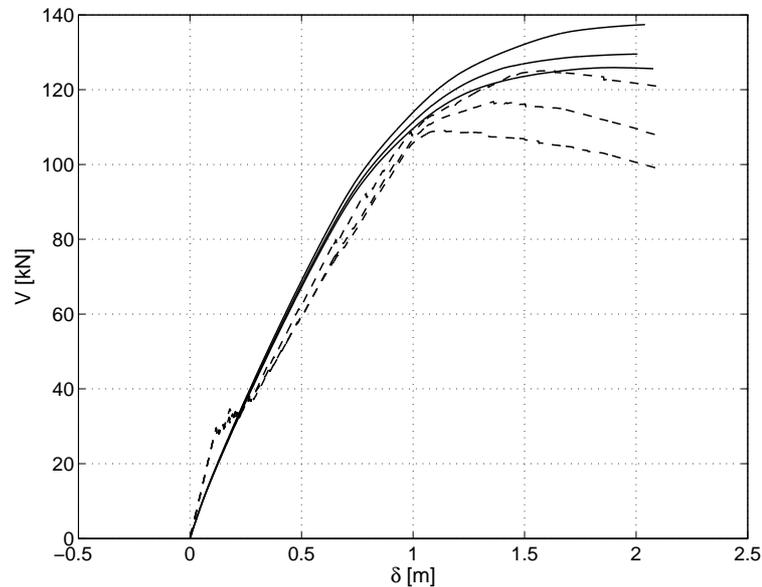


Figura 6.13: confronto delle curve di capacità ottenute con l'elemento implementato (linee continue) e SeismoStruct (linee tratteggiate).

sezioni delle colonne e dei traversi sono ancora quelle descritte nella figura 6.8. La modellazione delle colonne è avvenuta descrivendo ogni altezza interpiano utilizzando due elementi, ovvero ponendo un nodo intermedio a metà dell'altezza di solaio.

6.1.3.2. *Le caratteristiche dei materiali.* Le caratteristiche dei materiali adottate sono esattamente pari a quelle della seconda prova.

6.1.3.3. *Le prove eseguite.* Sono state eseguite delle prove di tipo pushover utilizzando i telai e gli schemi di carico della figura 6.14. Si è utilizzato sia l'elemento sviluppato, nella formulazione in piccoli spostamenti, che SeismoStruct comparando i risultati.

I carichi gravitazionali sono stati applicati come forze concentrate pari a $100kN$ nei nodi di estremità dei traversi, per un totale quindi di sei carichi gravitazionali in entrambi i telai.

Relativamente invece ai carichi orizzontali di tipo incrementale, si sono applicati nella forma di forze concentrate in corrispondenza dei tre solai. Affinché le prove potessero essere confrontate si è fatto in modo che la risultante fosse la stessa nei due telai; tuttavia si è cambiata la distribuzione di

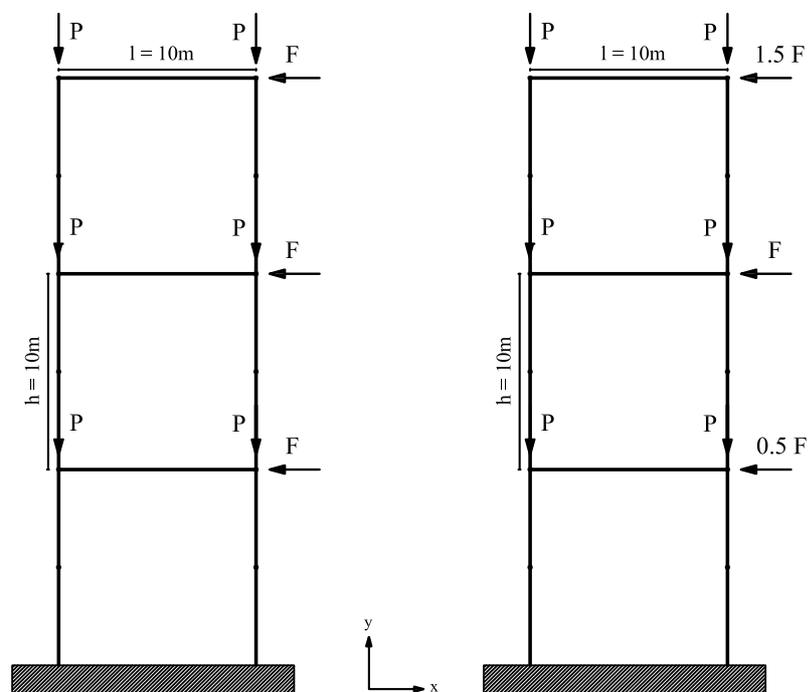


Figura 6.14: confronto tra i due differenti schemi di carico applicati allo stesso telaio: schema di carico uniforme (a sinistra) e schema di carico trinagolare (a destra).

forze, ponendo nel caso del primo telaio tre forze uguali pari a $100kN$, mentre nel caso del secondo telaio tre forze pari a $50kN$, $100kN$ e $150kN$ rispettivamente dal basso verso l'alto.

6.1.3.4. *I risultati ottenuti.* I risultati della prova mostrano che la curva di capacità ottenuta utilizzando lo schema di carico triangolare è caratterizzata da una ordinata minore rispetto a quella ottenuta con una distribuzione uniforme. Questo si è riscontrato sia in SeismoStruct che nell'elemento sviluppato ed è ragionevole considerando che nel caso triangolare la risultante delle forze ha un braccio di leva maggiore rispetto agli incastri di base (figura 6.15).

In secondo luogo si è evidenziato come il comportamento dell'elemento sviluppato in piccoli spostamenti sia notevolmente differente rispetto a

6.1 LE PROVE DELL'ELEMENTO IN PICCOLI SPOSTAMENTI

quello dell'elemento di SeismoStruct (che invece tiene conto della non linearità geometrica) nella valutazione del degrado della curva di capacità (figura 6.16). Avendo infatti spinto questa volta l'analisi fino a valori molto alti di spostamento, i grafici mostrano come la risposta data dall'elemento svilluppato non risenta affatto del fenomeno $P - \Delta$.

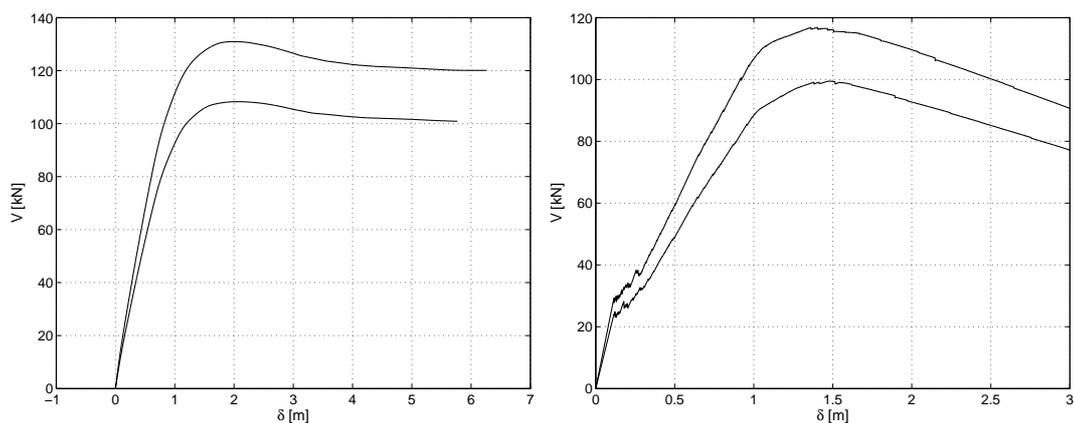


Figura 6.15: confronto tra i risultati della prova pushover con i due schemi di carico, triangolare (curve superiori) e uniforme (curve inferiori); a sinistra i risultati dell'elemento svilluppato, mentre a destra i risultati di Seismostruct.

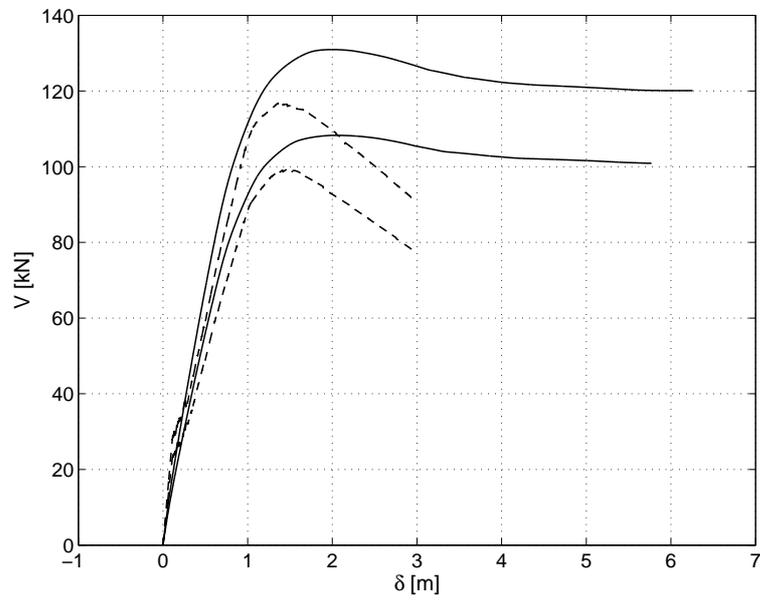


Figura 6.16: confronto tra i risultati dell'elemento sviluppato (linea continua) e quelli di SeismoStruct (linea tratteggiata).

6.2. Le prove dell'elemento in grandi spostamenti

Le prove dell'elemento in grandi spostamenti sono state compiute per determinare la capacità di descrivere la fase di degrado della struttura, nella quale la diminuzione del taglio resistente è determinata sia dalla nonlinearità del materiale che dalla nonlinearità geometrica.

6.2.1. La prova su una mensola. La prima prova eseguita è consistita in una prova pushover in controllo di spostamento su una mensola.

6.2.1.1. Le caratteristiche geometriche. Le prove sono state compiute su una mensola le cui caratteristiche geometriche sono quelle descritte nella figura 6.17. L'altezza della mensola è di 21 metri, mentre la sezione è uniforme per l'intera altezza e caratterizzata da una base di 0.8 metri e da un'altezza di 1.3 metri. La sezione è stata suddivisa in 130 fibre orizzontali, ognuna di altezza

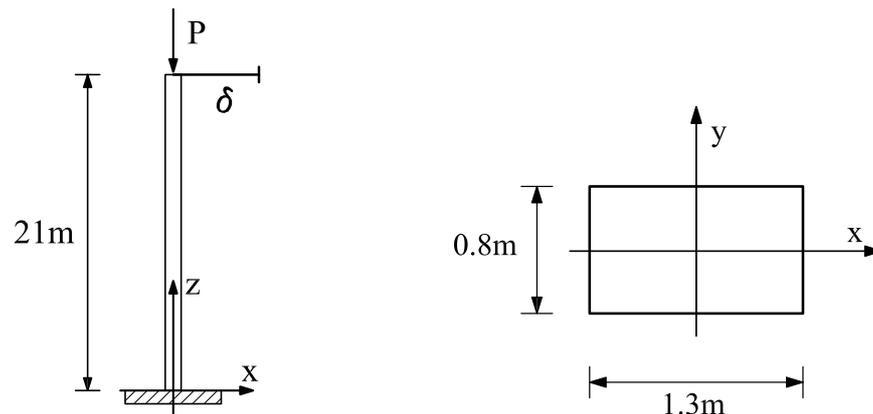


Figura 6.17: struttura sulla quale sono state eseguite le prove di analisi pushover in controllo di spostamento.

pari ad 1 cm. Si sono disposte 6 fibre di armatura, corrispondenti a circa il 4,5% dell'area della sezione, ponendone i due terzi simmetricamente ad una distanza pari a circa 60 cm dal baricentro della sezione e il rimanente terzo a circa 20 cm dal baricentro della sezione.

Lo spostamento è applicato in sommità nella direzione caratterizzata dalla maggiore inerzia della sezione.

In generale la prova pushover in controllo di spostamento può causare errori nella valutazione della capacità strutturale perché si impone arbitrariamente la deformata dell'edificio; in questo caso, però, dato che si considera una sola

massa soggetta ad una forza orizzontale posta in corrispondenza del nodo libero della mensola, è possibile ritenere attendibili i risultati relativi alla capacità della struttura.

6.2.1.2. *Le caratteristiche del materiale.* Le caratteristiche del materiale sono:

- Calcestruzzo
 - tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
 - coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - * $E_{20} = 0.05$
 - * $E_{ts} = 0.3$
 - tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
 - percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.005$
 - passo delle staffe $s = 0.2m$
 - altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$
- Acciaio
 - modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
 - rapporto tra modulo elastico tangente massimo e snervato: 0.00005
 - tensione di snervamento: $400MPa$
 - parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - * $R_0 = 20$
 - * $a_1 = 18.5$
 - * $a_2 = 0.15$
 - * $a_3 = 0$
 - * $a_4 = 0$

Anche in questo caso non si è fatto distinzione tra il calcestruzzo del copriferro e quello confinato.

6.2.1.3. *Le prove eseguite.* L'estremo libero è stato caricato con una forza verticale pari a $1000kN$ e sono state compiute delle prove al variare del numero di elementi utilizzati per modellare la mensola:

- 5 elementi
- 10 elementi
- 20 elementi
- 50 elementi

Potendo confrontare in questo caso la formulazione di due programmi di calcolo sviluppati entrambi in grandi spostamenti, sono state condotte le analisi spingendo il nodo controllato della struttura fino a valori di δ pari a 4 metri.

6.2.1.4. *I risultati ottenuti.* Si riportano nelle figure 6.18-6.22 il raffronto delle curve di capacità ottenute eseguendo l'analisi pushover con SeismoStruct e con l'elemento sviluppato in grandi spostamenti con il legame dei materiali.

Si sono avuti problemi di convergenza sia nel corso dell'analisi compiuta con l'elemento sviluppato sia con quella compiuta con SeismoStruct. Tali problemi sono evidenziati graficamente dall'andamento frastagliato della curva ed in linea di massima sono più rilevanti all'aumentare del numero di elementi con i quali si compie l'analisi; d'altro canto però in genere si tratta di difficoltà transitorie che vengono superate col procedere dell'analisi. Da questo punto di vista SeismoStruct si è dimostrato più vulnerabile (figure 6.20, 6.21 e 6.22) rispetto all'elemento sviluppato (figura 6.22).

D'altro canto la figura 6.18 evidenzia come l'elemento sviluppato sia del tutto incapace di descrivere il problema in oggetto di studio utilizzando un solo elemento: si ha infatti una curva di capacità totalmente lontana da quello che può essere considerato un andamento fisicamente ragionevole del taglio alla base in funzione dello spostamento in sommità. Tale debolezza era già emersa nelle prove dell'elemento in grandi spostamenti con legame elastico e presumibilmente è dovuta allo schema di integrazione lungo lasse dell'elemento, che è compiuta utilizzando una integrazione numerica alla Cavalieri-Simpson con tre punti soltanto.

Inoltre, confrontando l'andamento delle curve di capacità dell'elemento sviluppato in funzione del numero di elementi utilizzati per modellare la mensola (figura 6.23, nella quale il taglio decresce all'aumentare del numero di elementi utilizzati), è possibile vedere che nel tratto di curva che segue immediatamente il punto di picco si ha il progressivo accentuarsi di un fenomeno di localizzazione all'aumentare degli elementi usati. Passando dalle curve superiori a quelle inferiori, infatti, questo è evidenziato dalla variazione del flesso nella zona post-picco che culmina nei problemi di convergenza del caso con cinquanta elementi.

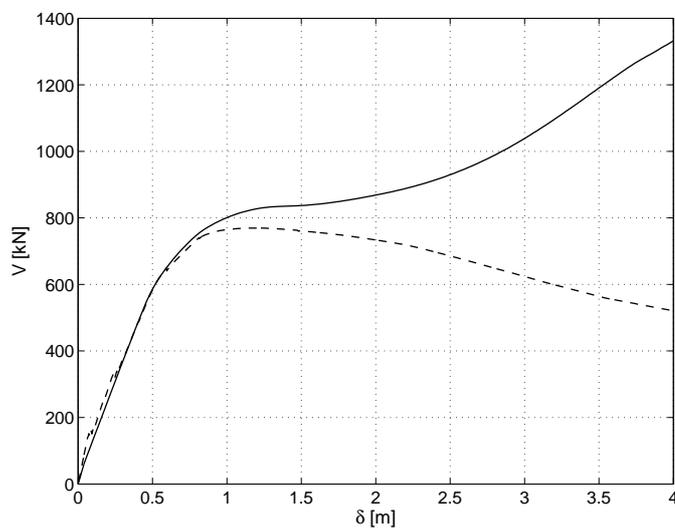


Figura 6.18: confronto delle curve di capacità utilizzando Seis-Struc (linea tratteggiata) e l'elemento sviluppato (linea continua) modellando la mensola con un solo elemento.

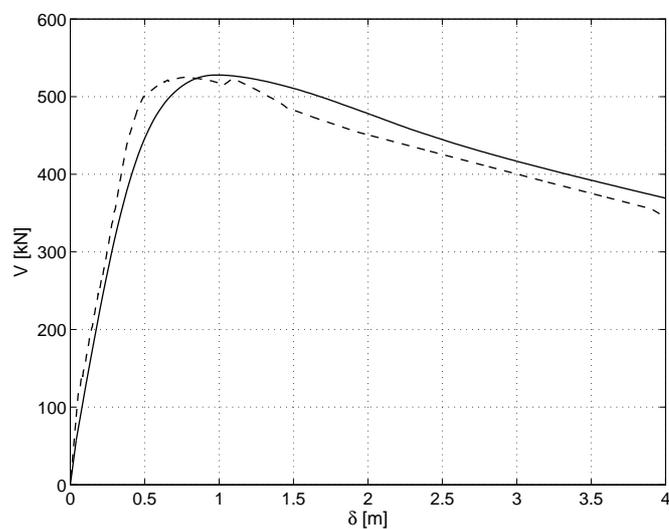


Figura 6.19: confronto delle curve di capacità utilizzando Seis-Struc (linea tratteggiata) e l'elemento sviluppato (linea continua) modellando la mensola con cinque elementi.

6.2 LE PROVE DELL'ELEMENTO IN GRANDI SPOSTAMENTI

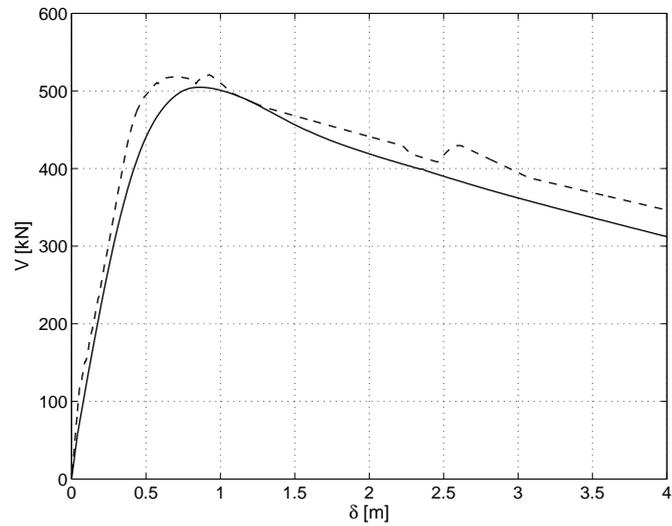


Figura 6.20: confronto delle curve di capacità utilizzando Seis- moStruct (linea tratteggiata) e l'elemento sviluppato (linea continua) modellando la mensola con dieci elementi.

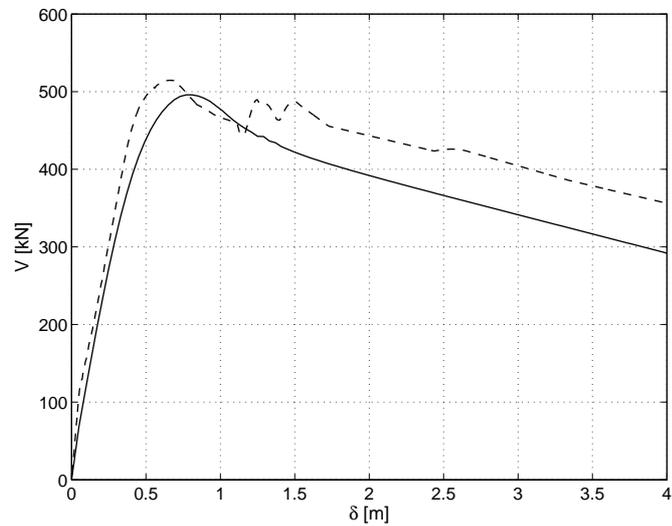


Figura 6.21: confronto delle curve di capacità utilizzando Seis- moStruct (linea tratteggiata) e l'elemento sviluppato (linea continua) modellando la mensola con venti elementi.

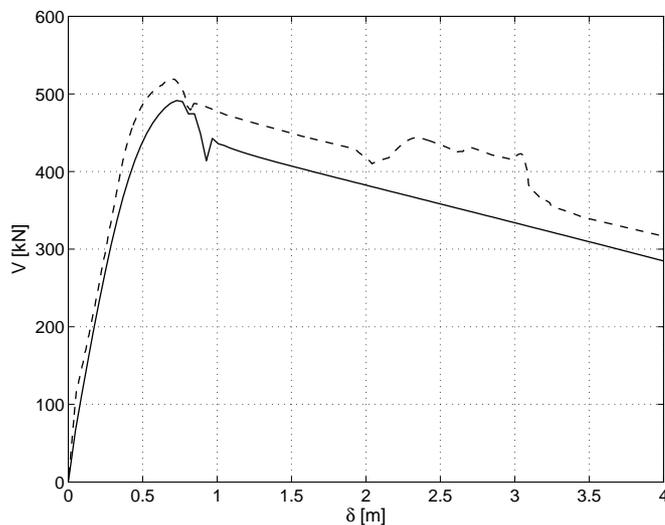


Figura 6.22: confronto delle curve di capacità utilizzando Seis-Struct (linea tratteggiata) e l'elemento sviluppato (linea continua) modellando la mensola con cinquanta elementi.

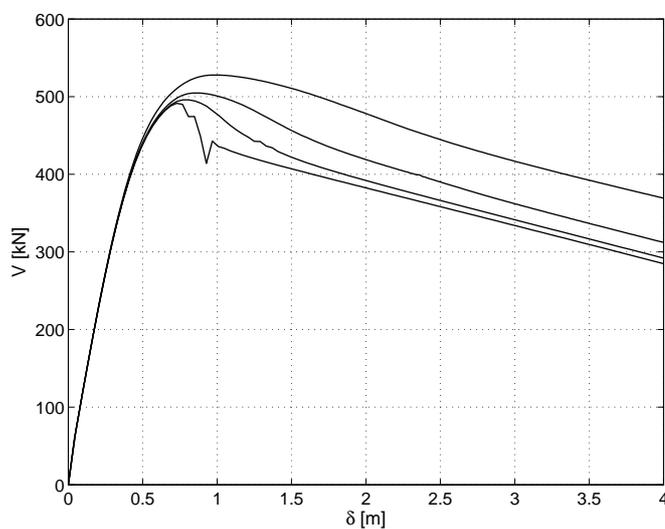


Figura 6.23: confronto delle curve di capacità utilizzando l'elemento sviluppato al variare del numero di elementi utilizzati (non è stata riportata la curva della prova con un solo elemento).

6.2.2. La prova su un telaio ad un piano e una campata. La seconda prova è stata eseguita utilizzando l'elemento sviluppato in grandi spostamenti con legame del materiale per eseguire una prova pushover in un portale.

6.2.2.1. *Le caratteristiche geometriche.* Le caratteristiche geometriche della struttura sono molto simili quelle della prova del paragrafo 6.1.1 e sono riportate nella figura 6.24. L'unica differenza riguarda la sezione del traverso che in questo caso è uguale a quella delle colonne.

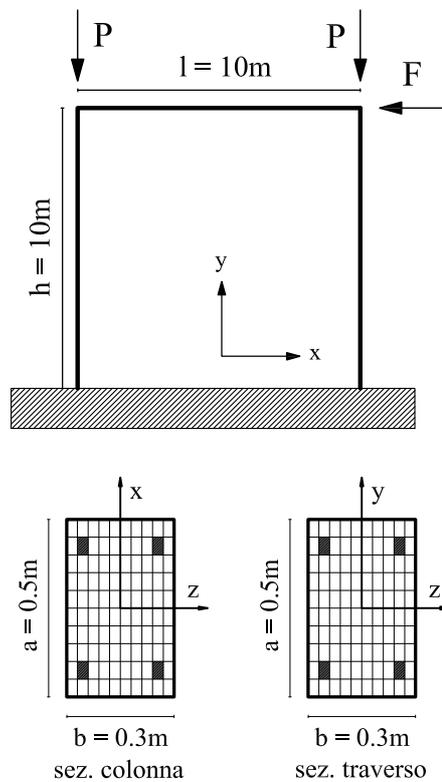


Figura 6.24: telaio testato nella prova pushover applicando l'elemento formulato in grandi spostamenti.

6.2.2.2. *Le caratteristiche dei materiali.* Per quanto riguarda le caratteristiche dei materiali, sono stati scelti materiali uguali sia per le colonne che per il traverso. Rispetto al caso del paragrafo 6.1.1, l'unica differenza è stata, nella definizione delle caratteristiche dell'acciaio, la riduzione del rapporto tra

modulo elastico tangente massimo e snervato; tale variazione è stata fatta per mettere in risalto la degradazione della struttura riducendo l'incrudimento dell'acciaio:

- Calcestruzzo
 - tensione massima di resistenza a compressione: $30MPa$
 - coefficienti per calcolo moduli tangenti da E_c :
 - * $E_{20} = 0.05$
 - * $E_{ts} = 0.3$
 - tensione caratteristica a rottura dell'acciaio delle staffe di confinamento $\sigma_{s,u} = 374MPa$
 - percentuale geometrica armatura trasversale $\rho_{sw} = 0.005$
 - passo delle staffe $s = 0.2m$
 - altezza calcestruzzo confinato: $h = 0.15m$
- Acciaio
 - modulo elastico tangente all'origine: $200GPa$
 - rapporto tra modulo elastico tangente massimo e snervato: 0.00005
 - tensione di snervamento: $400MPa$
 - parametri per il calcolo della deformazione plastica secondo legge del legame implementato:
 - * $R_0 = 20$
 - * $a_1 = 18.5$
 - * $a_2 = 0.15$
 - * $a_3 = 0$
 - * $a_4 = 0$

Non si è operata alcuna distinzione tra il calcestruzzo del copriferro e quello della zona confinata.

6.2.2.3. *Le prove eseguite.* È stata eseguita una prova pushover considerando il portale composto da 8 elementi nelle colonne e 5 elementi nel traverso, considerando di avere un'armatura pari al 1% della sezione in ogni spigolo della stessa e caricando i nodi di estremità del traverso con una forza verticale di $100kN$. È stata poi compiuta una prova in controllo di risposta in SeismoStruct impostando una forza orizzontale pari a $100kN$ ed uno spostamento trasversale di 2.8 metri, mentre con l'elemento sviluppato la prova è stata compiuta utilizzando l'*arclength*.

6.2.2.4. *I risultati ottenuti.* Il sistema è risultato essere abbastanza instabile sia se affrontato con l'elemento sviluppato, per il quale è stato necessario

6.2 LE PROVE DELL'ELEMENTO IN GRANDI SPOSTAMENTI

calibrare l'analisi variando alcuni parametri che governano la procedura numerica dell'arclength per ottenere convergenza, che con SeismoStruct, per il quale è stato necessario rilassare le condizioni di convergenza per riuscire a descrivere tutta la curva di capacità riportata. Nonostante i problemi di

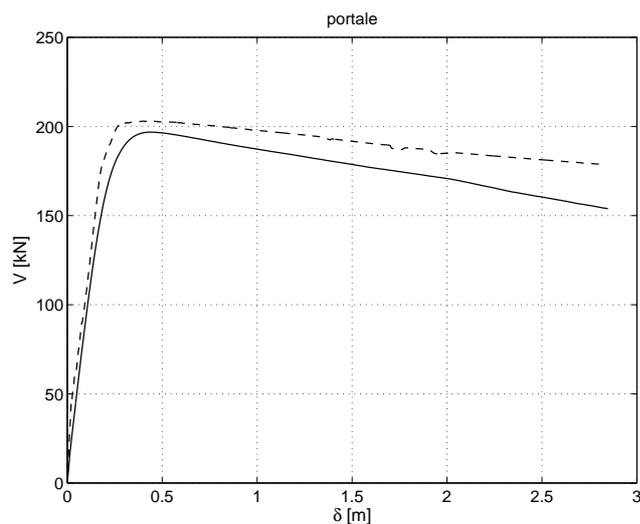


Figura 6.25: confronto della curva di capacità ottenuta con SeismoStruct (linea tratteggiata) e con l'elemento sviluppato (linea continua).

riscontrati, la figura 6.25 evidenzia come le curve di capacità siano prossime tra loro.

Conclusioni

I risultati ottenuti applicando gli elementi nonlineari sviluppati per l'analisi strutturale sono soddisfacenti.

Sebbene in alcuni casi particolari si abbiano problemi di convergenza, è risultato possibile superare tali difficoltà intervenendo sui parametri che disciplinano le modalità numeriche di analisi.

Inoltre è stata considerata una validazione degli elementi sviluppati il fatto che altri programmi di analisi strutturale nonlineare forniscano gli stessi risultati per i medesimi problemi.

Evidentemente tale lavoro deve considerarsi perfettibile ed il miglioramento riguarda essenzialmente due aspetti, il primo legato alle caratteristiche di stabilità e robustezza degli algoritmi, il secondo legato all'estensione della classe di problemi che gli elementi sono in grado di affrontare.

Riguardo al primo punto è possibile procedere attraverso:

- il ricorso a forme di integrazione numerica più raffinate che consentano di cogliere meglio il comportamento strutturale anche modellando le travi con un solo elemento
- l'implementazione di procedure di controllo numerico della fase di softening nella legge costitutiva dei materiali

Riguardo invece al secondo problema è possibile concentrarsi in particolare su:

- l'implementazione del problema in grandi spostamenti anche nel caso di rotazioni finite e deformazione a taglio non nulla
- la valutazione del problema di trave utilizzando un modello costitutivo del materiale non lineare tridimensionale

Ringraziamenti

Al termine di questo lavoro voglio esprimere la mia gratitudine a quanti mi sono stati vicini nel corso dei miei studi.

Ringrazio il professore Ferdinando Auricchio, di cui mi era nota la professionalità e la preparazione, ma che ricorderò anche e soprattutto per la cordialità e la dedizione nel guidarmi nel mio lavoro. A lui, che accompagnandomi ha reso piacevole questo cammino lungo e pieno di difficoltà, è dedicata l'epigrafe di questo libruccio.

Ringrazio il professore Michele Calvi, punto di riferimento in ogni momento con i suoi consigli, che mi ha consentito in questo periodo di tesi di aumentare le mie conoscenze, e soprattutto i miei interessi, anche oltre il campo della meccanica computazionale.

Ringrazio Lorenza Petrini, per il grande aiuto fornitomi, per l'insostituibile disponibilità nel seguirmi e correggermi, e per l'attenzione nei confronti del mio operato.

Non posso certo dimenticare di esprimere poi la mia riconoscenza a quanti mi sono stati vicini in questo periodo, a cui dedico il mio lavoro.

Innanzitutto la mia famiglia, mio padre e mia madre, mia sorella, i nonni, gli zii ed i cugini.

Poi tutti coloro che hanno animato con la loro presenza il mio soggiorno a Pavia, tra gli altri: Laura, Davide, Carlo, Giovanni, Marco, Paolo, Luca, Andrea, Carlo Pietro, Filippo, Fabio, Francesco, Carlo, Giovanni, Pasquale, Giuseppe, Davide, Patrick, Giacomo, Alberto, Paolo, Arber, Mattia, Jacopo, Roberto, Lorenzo, Nicola, Andrea, Paolo, Matteo, Diego, Niccolò, Samuele, Marco, Claudio, Franco Diego, Giuliano, Alessandro, Gabriele, Clemente, Manuela, Daniela, Silvia, Laura, Roberta, Sebastiano, Davide, Alessandro, Davide, Carmelo, Daniele, Antonio, Michela, Fabio, Giorgia.

Infine i compagni di casa, in particolare Paolo, Andrea, Leonardo, Riccardo, Marco, Fausto, Alberto, Simone, Alessio, Elena, Donatella, Erika, Tiziana, Silvia e Diego.

Bibliografia

- [1] Albanesi, T., Biondi, S., Petrangeli, M.; Pushover analysis: An energy-based approach; *Proc. of the twelfth European Conference on Earthquake Engineering*, London, UK, Paper No. 605, (2002)
- [2] Antoniou, S., Pinho, R.; Advances and Limitations of Adaptive and Non-Adaptive Force-Based Pushover Procedures; *Journal of Earthquake Engineering*, Vol.8, pp.497-522, (2004)
- [3] Antoniou, S., Pinho, R.; Development and Verification of a Displacement-Based Adaptive Pushover Procedure; *Journal of Earthquake Engineering*, Vol.8, pp. 643-661, (2004)
- [4] Bracci, J. M., Kunnath, S. K., Reinhorn, A. M.; Seismic performance and retrofit evaluation of reinforced concrete structures; *Journal of Structural Engineering*, Vol.123, pp. 3-10, (1997)
- [5] Chan, W. G.; The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks; *Magazine of Concrete Research*, vol.7, pp. 121-132, (1955)
- [6] Chopra, A. K., Chintanapakdee, C.; Evaluation of modal pushover analysis using generic frames; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.32, pp. 417-442, (2004)
- [7] Chopra, A. K., Goel, R. K.; A modal pushover analysis procedure for estimating seismic demands for buildings; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.31, pp. 561-582, (2002)
- [8] Chopra, A. K., Goel, R. K.; A modal pushover analysis procedure to estimate seismic demands for unsymmetric-plan buildings; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.33, pp. 903-927, (2004)
- [9] Cosenza, E., Magliulo, G., Pecce, M., Ramasco, M.; *Progetto Antisismico di Edifici in Cemento Armato*; IUSS Press, Pavia, (2004)
- [10] Elnashai, A. S.; Advanced inelastic static (pushover) analysis for earthquake applications *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.12, pp. 51-69, (2001)
- [11] Filippou, F. C., Popov, E. P. and Bertero, V. V.; Effects of bond deterioration on hysteretic behavior of reinforced concrete joints; EERC Report 83/19, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, (1983)
- [12] Gupta, B., Kunnath, S. K.; Adaptive spectra-based pushover procedure for seismic evaluation of structures; *Earthquake Spectra*, Vol.16, pp. 367-391, (2000)
- [13] Hernández-Montes, E., Kwon, O., Aschheim, M. A.; An Energy-based Formulation for first and multiple-mode Nonlinear Static (Pushover) Analyses; *Journal of Earthquake Engineering*, Vol.8, pp. 69-88, (2004)
- [14] Hognestad, E., Hanson, N. W., McHenry, D.; Concrete stress distribution in ultimate strength design; *ACI j.*, Vol.52, pp.455-480, (1955)
- [15] Hoshikuma, J., Kawashima, K., Nagaya, K. and Taylor, A. W.; Stress-strain model for confined reinforced concrete bridge piers; *ASCE j. of struc. eng.*, Vol.123, pp. 624-633, (1997)
- [16] Karsan, I.D. and Jirsa, J.O.; Behavior of Concrete under Compressive Loadings; *J. struct. div. ASCE*, Vol. 95, pp. 2543-2563, (1969)

BIBLIOGRAFIA

- [17] Kent, D. C. and Park, R.; Flexural members with confined concrete; *J. struct. div. ASCE* Vol.97, pp. 1969-1990, (1971)
- [18] Kim, S., D'Amore, E.; Push-over analysis procedure in earthquake engineering; *Earthquake Spectra*, Vol.15, pp. 417-434, (1999)
- [19] Lowes, L.N. and Moehle, J.P.; Evaluation and Retrofit of Beam-Column T-Joints in Older Reinforced Concrete Bridge Structures; *ACI Structural Journal*, Vol. 96, pp. 519-532, (1999)
- [20] Menegotto, M., Pinto, P. E.; Method of analysis for cyclically loaded RC plane frames including changes in geometry and nonelastic behavior of elements under combined normal force and bending; *Proc. IABSE Symposium*, Lisbona, Portogallo, (1974)
- [21] Moghadam, A. S., Tso, W. K.; A pushover procedure for tall buildings; *Proc. of the twelfth European Conference on Earthquake Engineering*, London, UK, Paper No. 395, (2002)
- [22] Mohd Yassin, M. Y.; Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads; Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, (1994)
- [23] Petrini, L., Pinho, R., Calvi, G. M.; *Criteri di Progettazione Antisismica degli Edifici*; IUSS Press, Pavia, (2004)
- [24] Popovics, S.; A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete; *Cement and Concrete Research*, vol.3, pp. 583-599, (1973)
- [25] Priestley, M. J. N.; *Myths and Fallacies in Earthquake Engineering, Revisited*; IUSS Press, Pavia, (2003)
- [26] Priestley, M. J. N., Seible, F., Calvi, G. M.; *Seismic Design and Retrofit of Bridges*; J. Wiley & Sons, Inc., New York, (1996)
- [27] Requena, M., Ayala, G.; Evaluation of a simplified method for the determination of the nonlinear seismic response of RC frames; *Proc. of the twelfth World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland, New Zealand, Paper No. 2109, (2000)
- [28] Roy, H. E. H. and Sozen, M. A.; Ductility of Concrete; *Proceedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete ASCE-ACI*, pp. 213-224, (1964)
- [29] Rüsçh, H.; Researches towards a general flexural theory for structural concrete; *ACI journal*, Proceedings, vol.57, pp. 1-28, (1960)
- [30] Sasaki, K. K., Freeman, S. A., Paret, T. F.; Multi-mode pushover procedure (MMP) - A method to identify the effects of higher modes in a pushover analysis; *Proc. of the sixth US National Conference on Earthquake Engineering*, Earthquake Engineering Research Inst., Oakland, California, (1998)
- [31] Saenz, L. P.; Discussion of 'Equation for the stress-strain relation for concrete'; *Cement and Concrete Research*, vol.3, pp. 583-599, (1973)
- [32] Scott, B. D., Park, R. and Priestley, M. J. N.; Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates; *ACI journal*, vol.79, pp. 13-27, (1982)
- [33] Soliman, M. T. M. and Yu, C. W.; The flexural stress-strain relationship of concrete confined by rectangular transverse reinforcement; *Magazine of Concrete Research*, Vol.19, pp. 223-238, (1967)
- [34] Spacone, E., Filippou, F. C. and Taucer, F. F.; Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: part I. Formulation; *Earthquake eng. struct. dyn.* vol.25, pp. 711-725, (1996)
- [35] Spacone, E., Filippou, F. C. and Taucer, F. F.; Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: part II. Applications; *Earthquake eng. struct. dyn.* vol.25, pp. 727-742, (1996)
- [36] Vamvatsikos, D., Cornell, C. A.; Incremental dynamic analysis; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.31, pp. 491-514, (2002)
- [37] Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L.; *The Finite Element Method*, 5th edition; McGraw-Hill, London, (2001)