

DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE  
IX CICLO  
SEDE AMMINISTRATIVA  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "TOR VERGATA"

**Modellazione elasto-plastica in deformazioni finite  
delle argille tenere:  
Aspetti teorici e computazionali**

Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di  
Dottore di Ricerca in Ingegneria delle Strutture da

**CARLO CALLARI**

Coordinatore del Corso di Dottorato  
PROF. ING. FRANCO MACERI

Tutori del candidato  
PROF. ING. ELIO SACCO  
DOTT. ING. FERDINANDO AURICCHIO

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"  
Dipartimento di Ingegneria Civile  
Febbraio 1997

## Sommario

Nel presente lavoro, la modellazione costitutiva delle argille tenere viene sviluppata nell'ambito della teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa.

Inizialmente sono discusse le formulazioni dei più noti modelli elasto-plastici per le argille: il Cam-clay ed il Cam-clay Modificato. Viene quindi presentata una possibile estensione del Cam-clay Modificato al caso di deformazioni finite.

La formulazione di una procedura implicita per l'integrazione delle equazioni evolutive del modello è sviluppata nell'ambito degli algoritmi di tipo *return mapping*. La procedura e l'operatore tangente ottenuto dalla linearizzazione dell'algoritmo sono implementati in un codice agli elementi finiti.

Al fine di validare il modello e di verificare stabilità ed accuratezza della procedura numerica, i risultati ottenuti dalla simulazione di prove di laboratorio sono discussi e confrontati con dati sperimentali disponibili in letteratura. Si analizza, infine, il caricamento di una fondazione nastriforme.

## Abstract

In the present dissertation, the constitutive modelling of soft clays is developed in the framework of multiplicative elasto-plasticity.

First, the most known elasto-plastic models proposed for clays, i. e. the Cam-clay and the Modified Cam-clay, are discussed. Then, an extension of the Modified Cam-clay to the finite strain regime is presented.

An implicit numerical procedure for the integration of the evolution equations is developed in the framework of return mapping algorithms. The procedure and the tangent elasto-plastic tensor consistent with the algorithm are implemented in a finite element code.

To validate the model and to check the stability and the accuracy of the procedure, numerical simulations of laboratory tests are discussed and compared with experimental data available in literature. Finally, the loading of a strip footing on soft clay is simulated.

Molte persone, anche al di fuori dell'ambito universitario, mi hanno aiutato durante il triennio di dottorato. Un cenno particolare lo devo ai miei tutori (e amici) Elio Sacco e Ferdinando Auricchio. A loro sono profondamente grato.

Ringrazio inoltre il Prof. Franco Maceri, per la fiducia manifestata nei miei confronti e per l'aiuto offertomi in numerose occasioni.

Il Prof. Ruggiero Jappelli ha incoraggiato fin dagli inizi la mia passione per la ricerca; di questo e di molto altro gli sono debitore. Un vivo ringraziamento va anche al Prof. Paolo Podio-Guidugli, per la sua disponibilità ed i suoi preziosi consigli.

Sono estremamente grato a Francesco Federico ed a Luciano Teresi per i loro suggerimenti sulla stesura di alcune parti del lavoro. Inoltre, mi è stato utile discutere gli argomenti della ricerca con Claudio Tamagnini, e gliene sono riconoscente.

Infine, desidero ringraziare i miei genitori, senza il cui sostegno non avrei portato a termine il presente lavoro; a loro lo dedico, con grandissimo affetto.

Roma, febbraio 1997

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>6</b>
1.1	Caratteristiche essenziali del comportamento costitutivo delle argille tenere . . . . .	7
1.2	Obiettivi ed organizzazione della tesi . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Richiami di meccanica dei continui</b>	<b>12</b>
2.1	Introduzione . . . . .	12
2.2	Cinematica . . . . .	13
2.2.1	Deformazioni . . . . .	13
2.2.2	Moti: descrizione materiale e spaziale . . . . .	16
2.3	Equazioni di bilancio e misure di sforzo . . . . .	19
2.4	Obiettività . . . . .	20
2.5	Leggi costitutive iperelastiche . . . . .	21
2.5.1	Equazioni costitutive iperelastiche incrementali . . . . .	22
2.6	Isotropia . . . . .	23
2.6.1	Gruppo di simmetria materiale . . . . .	23
2.6.2	Funzioni isotrope . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Modelli Cam-clay e Cam-clay Modificato</b>	<b>26</b>
3.1	Introduzione . . . . .	26
3.2	Concetti base di meccanica delle terre . . . . .	27
3.3	Relazioni costitutive in compressione isotropa . . . . .	29
3.4	Formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato . . . . .	33
3.5	Alcune modifiche proposte per il modello . . . . .	37
3.6	Limiti dell'ipotesi di deformazioni infinitesime . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Un modello Cam-clay in deformazioni finite</b>	<b>45</b>
4.1	Introduzione . . . . .	45
4.2	La decomposizione moltiplicativa e le sue implicazioni cinematiche . . . . .	48
4.3	Una classe di legami elasto-plastici moltiplicativi . . . . .	49

4.3.1	Forma del criterio di snervamento e del potenziale elastico . . . . .	50
4.3.2	Dissipazione plastica . . . . .	50
4.3.3	Forma delle equazioni evolutive . . . . .	51
4.3.4	Riduzione allo spazio delle direzioni principali . . . . .	52
4.4	Cam-clay Modificato in deformazioni finite . . . . .	53
4.4.1	Legame elastico . . . . .	54
4.4.2	Criterio di snervamento . . . . .	57
4.4.3	Legge di flusso . . . . .	57
4.4.4	Legge di incrudimento . . . . .	58
4.5	Studio del modello . . . . .	58
4.5.1	Relazioni $\check{p} - v$ in compressione isotropa . . . . .	58
4.5.2	Relazione costitutiva incrementale elastica . . . . .	65
4.5.3	I parametri del modello . . . . .	68
4.5.4	Condizioni iniziali . . . . .	70
4.6	Osservazioni su due legami elastici alternativi . . . . .	72
4.6.1	Legame elastico con rigidezza a taglio costante . . . . .	72
4.6.2	Legame elastico definito da tre parametri . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Integrazione del modello</b>	<b>79</b>
5.1	Introduzione . . . . .	79
5.2	Formulazione generale dell'algoritmo . . . . .	82
5.2.1	Stato di tentativo elastico . . . . .	83
5.2.2	Passo di correzione plastica . . . . .	84
5.2.3	Implementazione nello spazio delle direzioni principali . . . . .	85
5.3	Integrazione del Cam-clay . . . . .	86
5.3.1	Algoritmo di return mapping . . . . .	86
5.3.2	Soluzione dell'algoritmo . . . . .	88
5.3.3	Tangente algoritmica . . . . .	89
5.4	Implementazione della procedura numerica . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>94</b>
6.1	Introduzione . . . . .	94
6.2	Simulazione di prove di laboratorio . . . . .	95
6.2.1	Prova di compressione isotropa . . . . .	95
6.2.2	Prove di compressione triassiale . . . . .	95
6.3	Confronto con dati sperimentali . . . . .	99
6.4	Fondazione nastriforme . . . . .	102
	<b>Conclusioni</b>	<b>108</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>118</b>

<b>Appendici:</b>	<b>119</b>
<b>A</b> Calcolo di $R'$	<b>119</b>
<b>B</b> Calcolo della tangente algoritmica	<b>124</b>
<b>C</b> Riepilogo dei coefficienti	<b>132</b>
<b>Notazione</b>	<b>135</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Nell'ambito dell'ingegneria geotecnica, è frequente la distinzione fra gli strumenti matematici impiegati per l'*analisi dello stato deformativo* (cedimenti di fondazioni e rilevati, spostamenti di strutture di sostegno, convergenze di gallerie, ecc.) e quelli utilizzati per l'*analisi delle condizioni di collasso* (carico limite di fondazioni, stabilità di strutture di sostegno, stabilità di pendii, ecc.). Nel primo caso, si ricorre frequentemente alla teoria dell'elasticità lineare (cfr., ad es., [87]); nel secondo, il terreno viene spesso modellato come un continuo rigido-plastico (cfr., ad es., [52]).

La teoria dell'elasticità lineare è sicuramente poco adeguata alla descrizione del comportamento dei geomateriali, anche in un campo tensio-deformativo lontano dalla rottura. Inoltre, se le condizioni di collasso vengono valutate nell'ipotesi di comportamento rigido-plastico (analisi limite, metodo delle caratteristiche, ecc.), è impossibile utilizzare questo risultato per individuare con certezza l'ambito in cui limitare le condizioni di esercizio; infatti la definizione del coefficiente di sicurezza non è in generale univoca e, soprattutto, il valore che questo assume può essere giudicato sufficientemente grande solo sulla base di considerazioni empiriche. A ciò si aggiunge che nel comportamento osservato sperimentalmente, spesso non è facile individuare con chiarezza una condizione definibile come "collasso". E' questo il caso, ad esempio, di fondazioni su sabbie sciolte o su argille tenere; dove, al crescere del carico, non si osserva una brusca accelerazione dei cedimenti, come nel caso di sabbie addensate e di argille consistenti (Fig. 1.1a), ma il loro graduale incremento (Fig. 1.1b). Si tratta della cosiddetta *rottura per punzonamento* [43], difficilmente ricavabile attraverso una schematizzazione rigido-plastica del comportamento del terreno.

Queste considerazioni evidenziano la necessità di disporre di efficaci modelli costitutivi, capaci di simulare in modo accurato il comportamento dei terreni. Purtroppo lo sviluppo e l'uso di tali modelli è stato fortemente rallentato dalle difficoltà connesse alla loro applicazione. Difficoltà legate all'eccessivo onere computazionale (insostenibile fino a non molto tempo fa), ma anche alla non totale attendibilità o, addirittura, indisponibilità delle necessarie valutazioni sui parametri del materiale.

Negli ultimi decenni, il miglioramento delle tecniche sperimentali e dei metodi computazionali è risultato determinante. Si sono compiuti, infatti, significativi progressi nello studio del comportamento meccanico dei terreni e nell'elaborazione di adeguati

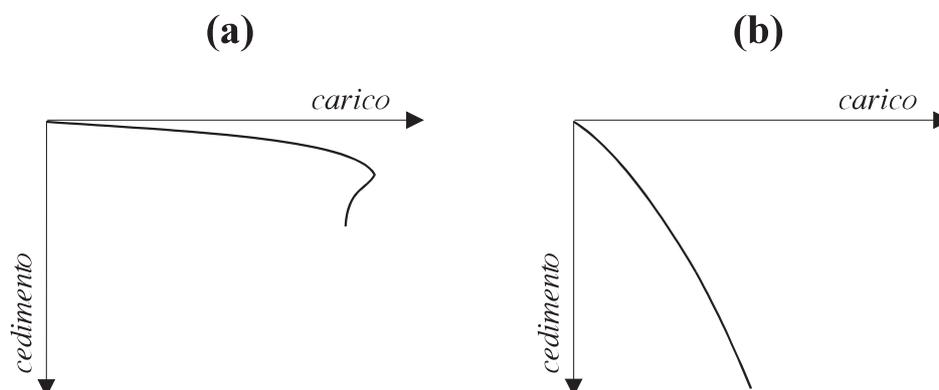


Figura 1.1: Curve carico-cedimenti tipicamente osservate per fondazioni su sabbie addensate, argille consistenti (a) e su sabbie sciolte, argille tenere (b)

modelli costitutivi. Ne risulta una tendenza, ancora nella sua fase iniziale, ad una trattazione unitaria dei diversi aspetti dell'analisi geotecnica; cioè alla scelta di un'unica descrizione matematica del comportamento del materiale da utilizzare nelle diverse verifiche delle scelte progettuali.

Il presente lavoro intende fornire un contributo in questa direzione. I materiali considerati, le argille “tenere” (cioè particolarmente compressibili), sono di notevole interesse ingegneristico; terreni con queste caratteristiche sono infatti estesamente diffusi, e la loro grande deformabilità rende necessaria una particolare attenzione in ambito progettuale.

Si osservi, infine, che molte delle caratteristiche della risposta meccanica di questi materiali sono comuni ad altri terreni, anche non argillosi. Quindi, la modellazione delle argille tenere viene qui considerata anche come un necessario passo in uno studio più generale del comportamento costitutivo dei geomateriali.

## 1.1 Caratteristiche essenziali del comportamento costitutivo delle argille tenere

Lo studio del comportamento dei geomateriali (terreni, rocce, calcestruzzi) e di altri materiali a comportamento coesivo-attribitivo (polveri, materiali ceramici, ghiaccio, ecc.), è oggetto di una crescente attenzione, non solo da parte di ricercatori di formazione geotecnica, ma anche da parte di studiosi provenienti da altri settori della meccanica dei continui. Tali materiali, infatti, svolgono un ruolo fondamentale in numerose applicazioni pratiche; inoltre, l'estrema complessità del loro comportamento costitutivo è ulteriore motivo di interesse.

Tale complessità è evidenziata dalle molteplici caratteristiche osservate nella risposta meccanica:

- comportamento fortemente non lineare ed inelastico, anche per piccoli gradienti di spostamento;

- resistenza a trazione scarsa o nulla;
- dipendenza dalla tensione media, sia in termini di deformabilità che di resistenza;
- dilatanza o contrattanza indotta da azioni deviatoriche;
- sviluppo di deformazioni inelastiche in compressione isotropa;
- accoppiamento fra i processi meccanici ed il moto del fluido presente nei pori;
- frequenti fenomeni di localizzazione delle deformazioni;
- incrudimento o rammollimento volumetrico;
- anisotropia indotta dalla storia tensio-deformativa.

In questa parte introduttiva, si è ritenuto opportuno illustrare brevemente i più importanti aspetti del comportamento meccanico delle argille; per una esauriente trattazione dell'argomento si rimanda ai più noti testi di meccanica delle terre [7, 43, 86, 87].

I risultati di una prova triassiale standard su un campione di argilla, in termini di tensione assiale ( $\sigma_a$ ) e della corrispondente deformazione ( $\varepsilon_a$ ), sono riportati in Fig. 1.2a. Dopo una prima fase di carico (OA), in cui è evidente un comportamento non lineare già per piccoli gradienti di spostamento, si procede allo scarico (ABC). Alla fine di questo percorso si osserva che soltanto una parte della deformazione assiale del provino viene recuperata ( $\varepsilon_{a,rev}$ ). Se si carica nuovamente (CDE), il materiale ripercorre essenzialmente lo stesso tratto di curva corrispondente allo scarico, fino al raggiungimento (E) del massimo valore di tensione assiale sperimentato in precedenza.

Una delle fondamentali caratteristiche del comportamento dei terreni è che una risposta del tutto simile si osserva pure in una prova di compressione isotropa, come è evidenziato nel diagramma pressione ( $p$ ) vs. deformazione volumetrica ( $-\Delta V/V_0$ ) riportato in Fig. 1.2b. Nei terreni, quindi, diversamente dal caso di molti metalli, vi può essere sviluppo di deformazioni irreversibili anche a seguito dell'applicazione di uno stato tensionale sferico.

Si considerino adesso tre provini di argilla il cui stato iniziale sia rappresentato dai punti A, B e C riportati nel diagramma pressione-volume ( $p - V$ ) di Fig. 1.3c. Si osservi, in tale diagramma, che dopo aver compresso fino a  $p = p_{max}$  tutti i provini, i campioni A e B sono stati scaricati fino a diversi valori di pressione. I risultati ottenuti dall'esecuzione di prove triassiali standard drenate sono riportati nel diagramma di Fig. 1.3a (con  $\sigma_r$  ed  $\varepsilon_r$  sono indicate rispettivamente la tensione e la deformazione radiale). Le curve corrispondenti alle prove su A, B e C differiscono notevolmente fra loro; si osserva, quindi, una forte dipendenza dalla tensione media. Nel diagramma di Fig. 1.3b, infine, sono riportati i percorsi di tensione relativi alle suddette prove. Si osserva che i punti rappresentativi della condizione "ultima" dei provini, si dispongono lungo una linea che, con buona approssimazione, può essere interpretata come una retta passante per l'origine. Tale linea, detta *di stato critico* (CSL) [69], non viene superata dai percorsi tensionali dei campioni C ( $p_0 = p_{max}$ : *normal-consolidato*) e B

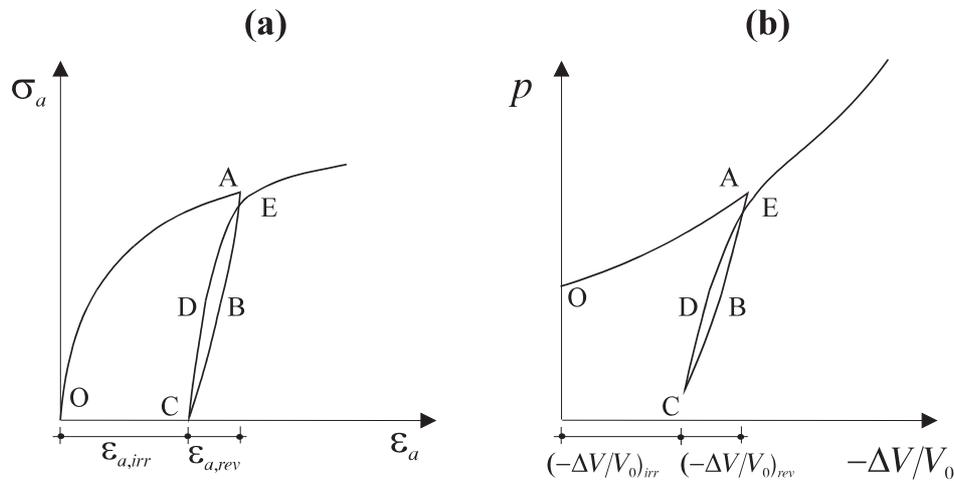


Figura 1.2: Risposta meccanica delle argille. Sviluppo di deformazioni irreversibili in una prova triassiale (a) ed in una prova di compressione isotropa (b)

( $p_0 < p_{\max}$ : *debolmente sovraconsolidato*). Invece, il provino A ( $p_0 \ll p_{\max}$ : *fortemente sovraconsolidato*) perviene allo stato critico manifestando un comportamento rammollente.

In definitiva, dall'osservazione delle principali caratteristiche della risposta meccanica delle argille, si evince che la teoria dell'elasto-plasticità può rappresentare un'efficace strumento per la descrizione costitutiva di questi materiali.

## 1.2 Obiettivi ed organizzazione della tesi

Per la modellazione costitutiva delle argille tenere, si fa qui ricorso ad una teoria dell'elasto-plasticità in deformazioni finite; una scelta, questa, che sembra pienamente giustificata dall'osservazione delle principali caratteristiche della risposta meccanica.

Nonostante ciò, la maggioranza dei modelli elasto-plastici proposti in letteratura per le argille sono formulati nell'ipotesi di deformazioni infinitesime; relativamente pochi sono i casi in cui tale ipotesi semplificativa non è stata adottata. La strada seguita nel presente lavoro, è sembrata quindi poco esplorata e, per questo motivo, degna di attenzione.

In particolare, il modello proposto è basato sulla decomposizione elasto-plastica moltiplicativa del gradiente di deformazione. Per l'integrazione numerica delle equazioni costitutive, è stato sviluppato un algoritmo implicito, di tipo *return mapping*.

In definitiva, il presente lavoro è finalizzato, oltre che ad uno studio delle più note equazioni costitutive proposte per le argille tenere, all'estensione di tali formulazioni al campo delle deformazioni finite, nonché alla loro implementazione in un codice agli elementi finiti.

Si osservi che la complessità del legame costitutivo complica notevolmente quest'ultima fase del lavoro. Il modello proposto è infatti caratterizzato da forte non linearità del legame elastico, accoppiamento volumetrico-deviatorico in campo elastico e plastico,

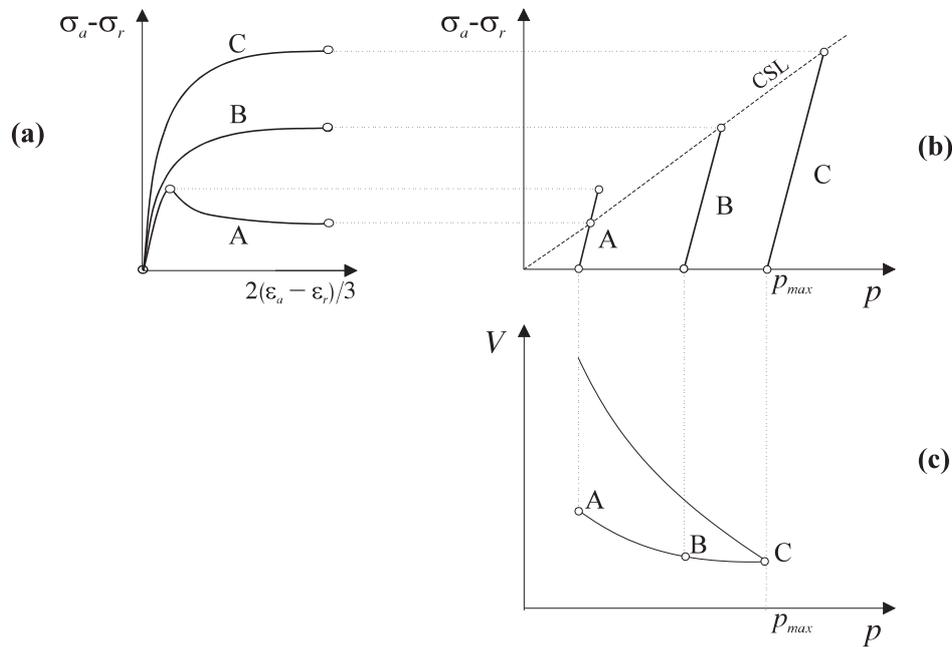


Figura 1.3: Influenza della tensione media sulla risposta meccanica delle argille

dipendenza dalla tensione media e possibilità di comportamento rammollente.

Un gran numero di modelli elasto-plastici sono stati proposti per le argille. Sostanzialmente, tutte queste formulazioni sono considerabili come variazioni, più o meno sofisticate, dei più noti modelli costitutivi per le argille: il Cam-clay ed il Cam-clay Modificato. Nel seguito, dopo aver richiamato gli elementi di meccanica dei continui necessari allo sviluppo del lavoro (Cap. 2), si espone la formulazione dei suddetti modelli (Cap. 3), discutendone le più significative implicazioni.

Particolare attenzione viene dedicata alla modellazione del comportamento in compressione isotropa, che è commentata con riferimento non solo al Cam-clay ed al Cam-clay Modificato, ma anche alle più note formulazioni alternative.

In questo capitolo, si tenta quindi un'esposizione razionale ed un esame critico delle formulazioni costitutive "di base" riguardanti le argille tenere. Tale studio prende in parte spunto dal contributo critico di vari autori, ma è anche basato su considerazioni originali. In particolare, anche grazie ad una più chiara definizione degli aspetti cinematici, si evidenzia come l'ipotesi di deformazioni infinitesime non sia adeguata alla modellazione costitutiva delle argille tenere.

Una possibile estensione del Cam-clay Modificato alle deformazioni finite viene presentata e discussa nel Cap. 4. In questa parte del lavoro, dopo una rassegna dei principali contributi allo studio della plasticità classica in deformazioni finite, si richiama la formulazione generale della classe di legami elasto-plastici moltiplicativi in

cui il modello proposto si inquadra. In particolare, sono valutate le restrizioni imposte dall'assioma di obiettività sulla forma del criterio di snervamento e viene caratterizzata l'evoluzione della funzione di dissipazione plastica; quindi, utilizzando il Principio di Massima Dissipazione Plastica, è ricavata la forma generale delle equazioni evolutive.

Nel modello proposto, il legame elastico è definito assegnando un potenziale che implica la realistica dipendenza di entrambe le rigidità, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media sia dalla componente ottaedrica dello sforzo. Questo risultato è quindi ottenuto, diversamente da altre formulazioni, nell'ambito di un legame iperelastico. Il criterio di snervamento del Cam-clay Modificato, viene esteso al campo delle deformazioni finite, utilizzando il tensore di Kirchhoff come misura di sforzo.

Le principali implicazioni del modello sono discusse e confrontate con quelle derivanti da altre teorie costitutive. E' spiegato il significato fisico dei parametri che figurano nel modello e sono evidenziati alcuni limiti di applicabilità.

Nel Cap. 5, l'integrazione delle equazioni evolutive del modello matematico è effettuata attraverso un algoritmo implicito, di tipo *return mapping*. La soluzione, al generico passo di integrazione, è ottenuta mediante una procedura di tipo Newton-Raphson. Quindi, dalla linearizzazione dell'algoritmo, si ricava l'operatore tangente necessario all'implementazione della procedura in un codice agli elementi finiti.

I risultati numerici sono riportati nel Cap. 6. In particolare, vengono simulate alcune prove di laboratorio ed i risultati ottenuti sono confrontati con i dati sperimentali disponibili in letteratura. Si analizza, successivamente, il caricamento di una fondazione nastriforme. Le simulazioni numeriche sono finalizzate alla validazione del modello proposto ed alla verifica dell'accuratezza e della stabilità dell'algoritmo.

In appendice è riportato il calcolo del gradiente dei residui delle equazioni algoritmiche (App. A) e quello della tangente elasto-plastica algoritmica (App. B). Le espressioni dei coefficienti impiegati in questi calcoli sono riepilogate in App. C. Infine, un elenco completo della notazione impiegata è presente a pag. 135.

# Capitolo 2

## Richiami di meccanica dei continui

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo vengono richiamati alcuni elementi di meccanica dei mezzi continui deformabili che verranno utilizzati in seguito. Per una esauriente trattazione dell'argomento si rimanda ai noti testi di Truesdell e Toupin [89], Truesdell e Noll [88], Gurtin [32], Marsden e Hughes [51].

Per quanto riguarda la notazione (cfr. pag. 135), i campi vettoriali e tensoriali sono indicati con lettere in grassetto; in particolare, si utilizzano lettere maiuscole per i campi materiali e minuscole per quelli spaziali<sup>1</sup>.

Il capitolo è organizzato nella seguente maniera. Le principali misure di deformazione sono introdotte nel par. 2.2.1; si richiamano brevemente alcuni aspetti di fondamentale importanza per lo sviluppo della tesi. In particolare si evidenziano le ipotesi su cui si basa il passaggio dalla teoria non lineare a quella linearizzata; si commenta la decomposizione volumetrico-distorsionale delle misure di deformazione e, infine, si introduce la decomposizione spettrale dei tensori di deformazione.

Le definizioni di velocità e di accelerazione, sia materiali sia spaziali, sono riportate nel par. 2.2.2; si introduce il gradiente di velocità spaziale nonché la sua decomposizione nelle velocità spaziali di deformazione e di rotazione.

Nel par. 2.3, vengono richiamate le equazioni di bilancio in forma locale, sia nella descrizione materiale sia in quella spaziale, e sono introdotte le principali misure di tensione. Si riporta, inoltre, la decomposizione spettrale del tensore di Kirchhoff.

Il concetto di obiettività è brevemente illustrato nel par. 2.4. In particolare, si considerano due derivate obiettive dei tensori degli sforzi: la derivata corotazionale e la derivata di Lie.

La definizione di materiale iperelastico è richiamata nel par. 2.5; sono inoltre considerate, con riferimento a materiali comprimibili, due possibili espressioni della densità di energia di deformazione elastica.

---

<sup>1</sup>Questo tipo di notazione, adottata da numerosi autori, permette di indicare rispettivamente con  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e con  $\boldsymbol{\sigma}$  il tensore di deformazione infinitesima ed il tensore di sforzo di Cauchy; si segue, quindi, la prassi ingegneristica.

Le equazioni costitutive iperelastiche in forma incrementale ed i tensori di elasticità materiale e spaziale, sono introdotti nel par. 2.5.1.

Nel par. 2.6.1, si richiama brevemente la nozione di gruppo di simmetria materiale; quindi si accenna, limitatamente a quanto di interesse nel presente lavoro, al problema di classificazione ed alle conseguenze del teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope (par. 2.6.2).

## 2.2 Cinematica

### 2.2.1 Deformazioni

Si identifichi la *configurazione di riferimento* di un corpo continuo con la chiusura di un insieme aperto  $\mathcal{B} \subset R^3$  e si indichi con  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  la posizione del suo generico *punto materiale*. Una *deformazione* è un'applicazione  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow R^3$  continua, iniettiva e regolare. Tale applicazione fornisce la *posizione*  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$  del punto materiale nella *configurazione corrente* del corpo  $\mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B})$ .

Il *gradiente della deformazione* è il tensore:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.1)$$

La condizione di invertibilità locale della deformazione assicura che durante il moto non avvengano compenetrazioni di materia; essa implica la non singolarità del determinante jacobiano  $J$  di  $\varphi$  [32]:

$$J := \det \left[ \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right] = \det [\mathbf{F}(\mathbf{X})] \neq 0 \quad (2.2)$$

Nella configurazione di riferimento è  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ , quindi  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ ; ciò, unitamente alla (2.2) ed alla continuità della deformazione, implica:

$$J = \det [\mathbf{F}(\mathbf{X})] > 0 \quad (2.3)$$

da cui si ricava che  $\mathbf{F} \in Lin^+$ .

Il teorema di decomposizione polare consente di rappresentare il gradiente della deformazione come:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{R} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (2.4)$$

dove:

$$\mathbf{U} := (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{\frac{1}{2}} \in Sym^+ \quad \text{tensore } \textit{destro} \text{ di allungamento} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Z} := (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{\frac{1}{2}} \in Sym^+ \quad \text{tensore } \textit{sinistro} \text{ di allungamento} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R} \in Orth^+ \quad \text{tensore } \textit{rotazione} \quad (2.7)$$

Si definiscono i tensori della deformazione di *Cauchy-Green destro*  $\mathbf{C} \in Sym^+$  e *sinistro*  $\mathbf{b} \in Sym^+$ :

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{Z}^2 \quad (2.9)$$

Lo *spostamento* associato alla deformazione  $\varphi$  è l'applicazione  $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$  definita come:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) := \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (2.10)$$

il suo gradiente è pertanto:

$$D\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.11)$$

Dalla precedente espressione, impiegando le (2.8-2.9), si ricava:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + D\mathbf{u}^T D\mathbf{u} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + D\mathbf{u}D\mathbf{u}^T \quad (2.13)$$

dove compare il *tensore di deformazione infinitesima*  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \text{Sym}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \text{sym}(D\mathbf{u}) \quad (2.14)$$

Il *tensore di deformazione di Green-Lagrange* è definito come:

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.15)$$

dalla (2.12) si ha:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}D\mathbf{u}^T D\mathbf{u} \quad (2.16)$$

Le formule (2.12, 2.13, 2.16) mostrano che il tensore di deformazione infinitesima non può rappresentare una misura esatta di deformazione. In particolari condizioni, tuttavia,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  costituisce una efficace misura di deformazione. Per caratterizzare tali condizioni, si introduca il parametro:

$$\omega := \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| = \|D\mathbf{u}\| \quad (2.17)$$

e si consideri, ad esempio, la (2.16); questa può essere scritta come:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{O}(\omega^2) \quad (2.18)$$

dove con  $\mathbf{O}(\omega^2)$  si è indicato un infinitesimo di ordine superiore ad  $\omega$ . Pertanto  $\boldsymbol{\varepsilon}$  rappresenta l'*approssimazione lineare* della misura esatta di deformazione  $\mathbf{G}$ . Supporre che tale approssimazione sia sufficiente:

$$\mathbf{G} \cong \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.19)$$

equivale a considerare trascurabile la quantità  $\mathbf{O}(\omega^2)$ , cioè a giudicare “piccolo” [32] il gradiente degli spostamenti. Quando tale approssimazione viene considerata accettabile, la corrispondente deformazione  $\varphi$  viene spesso indicata come *infinitesima*.

### Deformazione volumetrica

Si prova che  $J = \det [\mathbf{F}(\mathbf{X})]$  rappresenta la *misura del volume corrente* per unità di volume nella configurazione di riferimento [32]. Si ha quindi che la *deformazione volumetrica*, definita come la variazione di volume per unità di volume nella configurazione di riferimento è data dalla:

$$E_v := \frac{V - V_0}{V_0} = J - 1 \quad (2.20)$$

dove  $V$  e  $V_0$  sono, rispettivamente, il volume corrente ed il volume misurato nella configurazione di riferimento. Nell'ipotesi di deformazioni infinitesime si prova che la deformazione volumetrica può essere valutata come:

$$E_v := \frac{V - V_0}{V_0} \cong \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \varepsilon_v \quad (2.21)$$

### Decomposizione “volumetrico-distorsionale”

Si indichi con  $\bar{\mathbf{F}}$  la parte *isocora* del gradiente di deformazione, cioè la parte che lascia inalterato il volume di  $\mathcal{B}$ . Poiché deve essere  $\det [\bar{\mathbf{F}}] = 1$ , questo tensore può essere definito come:

$$\bar{\mathbf{F}} := J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (2.22)$$

Si può allora considerare la seguente decomposizione “volumetrico-distorsionale” del gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}} \quad \text{con} \quad \det [\bar{\mathbf{F}}] = 1 \quad (2.23)$$

Dalla posizione (2.22) si ha:

$$\bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \det [\bar{\mathbf{C}}] = 1 \quad (2.24)$$

$$\bar{\mathbf{b}} := \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \det [\bar{\mathbf{b}}] = 1 \quad (2.25)$$

Come è noto, nell'ambito della teoria linearizzata, cioè della teoria formulata nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, il tensore di deformazione infinitesima  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è decomposto nelle sue parti *volumetrica* e *deviatorica* secondo la seguente formula additiva:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.26)$$

### Decomposizione spettrale dei tensori di deformazione

Poiché il tensore di Cauchy-Green destro  $\mathbf{C}$  è simmetrico e definito positivo, per il teorema di decomposizione spettrale si ha:

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (2.27)$$

$$\|\mathbf{N}_A\| = 1 \quad \lambda_A \in R^+$$

dove  $(\lambda_A^2, \mathbf{N}_A)$  sono le autocopie di  $\mathbf{C}$ ; si ha quindi:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}_A = \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \quad (A = 1, 2, 3) \quad (2.28)$$

La base  $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$  in  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  viene di solito indicata come *lagrangiana*.

Analogamente per il tensore di Cauchy-Green sinistro  $\mathbf{b}$  si ha:

$$\mathbf{b} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad \|\mathbf{n}_A\| = 1 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{b}\mathbf{n}_A = \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \quad (A = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

Si suole indicare la base  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  in  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in \mathcal{S}$  come *euleriana*.

Si ha inoltre:

$$\mathbf{F}\mathbf{N}_A = \lambda_A \mathbf{n}_A \quad A = 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

e quindi:

$$\mathbf{F} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (2.32)$$

La terna  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  è detta degli *allungamenti principali*. Infatti, come è espresso dalla (2.31), una fibra materiale di lunghezza unitaria, distesa lungo la direzione principale  $\mathbf{N}_A$  nella configurazione di riferimento, assume lunghezza  $\lambda_A$  e giacitura  $\mathbf{n}_A$  nella configurazione deformata secondo  $\varphi$ :

$$(\mathbf{X}, \mathbf{N}_A) \mapsto (\varphi(\mathbf{X}), \lambda_A \mathbf{n}_A) \quad (2.33)$$

Si osservi, infine, che le decomposizioni spettrali delle parti isocore dei tensori di Cauchy-Green sinistro  $\bar{\mathbf{b}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{b}$  e destro  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}$  assumono, rispettivamente, le seguenti forme:

$$\bar{\mathbf{b}} = \sum_{A=1}^3 \bar{\lambda}_A^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (2.34)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \bar{\lambda}_A^2 \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (2.35)$$

dove:

$$\bar{\lambda}_A := J^{-\frac{1}{3}} \lambda_A \quad A = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

### 2.2.2 Moti: descrizione materiale e spaziale

Si definisce *moto* di  $\mathcal{B}$  l'applicazione continua iniettiva e regolare  $\phi_t : \mathcal{B} \times R \longrightarrow R^3$  che associa ad ogni valore del parametro scalare tempo una configurazione deformata  $\mathcal{S}_t$ . La posizione occupata dal punto materiale  $\mathbf{X}$  all'istante  $t$  è quindi:

$$\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}) \quad (2.37)$$

Fissato  $\hat{\mathbf{X}} \in \mathcal{B}$ , l'applicazione:

$$[0, T] \ni t \mapsto \phi_t(\hat{\mathbf{X}}) \quad (2.38)$$

è detta *traiettoria* del punto materiale  $\hat{\mathbf{X}}$  nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ .

Ad ogni istante  $t$ , dato un generico punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_t$  è possibile risalire alla posizione del corrispondente punto materiale  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  invertendo la (2.37):

$$\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

Campi scalari, vettoriali e tensoriali possono essere definiti rispetto alla configurazione di riferimento o alla generica configurazione corrente. Nel primo caso i campi vengono detti *materiali*, nel secondo *spaziali*. E' sempre possibile passare da una descrizione materiale ad una spaziale, mediante la (2.37), o viceversa, per mezzo della (2.39). La *velocità materiale* e l'*accelerazione materiale* sono definite, rispettivamente, come:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t^2} \quad (2.41)$$

La descrizione spaziale può essere ottenuta da quella materiale cambiando la variabile indipendente. In questo modo, ad ogni istante  $t$  la *velocità spaziale* e l'*accelerazione spaziale* sono definite, rispettivamente, come:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{V}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{A}(\phi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad (2.43)$$

l'inversione di queste relazioni fornisce:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{a}(\phi_t(\mathbf{X}), t) \quad (2.45)$$

Si valuti adesso l'accelerazione spaziale in termini di velocità spaziale; dalla (2.41) e dalla (2.44) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)] = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right]_{\mathbf{x}=\phi_t(\mathbf{X})}$$

Inoltre, dalla (2.45), si ha:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = [\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\phi_t(\mathbf{X})}$$

la relazione cercata è allora:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.46)$$

Si osserva che l'accelerazione spaziale *non* coincide con la derivata temporale della velocità spaziale.

La derivata temporale del gradiente di deformazione coincide con il *gradiente di velocità materiale*  $D[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)]$ ; infatti:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [D\phi_t(\mathbf{X})] = D \left[ \frac{\partial \phi_t(\mathbf{X})}{\partial t} \right] = D[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)] \quad (2.47)$$

Si ha inoltre, dalla (2.44):

$$\begin{aligned} D[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)] &= D[\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)] = \nabla[\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)] D[\phi_t(\mathbf{X})] = \\ &= \nabla[\mathbf{v}(\phi_t(\mathbf{X}), t)] \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Le (2.47 - 2.48) riscritte in forma compatta e combinate fra loro forniscono:

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \quad \text{per } \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}) \quad (2.49)$$

In questa equazione si può esplicitare il *gradiente di velocità spaziale*:

$$\mathbf{l} := \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.50)$$

la cui parte simmetrica è detta *velocità spaziale di deformazione*:

$$\mathbf{d} := \text{sym}(\nabla \mathbf{v}) \quad (2.51)$$

mentre quella antisimmetrica è chiamata *velocità spaziale di rotazione* ("spin tensor"):

$$\mathbf{w} := \text{skw}(\nabla \mathbf{v}) \quad (2.52)$$

Tenendo conto della (2.49), è possibile calcolare la derivata temporale del tensore di Cauchy-Green destro:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T \left[ (\nabla \mathbf{v})^T + \nabla \mathbf{v} \right] \mathbf{F}$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \quad (2.53)$$

Il tensore  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}$  è spesso indicato come *velocità materiale di deformazione*.

## 2.3 Equazioni di bilancio e misure di sforzo

Le equazioni di bilancio in forma locale sono qui richiamate con riferimento alle due possibili descrizioni del moto.

### Descrizione materiale

Si indichi con  $\partial\mathcal{B}$  la frontiera di  $\mathcal{B}$  e siano date  $\partial_\varphi\mathcal{B}, \partial_t\mathcal{B} \subset \partial\mathcal{B}$  tali che  $\partial_\varphi\mathcal{B} \cap \partial_t\mathcal{B} = \emptyset$  e che  $\partial_\varphi\mathcal{B} \cup \partial_t\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}$ . Siano assegnate le deformazioni:

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{su } \partial_\varphi\mathcal{B} \quad (2.54)$$

e le forze di superficie:

$$\mathbf{t}^N = \bar{\mathbf{t}}^N \quad \text{su } \partial_t\mathcal{B} \quad (2.55)$$

Le equazioni del moto sono espresse dalle:

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{P} + \varrho_0 \mathbf{B} &= \varrho_0 \mathbf{A} & \text{in } \mathcal{B} \\ \mathbf{P} \mathbf{N} &= \bar{\mathbf{t}}^N & \text{su } \partial_t\mathcal{B} \end{aligned} \quad (2.56)$$

dove  $\varrho_0 : \mathcal{B} \rightarrow R$  è la densità nella configurazione di riferimento,  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$  la forza di volume,  $\mathbf{N}(\mathbf{X})$  la normale a  $\partial_t\mathcal{B}$  e  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$  il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff.

### Descrizione spaziale

Le equazioni di bilancio sono:

$$\begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{b}_t &= \varrho \mathbf{a} & \text{in } \mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B}) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}^n & \text{su } \partial_t\mathcal{S} = \varphi(\partial_t\mathcal{B}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove:  $\varrho = (J^{-1}\varrho_0) \circ \varphi^{-1}$  è la densità nella configurazione corrente;  $\mathbf{b}_t = J^{-1}\mathbf{B}$  e  $\bar{\mathbf{t}}^n = \bar{\mathbf{t}}^N \circ \varphi^{-1}$  sono, rispettivamente, le forze di volume e di superficie riferite ad  $\mathcal{S}$ ;  $\mathbf{n}$  è la normale a  $\partial_t\mathcal{S}$ ;  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}$  è il tensore degli sforzi di Cauchy. Si prova che:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.58)$$

Il tensore degli sforzi di Kirchhoff ed il secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff sono definiti, rispettivamente, come:

$$\boldsymbol{\tau} := J\boldsymbol{\sigma} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.60)$$

dalla (2.58) si ha  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$  e quindi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.61)$$

I tensori degli sforzi qui considerati sono coniugati ai corrispondenti tensori di velocità di deformazione attraverso le seguenti relazioni:

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} \quad (2.62)$$

### Decomposizione spettrale del tensore di Kirchhoff

Il tensore di Kirchhoff è simmetrico. Nell'ambito del presente lavoro, si farà spesso ricorso alla sua decomposizione spettrale:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \bar{\mathbf{n}}_A \otimes \bar{\mathbf{n}}_A \quad \|\bar{\mathbf{n}}_A\| = 1 \quad (2.63)$$

## 2.4 Obiettività

Due moti  $\phi_t$  ed  $\phi_t^+$  differiscono solo per un cambiamento di osservatore se:

$$\phi_t^+(\mathbf{X}) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t) [\phi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{o}] \quad (2.64)$$

dove  $\mathbf{o}$  e  $\mathbf{q}(t)$  appartengono a  $\mathcal{V}$ , e  $\mathbf{Q}(t) \in Orth$ . La (2.64) corrisponde ad una *trasformazione rigida*.

Un vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  si dice *obiettivo* se in un cambiamento di osservatore, ad ogni fissato istante, si ha  $\mathbf{v}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{v}$ ; ne segue che un tensore  $\mathbf{T} \in Lin$  è obiettivo se  $\mathbf{T}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ .

Per effetto di un cambiamento di osservatore, alcune delle grandezze richiamate nei paragrafi precedenti si trasformano nella seguente maniera [32]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{F} & (2.65) \\ \mathbf{l}^+ &:= \nabla^+ \mathbf{v}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{d}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{w}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{w}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \end{aligned}$$

Si nota che la velocità di deformazione è obiettiva, mentre non lo sono le altre grandezze.

Poiché è ragionevole supporre che le forze di contatto dipendano solo dalla posizione relativa dei punti del corpo, si assume che il vettore tensione sia obiettivo. Da tale assunto si ricava l'obiettività del tensore degli sforzi di Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , ma non si ricava l'obiettività della derivata temporale  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  dello stesso tensore.

In letteratura è stato proposto un grande numero di derivate obgettive dei tensori degli sforzi; qui ci si limita a richiamare la *derivata di Jaumann* o *derivata corrotazionale*:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} := \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} \quad (2.66)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} := \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{w} \quad (2.67)$$

e la *derivata di Lie* del tensore di Kirchhoff [51]:

$$\begin{aligned} L_v \boldsymbol{\tau} &:= \left\{ \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1} (\boldsymbol{\tau} \circ \varphi) \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{F}^T \right\} \circ \varphi^{-1} & (2.68) \\ &= \left\{ \mathbf{F} \dot{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}^T \right\} \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

che, in termini di derivata temporale di  $\boldsymbol{\tau}$  e di gradiente della velocità spaziale  $\mathbf{l}$ , diventa:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^T \quad (2.69)$$

## 2.5 Leggi costitutive iperelastiche

Un materiale si dice *iperelastico* quando la relazione costitutiva fra il primo tensore di Piola-Kirchhoff ed il gradiente della deformazione è data come [32]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.70)$$

dove la funzione scalare  $W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) : \mathcal{B} \times Lin \rightarrow R$  è detta *densità di energia di deformazione elastica*.

Il secondo principio della termodinamica, formulato nell'ambito di una teoria puramente meccanica, impone che in ogni processo deformativo chiuso il lavoro sia non-negativo. Si dimostra che questa condizione è rispettata dalla classe dei materiali iperelastici [32]; in particolare, per un materiale iperelastico il lavoro è *nullo* in ogni processo deformativo chiuso.

Secondo l'*Assioma di Obiettività*, la risposta meccanica di un corpo alla deformazione è obiettiva. Anche questo principio esclude certe dipendenze costitutive e fornisce una parziale rappresentazione delle dipendenze lecite. Ad esempio si dimostra che la densità di energia di deformazione elastica non può dipendere direttamente dalla deformazione, ma solo dal suo gradiente.

Inoltre, per l'Assioma di Obiettività deve essere (cfr. 2.65<sub>1</sub>):

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in Orth \quad (2.71)$$

da questa condizione si ricava che esiste una funzione  $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) : \mathcal{B} \times Sym^+ \rightarrow R$  tale che:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad (2.72)$$

Dalla (2.70) e dalla (2.72) si ottengono le seguenti *equazioni costitutive iperelastiche*:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (2.73)$$

### Materiali iperelastici comprimibili

Nel seguito del presente lavoro sarà utile fare riferimento a due particolari espressioni della densità di energia elastica.

Si consideri la seguente espressione dell'energia di deformazione [51]:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = h(\mathbf{X}, \det[\mathbf{F}]) \quad (2.74)$$

dove è  $h : \mathcal{B} \times R^+ \rightarrow R$ . L'espressione del primo tensore di Piola-Kirchhoff si ricava applicando la (2.70):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial h(\mathbf{X}, J)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial h}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \\ &= \frac{\partial h}{\partial J} J \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.75)$$

dalla (2.58) si ricava l'espressione del tensore di Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{J}} \mathbf{I} \quad (2.76)$$

si ha quindi che la *tensione media* di Cauchy è data come:

$$p := \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial h}{\partial J} \quad (2.77)$$

Si consideri ora quest'altra espressione della densità di energia di deformazione [20]:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = h(\mathbf{X}, J) + g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{F}}) \quad (2.78)$$

dove  $h : \mathcal{B} \times R^+ \rightarrow R$  è una funzione convessa tale che:

$$h(\mathbf{X}, 1) = \frac{\partial h}{\partial J}(\mathbf{X}, 1) = 0 \quad (2.79)$$

e dove  $g : \mathcal{B} \times \text{Lin} \rightarrow R$  è una funzione di  $\bar{\mathbf{F}} := J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$  (cfr. par. 2.2.1) tale che:

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{I}) = \frac{\partial g}{\partial \bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, \mathbf{I}) = 0 \quad (2.80)$$

Si ha quindi che  $h(J)$  è la parte di energia determinata dalla variazione di volume, mentre  $g(\bar{\mathbf{F}})$  è il contributo energetico della componente distorsionale della deformazione<sup>2</sup>.

### 2.5.1 Equazioni costitutive iperelastiche incrementali

Si derivi la (2.73<sub>3</sub>) rispetto al tempo; si ottiene:

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbb{C} \dot{\mathbf{C}} \quad (2.81)$$

Il *tensore di elasticità materiale*  $\mathbb{C} \in \text{Lin}$  è quindi dato come:

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \quad (2.82)$$

Si indichi con  $\{X_A\}_{A=1,2,3}$  un sistema di assi cartesiani nella configurazione di riferimento e con  $\{x_a\}_{a=1,2,3}$  la terna corrispondente secondo  $\varphi$ , nella configurazione corrente. La relazione (2.68) fra  $L_v \boldsymbol{\tau}$  e  $\dot{\mathbf{S}}$ , unitamente all'espressione di  $\dot{\mathbf{C}}$  data nella (2.53) ed all'equazione incrementale (2.81), fornisce:

$$(L_v \boldsymbol{\tau})_{ab} = [F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\mathbb{C})_{ABCD}] d_{cd}$$

dove si individua il *tensore di elasticità spaziale*  $\mathbf{c} \in \text{Lin}$ , di componenti:

$$c_{abcd} \circ \varphi = F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} (\mathbb{C})_{ABCD} \quad (2.83)$$

Si ha pertanto la seguente *equazione costitutiva incrementale iperelastica*:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} \mathbf{d} \quad (2.84)$$

Un legame costitutivo si dice *ipoelastico* se è definito per mezzo di equazioni incrementali non integrabili, cioè non ricavabili come derivate di un potenziale. Si dimostra che i materiali ipoelastici sono, in generale, non conservativi [88].

<sup>2</sup>Le condizioni di esistenza della soluzione del problema di equilibrio associato a questa espressione dell'energia di deformazione sono discusse in [20].

## 2.6 Isotropia

La risposta costitutiva di un materiale può mostrarsi invariante sotto alcuni moti rigidi della configurazione di riferimento; i principali aspetti della caratterizzazione matematica di questa proprietà sono richiamati nel seguente paragrafo.

### 2.6.1 Gruppo di simmetria materiale

Sia  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  un punto nella configurazione di riferimento di un corpo elastico. Si consideri un moto rigido di  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} \ni \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^+ = \Psi(\mathbf{X}) := \mathbf{q} + \mathbf{Q}\mathbf{X} \quad \mathbf{Q} \in Orth^+ \quad (2.85)$$

si ha che  $\varphi^+ \circ \Psi = \varphi$ , cioè:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi^+(\mathbf{q} + \mathbf{Q}\mathbf{X}) \quad (2.86)$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T \quad (2.87)$$

la trasformazione per il tensore di Cauchy-Green destro è quindi:

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T \quad (2.88)$$

In generale, i valori assunti dall'energia di deformazione elastica in  $\mathbf{X}$  ed in  $\mathbf{X}^+$  sono diversi. Si definisce *gruppo di simmetria materiale* in  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  l'insieme degli operatori ortogonali rispetto ai quali l'energia di deformazione è invariante:

$$G_{\mathbf{X}} := \{\mathbf{Q} \in Orth^+ \mid \bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})\} \quad (2.89)$$

Il gruppo di simmetria materiale è definito *localmente* (in un punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ) a meno che il materiale non sia *omogeneo*, cioè sia  $\bar{W}$  indipendente da  $\mathbf{X}$ .

Nella definizione (2.89) si è limitata ad  $Orth^+$  la scelta degli elementi di  $G_{\mathbf{X}}$ ; in effetti ha senso, come si vedrà più avanti, definire un gruppo *esteso* di simmetria materiale come:

$$G_{\mathbf{X}} := \{\mathbf{H} \in Uni \mid W(\mathbf{X}, \mathbf{F}\mathbf{H}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{F})\}$$

dove *Uni* è il *gruppo dei tensori unimodulari*:

$$Uni := \{\mathbf{H} \in Lin^+ \mid \det[\mathbf{H}] = 1\}$$

### Problema di classificazione

Data una funzione densità di energia di deformazione, si *classifica* il materiale che la data funzione descrive in base alle caratteristiche del gruppo di simmetria materiale.

Si consideri una funzione energia di deformazione elastica del tipo (2.74):

$$W(\mathbf{F}) = h(J) \quad (2.90)$$

Si osserva che per un materiale caratterizzato da questa espressione dell'energia di deformazione, la risposta è invariante sotto qualsiasi trasformazione che non produca variazioni di volume; si ha quindi:

$$G_{\mathbf{X}} \equiv Uni \quad (2.91)$$

questo gruppo di simmetria materiale è proprio dei *fluidi*. Mentre per i *solidi* si ha:

$$G_{\mathbf{X}} \subset Orth^+ \quad (2.92)$$

questi si distinguono a loro volta in solidi *isotropi*, per i quali è  $G_{\mathbf{X}} \equiv Orth^+$ , ed *anisotropi*, per i quali è  $G_{\mathbf{X}} \subset\subset Orth^+$ .

All'interno dei fluidi, la distinzione tra *liquidi* e *gas* non può essere fatta sulla base della nozione di gruppo di simmetria materiale. Per effettuare questa classificazione si può analizzare il comportamento del fluido sotto *deformazioni estreme* [65]. Ha infatti senso fisico supporre che se il volume si espande indefinitamente, l'energia di deformazione di un liquido cresce (si pensi al fenomeno della cavitazione), mentre quella di un gas tende a zero. Si ha quindi:

$$\begin{array}{ll} \text{liquidi:} & J \rightarrow \infty \Rightarrow h(J) \rightarrow \infty \\ \text{gas:} & J \rightarrow \infty \Rightarrow h(J) \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.93)$$

Tale classificazione si rivelerà utile nel presente lavoro (cfr. par. 4.5.1).

## 2.6.2 Funzioni isotrope

La condizione di risposta isotropa pone forti restrizioni sulla forma ammissibile per la funzione energia di deformazione elastica. Qui, come nel resto del capitolo, ci si limita a richiamare quegli elementi che saranno utilizzati in seguito.

Una funzione  $\Sigma(\mathbf{K}) : Sym \rightarrow R$  si dice *isotropa* se e solo se:

$$\Sigma(\mathbf{QHQ}^T) = \Sigma(\mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{Q} \in Orth \quad (2.94)$$

Secondo il *teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope*, una funzione  $\Sigma(\mathbf{K}) : Sym \rightarrow R$  è isotropa se e soltanto se  $\Sigma(\mathbf{K})$  è funzione dei soli invarianti di  $\mathbf{K} \in Sym$ ; cioè se e soltanto se esiste una funzione  $\tilde{\Sigma} : R^3 \rightarrow R$  tale che:

$$\Sigma(\mathbf{K}) = \tilde{\Sigma}(I_{\mathbf{K}}, II_{\mathbf{K}}, III_{\mathbf{K}}) \quad \forall \mathbf{K} \in Sym \quad (2.95)$$

dove  $I_{\mathbf{K}} := \text{tr}\mathbf{K}$ ,  $II_{\mathbf{K}} := \frac{1}{2}(I_{\mathbf{K}}^2 - \text{tr}\mathbf{K}^2)$ ,  $III_{\mathbf{K}} := \det(\mathbf{K})$  sono gli invarianti principali di  $\mathbf{K}$ .

Pertanto un materiale iperelastico è isotropo se e soltanto se l'energia di deformazione elastica  $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$  è funzione dei soli invarianti di  $\mathbf{C}$ ; cioè se esiste  $\tilde{W} : \mathcal{B} \times R^3 \rightarrow R$  tale che:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \tilde{W}(\mathbf{X}, I_1, I_2, I_3) \quad (2.96)$$

dove  $I_1 := \text{tr}\mathbf{C}$ ,  $I_2 := \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2)$ ,  $I_3 := \det(\mathbf{C})$ .

Si prova che se  $\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) : \mathcal{B} \times Lin \rightarrow R$  è isotropa, è allora possibile esprimere l'energia di deformazione elastica in funzione degli allungamenti principali  $\lambda_A$ ; cioè esiste una funzione  $\acute{W}(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \mathcal{B} \times R^3 \rightarrow R$  tale che [57]:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \acute{W}(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.97)$$

Ovviamente,  $\acute{W}$  deve soddisfare il seguente requisito di simmetria:

$$\acute{W}(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \acute{W}(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) = \acute{W}(\mathbf{X}, \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)$$

Nel caso di risposta isotropa, e soltanto in questo caso, l'energia di deformazione dipende dal moto attraverso il tensore di Cauchy-Green sinistro  $\mathbf{b}$  [19]; cioè esiste una funzione  $\check{W} : \mathcal{B} \times Sym^+ \rightarrow R$  tale che:

$$\bar{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \check{W}(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \quad (2.98)$$

Infine, se il legame costitutivo è isotropo, si verifica che gli autovettori  $\{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3\}$  del tensore degli sforzi di Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  (2.63) sono coincidenti con la base euleriana  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  in  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in \mathcal{S}$  (2.29).

# Capitolo 3

## Modelli Cam-clay e Cam-clay Modificato

### 3.1 Introduzione

L'esame delle principali caratteristiche della risposta meccanica dei geomateriali evidenzia come un'efficace descrizione costitutiva può essere basata sulla teoria dell'elasto-plasticità. Infatti, alla teoria della plasticità si fa spesso ricorso, non solo per l'elaborazione di sofisticati modelli costitutivi, ma anche per la soluzione dei più semplici e frequenti problemi di ingegneria geotecnica (carico limite di fondazioni, stabilità di strutture di sostegno, stabilità di pendii, ecc.).

Le prime applicazioni della teoria della plasticità allo studio dei problemi geomeccanici si fanno spesso risalire a più di un secolo fa, cioè ai lavori di Coulomb [22] e di Rankine [66]. Eppure, lo sviluppo di modelli elasto-plastici capaci di prevedere realisticamente il comportamento dei terreni è relativamente recente, ed è quindi posteriore al raggiungimento di una efficace modellazione costitutiva dei metalli. Questo ritardo è giustificato dalla notevole complessità del comportamento dei geomateriali nonché dal fatto che soltanto a partire dai decenni '30-'40 sono state messe a punto tecniche di sperimentazione realmente affidabili.

Nell'ambito della modellazione elasto-plastica dei geomateriali, si può tenere conto dell'influenza della tensione media imponendo che le dimensioni della sezione deviatorica della superficie di snervamento aumentino percorrendo l'asse idrostatico nel verso della compressione. Superfici di questo tipo (indicate, a volte, come "superfici di tipo conico") sono quelle proposte da Drucker e Prager [28] (criterio di Drucker-Prager), da Drucker [26] (criterio di Tresca modificato) e da Shield [71] (criterio di Mohr-Coulomb).

Questi criteri di snervamento non consentono di modellare lo sviluppo di deformazione inelastica in compressione isotropa; inoltre, se formulati con legge di flusso associata, sovrastimano in misura non trascurabile il comportamento dilatante dei terreni.

Per ovviare alla prima di queste carenze, in [27] viene proposto un criterio di snervamento rappresentato da una superficie conica la cui apertura lungo l'asse idrostatico viene chiusa mediante un'altra superficie ("Cap-model").

Il modello costitutivo Cam-clay, sviluppato a Cambridge negli anni '60 [68], risolve anche il problema dell'incompatibilità fra l'ipotesi di normalità del flusso plastico ed il reale comportamento dei terreni. In questo modello, infatti, viene effettuata un'importante distinzione tra la superficie di snervamento e la superficie che caratterizza la condizione "ultima" del materiale; quest'ultima superficie, detta critica, è di tipo conico e rappresenta il luogo degli stati tensionali caratterizzati dallo sviluppo di deformazione plastica a componente volumetrica nulla.

Al fine di migliorarne ulteriormente l'accordo con i dati sperimentali e di estenderne il campo di applicabilità, sono state proposte numerose modifiche alla formulazione originale del Cam-clay. In particolare, il "Cam-clay Modificato" proposto da Roscoe e Burland [67] è preferibile al modello originale.

Il Cam-clay Modificato si è mostrato sufficientemente accurato nel descrivere il comportamento di argille normal-consolidate o debolmente sovraconsolidate in condizioni di carico quasi-statiche e monotone [93]. Tale modello è stato impiegato con profitto per l'analisi di svariati problemi geotecnici, come, ad esempio, quelli relativi a serbatoi o rilevati fondati su argille (una delle prime applicazioni di questo tipo è riportata in [90]). Inoltre il suo impiego richiede la determinazione di pochi parametri, ricavabili per mezzo di prove standard di laboratorio. Queste caratteristiche ne giustificano la sua frequente utilizzazione, sia in ambito di ricerca che nelle pratiche applicazioni.

Il legame elastico e la legge di incrudimento del Cam-clay e del Cam-clay Modificato sono ricavati sulla base di alcune fondamentali ipotesi riguardanti il comportamento delle argille isotropicamente compresse. Queste ipotesi sono riassunte nel par. 3.3, insieme ad alcune considerazioni sulle loro principali implicazioni. Vengono quindi discusse le formulazioni dei modelli costitutivi Cam-clay e Cam-clay Modificato (par. 3.4). Si accenna, inoltre, ad alcune modifiche proposte per tali formulazioni, con particolare attenzione verso quelle relative alla modellazione della rigidità elastica a taglio e del comportamento in compressione isotropa (par. 3.5). Infine, nel par. 3.6, si evidenzia come l'ipotesi di deformazioni infinitesime non sia adeguata alla modellazione costitutiva delle argille tenere.

Il capitolo si apre con un essenziale richiamo di alcuni concetti elementari della meccanica delle terre.

## 3.2 Concetti base di meccanica delle terre

Si richiamano, in questo paragrafo, alcuni degli elementi di meccanica delle terre utilizzati in seguito; altri concetti verranno introdotti nel corso del lavoro. Per una esauriente trattazione dell'argomento, si rimanda ai noti testi di Terzaghi [87], Taylor [86], Lambe e Whitman [43], Atkinson e Bransby [7], Mróz et al. [25].

Come è noto, i terreni sono caratterizzati da scarsa resistenza a trazione; per comodità, quindi, da questo punto in poi, le tensioni e le deformazioni normali sono

assunte positive se di compressione. Si segue, pertanto, la convenzione sui segni normalmente adottata nella meccanica delle terre.

Nell'ambito del presente lavoro il terreno viene sempre considerato *saturo*; cioè si suppone che l'intero volume dei pori sia occupato dall'acqua. In queste ipotesi, il tensore di *sforzo efficace*, ad esempio di Cauchy, viene definito come:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{I}$$

dove  $p_w$  è la pressione della fase liquida. Il *principio degli sforzi efficaci* afferma che, nei terreni saturi, le deformazioni dipendono unicamente dallo stato tensionale efficace [87]; secondo tale principio, quindi, la pressione della fase liquida non ha alcuna influenza sullo stato deformativo del materiale. Per questo motivo  $p_w$  viene anche detta *pressione neutra*. Nel corso del presente lavoro si farà riferimento *esclusivamente* allo stato tensionale efficace; quindi, per semplificare la notazione, l'apice “'”, tipicamente utilizzato in geotecnica per distinguere lo sforzo efficace da quello totale, sarà sottinteso.

Un banco di terreno, nella maggior parte dei casi, è il risultato di un lento processo di deposizione esteso su una vasta area. Da un punto di vista meccanico, in ogni elemento di suolo, si determina un graduale incremento dello stato tensionale dovuto al carico esercitato dal terreno che si deposita superiormente. Si schematizzi il banco come un semispazio omogeneo e si supponga che la deposizione dei sedimenti di terreno sia uniformemente distribuita sull'intero piano limite. Con tali simmetrie, durante il processo di formazione del banco non si verifica alcuna deformazione orizzontale. Questo particolare tipo di percorso deformativo è detto *edometrico*.

Può accadere che un dato elemento di terreno abbia subito, nel corso della sua storia, una tensione verticale  $\sigma_{v,\max}$  superiore a quella  $\sigma_v$  attualmente agente<sup>1</sup>. Se ciò si verifica il terreno si dice *sovracosolidato* ( $\sigma_v < \sigma_{v,\max}$ ), diversamente si dice *normal-consolidato* ( $\sigma_v = \sigma_{v,\max}$ ).

Il caricamento di un elemento di terreno, si può svolgere in condizioni *drenate* oppure *non drenate*. Nel primo caso, si consente la fuoriuscita dell'acqua contenuta nei pori; di conseguenza, i carichi esterni, se applicati con una velocità sufficientemente piccola, vengono interamente equilibrati da un incremento delle tensioni efficaci. Nel secondo caso, invece, tale drenaggio viene impedito; quindi, i carichi sono, in generale, equilibrati in parte da un incremento dello stato tensionale efficace ed in parte da un incremento di pressione neutra (la cosiddetta “sovrappressione” neutra).

Infine, si introduce una grandezza a cui si suole fare spesso riferimento in meccanica

---

<sup>1</sup>Una circostanza del genere può essere dovuta all'erosione, che ha asportato gli strati superficiali del banco, oppure allo scioglimento del ghiaccio che durante le ere glaciali ricopriva il terreno.

delle terre e che sarà utilizzata nel presente lavoro. Si tratta del *volume specifico*, definito come il volume totale per unità di volume della fase solida:

$$v := \frac{V}{V_s} \quad (3.1)$$

dove  $V_s$  è il volume corrente della fase solida. Si ha, quindi, che il volume corrente del terreno può essere calcolato come:

$$V = vV_s$$

Se si introduce l'*indice di porosità*, cioè il rapporto tra il volume dei pori ed il volume della fase solida:

$$e := \frac{V_v}{V_s} \quad (3.2)$$

si ricava la nota relazione:

$$v = 1 + e \quad (3.3)$$

### 3.3 Relazioni costitutive in compressione isotropa

Sia nel Cam-clay originale che in quello “Modificato”, la risposta in compressione isotropa è descritta mediante una relazione lineare fra il volume specifico  $v$  ed il logaritmo naturale della tensione media  $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ . Questa relazione assume le seguenti forme (Fig. 3.1):

$$v = v_p - k \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad \text{in campo } \textit{elastico} \quad (3.4)$$

$$v_c = v_{c0} - \lambda \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \quad (3.5)$$

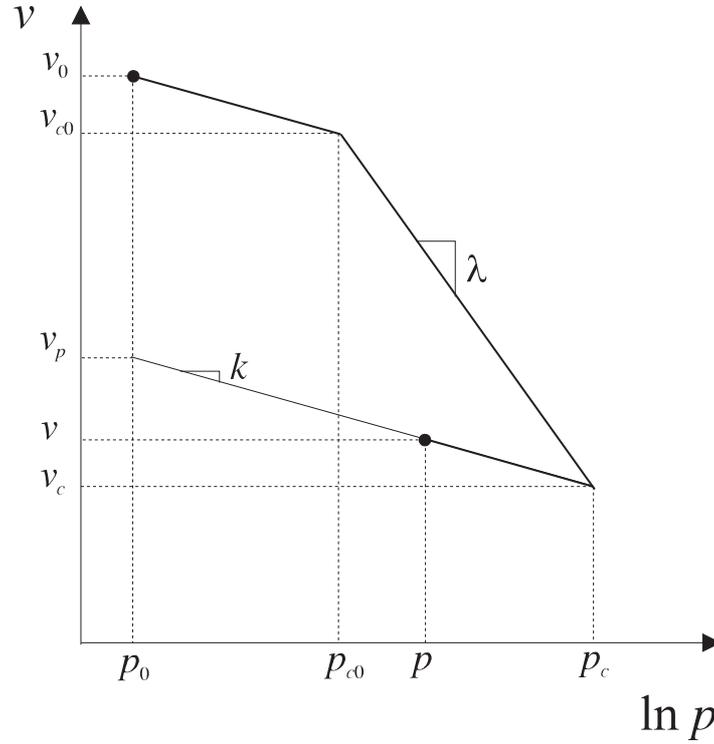
dove  $v_p$  è il volume specifico che si ottiene scaricando a partire dalla configurazione corrente  $(p, v)$ , fino al valore di pressione iniziale  $p_0$ ;  $k$  è l'inclinazione assunta dalle *curve di sovraconsolidazione* (“over consolidation lines” OCL) e  $\lambda$  quella della *curva di normal-consolidazione* (NCL) nel piano  $v - \ln p$ ;  $(p_c, v_c)$  e  $(p_{c0}, v_{c0})$  sono i valori di pressione e di volume specifico corrispondenti agli stati di snervamento corrente ed iniziale, rispettivamente. Relazioni del tipo (3.4-3.5) sono state proposte per interpretare i risultati di prove di compressione edometrica sin dai primi sviluppi della meccanica delle terre [87] e sono ancora oggi uno strumento molto utilizzato nell'ingegneria geotecnica.

Con l'aiuto della Fig. 3.1, è facile verificare la seguente espressione:

$$v_c - v_{c0} = v_p - v_0 - k \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad (3.6)$$

dove  $v_0$  è il volume specifico iniziale. La precedente relazione, sostituita nell'equazione (3.5) della curva di normal-consolidazione, fornisce:

$$v_p - v_0 - k \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) = -\lambda \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad (3.7)$$


 Figura 3.1: Relazioni logaritmiche fra pressione  $p$  e volume specifico  $v$ 

La comprimibilità della fase solida è in generale trascurabile rispetto a quella dell'argilla nel suo complesso (lo "scheletro solido"); si può quindi supporre che il volume di tale fase rimanga costante ( $V_s \cong V_{s0}$ ). Con questa ipotesi, volume iniziale e corrente si possono rispettivamente esprimere come (cfr. par. 3.2):

$$V_0 = v_0 V_{s0} \quad V = v V_{s0} \quad (3.8)$$

La *deformazione volumetrica* può quindi essere calcolata come (cfr. par. 2.2.1):

$$E_v := -\frac{V - V_0}{V_0} = -\frac{v - v_0}{v_0} \quad (3.9)$$

questa deformazione si decompone additivamente nelle sue parti elastica e plastica:  $E_v = E_v^e + E_v^p$ , dove:

$$E_v^e = -\frac{v - v_p}{v_0} \quad E_v^p = -\frac{v_p - v_0}{v_0} \quad (3.10)$$

Combinando le (3.10) rispettivamente con le equazioni (3.4-3.7), si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} E_v^e &= \frac{k}{v_0} \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \\ E_v^p &= \frac{\lambda - k}{v_0} \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Queste si possono esprimere in forma incrementale come:

$$\begin{aligned}\dot{E}_v^e &= \frac{k \dot{p}}{v_0 p} \\ \dot{E}_v^p &= \frac{\lambda - k \dot{p}_c}{v_0 p_c}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, per la (2.21), si ha:

$$E_v = -\frac{v - v_0}{v_0} \cong \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \varepsilon_v \quad (3.13)$$

e quindi:

$$E_v^e = -\frac{v - v_p}{v_0} \cong \varepsilon_v^e \quad E_v^p = -\frac{v_p - v_0}{v_0} \cong \varepsilon_v^p \quad (3.14)$$

Le equazioni costitutive (3.11) e le corrispondenti relazioni incrementali (3.12) si possono rispettivamente scrivere come:

$$\varepsilon_v^e = \frac{k}{v_0} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad \varepsilon_v^p = \frac{\lambda - k}{v_0} \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \quad (3.15)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{k \dot{p}}{v_0 p} \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\lambda - k \dot{p}_c}{v_0 p_c} \quad (3.16)$$

La risposta del materiale descritta dalle relazioni costitutive (3.4-3.5) contiene alcuni aspetti fisicamente inaccettabili [34]:

1. La pendenza delle curve di scarico-ricarico (3.4) è indipendente dal valore della corrispondente pressione di preconsolidazione  $p_c$ , cioè dal massimo valore di pressione determinatosi nel terreno. E' invece ragionevole supporre che al crescere del valore di  $p_c$ , la comprimibilità elastica si riduca.
2. Le relazioni (3.4-3.5) prevedono, per elevati valori di pressione, il raggiungimento di valori negativi del volume specifico [13]; in particolare risulta:

$$\begin{aligned}v < 0 &\quad \text{per } p > p_0 \exp\left(\frac{v_p}{k}\right) \\ v_c < 0 &\quad \text{per } p_c > p_{c0} \exp\left(\frac{v_{c0}}{\lambda}\right)\end{aligned}\quad (3.17)$$

3. Secondo le equazioni (3.11), la comprimibilità del terreno, sia in campo elastico che in campo elasto-plastico, decresce al crescere del volume specifico iniziale  $v_0$ ; ciò è fisicamente del tutto inaccettabile. E' invece ragionevole che, al decrescere dell'addensamento iniziale ( $v_0$  crescente), la deformabilità cresca.

Si osservi al riguardo che le (3.11) sono ottenute a partire dalle (3.4-3.5) utilizzando la definizione di deformazione volumetrica  $E_v$  (3.9) e le conseguenti espressioni cinematiche (3.10). In effetti, nella letteratura geotecnica, per calcolare la deformazione volumetrica a partire dalle (3.4-3.5), raramente si utilizza la definizione (3.9). Si preferisce,

infatti, la seguente espressione di deformazione volumetrica in forma incrementale (cfr., ad es., [69, 7, 93]):

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{v}}{v} \quad (3.18)$$

Per ottenere la componente elastica di  $\dot{\theta}$ , si deriva la (3.4) e la si sostituisce nella precedente relazione; si ottiene la seguente equazione costitutiva in forma incrementale:

$$\dot{\theta}^e = \frac{k \dot{p}}{v p} \quad (3.19)$$

Per calcolare la componente plastica, si considera l'applicazione di un incremento  $\dot{p}_c$  a partire da un punto della NCL (Fig. 3.2); si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^p &= \dot{\theta} - \dot{\theta}^e = \\ &= -\frac{\dot{v}}{v} - \frac{k \dot{p}_c}{v p_c} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nella precedente equazione si sostituisce a  $\dot{v}$  l'espressione di  $\dot{v}_c$ , ottenuta derivando la (3.5); si ha infine la seguente equazione costitutiva in forma incrementale:

$$\dot{\theta}^p = \frac{\lambda - k \dot{p}_c}{v p_c} \quad (3.21)$$

Integrando la (3.18), si ottiene:

$$\theta = -\ln \frac{v}{v_0} \quad (3.22)$$

nell'ipotesi di deformazioni infinitesime è consentita la seguente approssimazione (cfr. par. 3.6):

$$\theta := -\ln \frac{v}{v_0} \cong \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) := \varepsilon_v \quad (3.23)$$

Le relazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21) possono essere quindi riscritte come:

$$\dot{\varepsilon}_v^e = \frac{k \dot{p}}{v p} \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\lambda - k \dot{p}_c}{v p_c} \quad (3.24)$$

Le relazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21), implicando una dipendenza della deformabilità dal volume specifico corrente e non da quello iniziale, descrivono il comportamento del terreno sicuramente meglio delle (3.12). Per questo motivo, come si vedrà nel paragrafo successivo, le (3.24), ottenute dalle (3.19, 3.21) nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, sono le equazioni impiegate nella formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato. Tuttavia, esse implicano che la deformabilità *decrezca* al crescere di  $v$ ; quindi il loro impiego non risolve del tutto l'inconveniente descritto al punto 3. Inoltre, la presenza di  $v$  nella (3.19) induce una dipendenza del comportamento elastico dalla deformazione volumetrica plastica; è da verificare se questo accoppiamento elasto-plastico non violi i fondamentali requisiti termodinamici.

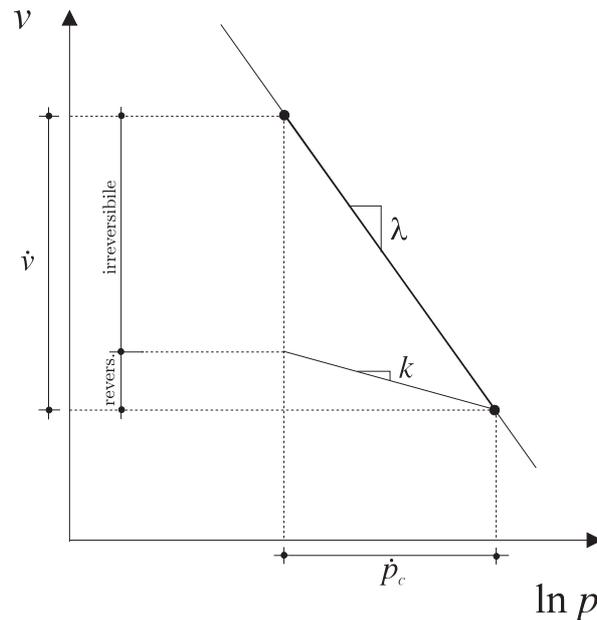


Figura 3.2: Applicazione di un incremento di pressione su argilla normal-consolidata

E' importante sottolineare che l'espressione di  $\theta$  (3.22) non coincide con la definizione di deformazione volumetrica  $E_v$  (3.9). La circostanza che la scelta di  $\theta$  sia preferibile a quella di  $E_v$ , quando si considerano le (3.4-3.5), evidenzia che l'ipotesi di deformazioni infinitesime non è appropriata. Si ricorda che il tensore di deformazione infinitesima  $\epsilon$  costituisce una efficace misura di deformazione soltanto nell'ipotesi di "piccoli" spostamenti (cfr. par. 2.2.1); quindi le equazioni costitutive incrementali (3.19, 3.21) non dovrebbero essere impiegate considerando  $\theta$  come la traccia di  $\epsilon$ , cioè supponendo valida la (3.23). Tale problematica sarà ripresa nel par. 3.6.

### 3.4 Formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato

I modelli elasto-plastici Cam-clay [68] e Cam-clay Modificato [67], sviluppati entrambi nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, differiscono esclusivamente per la geometria della superficie di snervamento. Nel Cam-clay, questa superficie è tale da sovrastimare gli incrementi di deformazione plastica deviatorica, soprattutto per piccoli valori del rapporto fra tensione ottaedrica e tensione media. La scelta di una curva di snervamento ellittica, fatta nel Cam-clay Modificato, corregge questa tendenza. Quindi, diversamente dal caso precedente, questo criterio di snervamento è definito mediante una funzione regolare; tale circostanza risulta vantaggiosa anche da un punto di vista computazionale.

### Legame elastico

Per entrambi i modelli costitutivi, Cam-clay e Cam-clay Modificato, il legame costitutivo elastico è non lineare ed è espresso dalla seguente relazione incrementale:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (3.25)$$

dove  $K$  è il modulo elastico di rigidezza volumetrica. La sua espressione è ricavata dalla (3.24<sub>1</sub>) come:

$$K = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_v^e} = \frac{pv}{k} \quad (3.26)$$

Si assume che le deformazioni elastiche a taglio siano nulle, cioè che il modulo elastico di rigidezza a taglio  $\mu$  sia infinito e che quindi il coefficiente di Poisson sia uguale a -1.

Si osservi che la presenza di  $v$  nella (3.25) implica la presenza di accoppiamento elasto-plastico; nel senso che il comportamento in campo elastico è influenzato dal precedente sviluppo di deformazioni plastiche. Infatti, in generale, la misura corrente del volume specifico dipende anche dalla deformazione volumetrica plastica.

### Criterio di snervamento

Il dominio di elasticità è individuato attraverso le seguenti equazioni:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p_c) = q + Mp \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) = 0 \quad \text{nel Cam-clay} \quad (3.27)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) = 0 \quad \text{nel Cam-clay Modificato} \quad (3.28)$$

dove  $q$  è definito come:

$$q := \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \quad (3.29)$$

mentre  $M$  è la pendenza, nel piano  $p - q$ , della *linea di stato critico* (CSL); si definisce *critico* lo stato tensionale caratterizzato da incrementi di deformazione plastica a componente volumetrica nulla. La pressione di preconsolidazione  $p_c$  è la variabile di in-crudimento.

Le curve di snervamento, nel piano  $p - q$ , del Cam-clay e del Cam-clay Modificato sono riportate nelle Figg. 3.3a e 3.3b. Inoltre, nelle Figg. 3.4 e 3.5, la superficie di snervamento del Cam-clay Modificato è rappresentata, rispettivamente, nello spazio delle tensioni principali  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  e nello spazio  $p - q - v$ . In quest'ultimo spazio, la traccia della superficie di snervamento nel piano  $p - v$  è ovviamente la curva di normal-consolidazione (NCL).

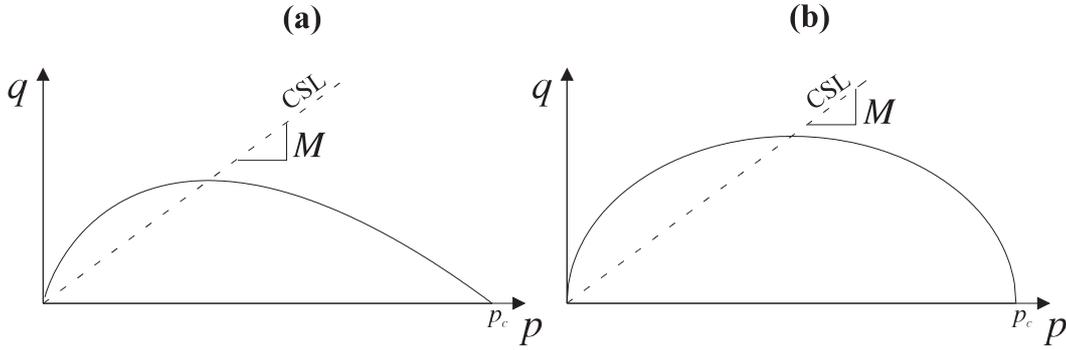


Figura 3.3: Cam clay (a) e Cam-clay Modificato (b). Curva di snervamento e linea di stato critico nel piano  $p - q$

### Legge di flusso

In entrambi i modelli costitutivi, il criterio di flusso è associato. Nel Cam-clay Modificato, ad esempio, l'incremento di deformazione plastica viene di conseguenza espresso come:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, p_c)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \dot{\gamma} \left[ \frac{1}{3} (2p - p_c) \mathbf{I} + \frac{3}{M^2} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

### Legge di incrudimento

La legge di incrudimento è di tipo volumetrico; essa è fornita dalla relazione in forma incrementale (3.24<sub>2</sub>):

$$\dot{p}_c = p_c \frac{v}{\lambda - k} \dot{\epsilon}_v^p \quad (3.31)$$

Quindi, l'impiego del Cam-clay e del Cam-clay Modificato richiede la determinazione di quattro parametri adimensionali:

1. l'indice di compressione vergine  $\lambda$ ;
2. l'indice di rigonfiamento  $k$ ;
3. la pendenza della linea di stato critico  $M$ ;
4. il volume specifico iniziale  $v_0$ .

Come costante del materiale, al posto di  $v_0$ , si può considerare il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino ad un valore di pressione unitaria ( $v_{c1}$ ). Assegnati  $p_0$  e  $p_{c0}$ , è facile ricavare  $v_0$  a partire da  $v_{c1}$ , utilizzando le (3.4-3.5).

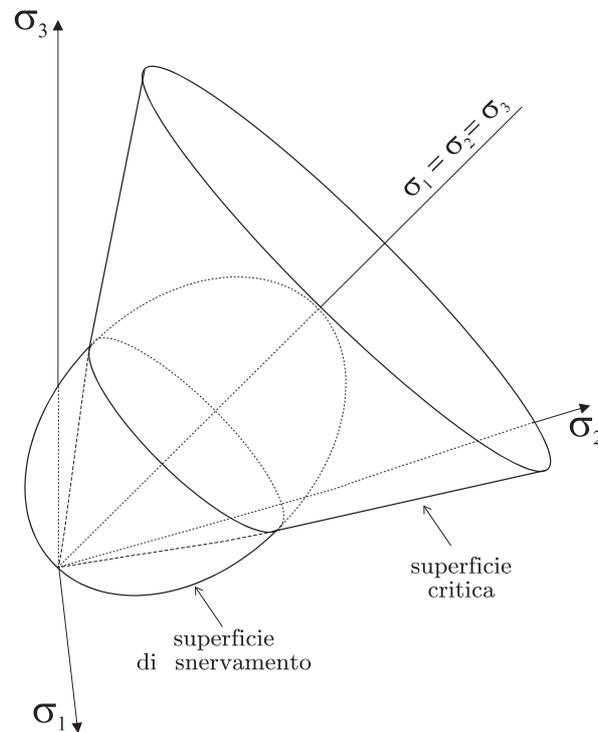


Figura 3.4: Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e superficie di stato critico nello spazio delle tensioni principali

Per la determinazione dei suddetti parametri, teoricamente sono necessarie soltanto due prove di laboratorio: la prima, di compressione isotropa (comprendente anche un percorso di scarico, se il campione è inizialmente normal-consolidato), consente di ricavare i parametri  $\lambda$ ,  $k$ ,  $v_{c1}$ ; la seconda, una prova triassiale standard in condizione drenata, è finalizzata alla determinazione di  $M$ .

La distinzione operata fra la superficie di snervamento e la superficie critica permette al Cam-clay di superare uno dei principali limiti di applicabilità dei classici modelli elasto-plastici (Drucker-Prager, Tresca modificato, Mohr-Coulomb [28, 26, 71]). Nel Cam-clay e nel Cam-clay Modificato, infatti, le implicazioni dell'ipotesi di associatività del flusso plastico sono, da un punto di vista qualitativo, in ottimo accordo con il reale comportamento dei terreni.

A tal proposito, si faccia riferimento al diagramma di Fig. 3.6, sui quali assi sono riportati, oltre agli invarianti di tensione  $p$  e  $q$ , i corrispondenti incrementi di deformazione plastica  $\dot{\epsilon}_v^p$  e  $\dot{\epsilon}_q^p := \sqrt{2/3} \|\text{dev}(\dot{\epsilon}^p)\|$ . Si consideri il punto C di intersezione fra la curva di snervamento (3.28) del Cam-clay Modificato e la linea di stato critico  $q = Mp$ ; per l'ipotesi di flusso associato (3.30), l'incremento di deformazione plastica nel punto C ha componente volumetrica  $\dot{\epsilon}_v^p$  nulla, coerentemente con la definizione di stato critico. Dalla legge di incrudimento (3.31), si ha quindi  $\dot{p}_c = 0$ , cioè la stazionarietà della curva di snervamento in C. La linea di stato critico rappresenta quindi la

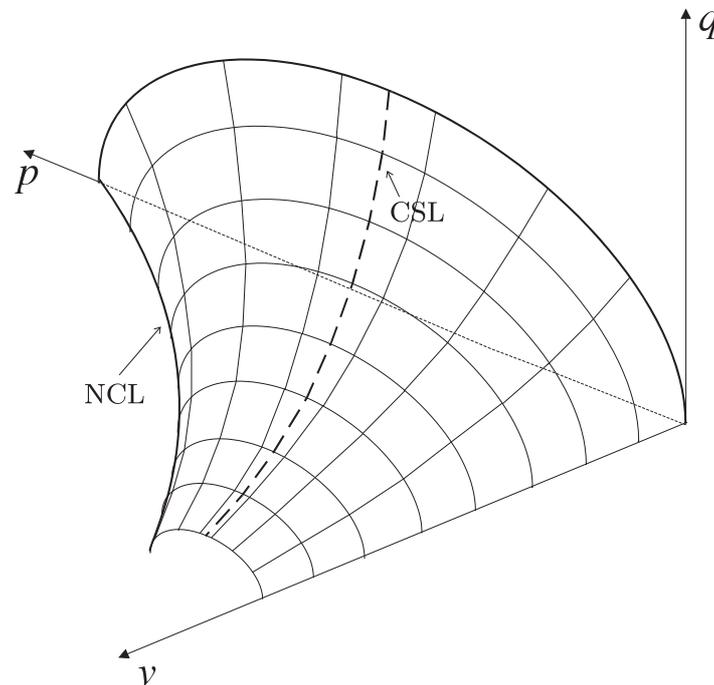


Figura 3.5: Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e linea di stato critico nello spazio  $p - q - v$

condizione *ultima* del materiale.

In un qualsiasi punto D della curva di snervamento, posto al di sotto della CSL (zona “sub-critica”), la (3.30) implica  $\dot{\epsilon}_v^p > 0$  (*contrattanza*) e quindi  $\dot{p}_c > 0$ ; la curva di snervamento si espande ed il comportamento del materiale è *incrudente*. Inversamente, in un punto S posto al di sopra della CSL (zona “super-critica”), si ha  $\dot{\epsilon}_v^p < 0$  (*dilatanza*) e  $\dot{p}_c < 0$ ; la curva di snervamento si restringe ed il comportamento del materiale è *rammollente*.

Infine, è utile considerare un esempio delle previsioni del Cam-clay Modificato; ad esempio quelle relative alla risposta di un campione di argilla debolmente sovraconsolidata ( $p_0 < p_{c0}$ ) sottoposto ad una prova triassiale drenata standard (Fig. 3.7). Si osservano, nel percorso tensio-deformativo, un tratto elastico (0-1:  $\dot{\epsilon}_v \neq 0$ ,  $\dot{\epsilon}_q = 0$ ) ed un successivo tratto elasto-plastico con incrudimento (1-2:  $\dot{\epsilon}_v \neq 0$ ,  $\dot{\epsilon}_q \neq 0$ ), fino al raggiungimento dello stato critico (2:  $\dot{\epsilon}_v = 0$ ).

### 3.5 Alcune modifiche proposte per il modello

Sono state proposte numerose modifiche alla formulazione del Cam-clay riportata nel precedente paragrafo. Tali variazioni sono volte a migliorare le previsioni del modello e ad estenderne il campo di applicazione, ad esempio, alla condizione di carico ciclico oppure alle argille fortemente sovraconsolidate. Nel seguito sono brevemente richiamati i principali aspetti di alcune delle modifiche suggerite.

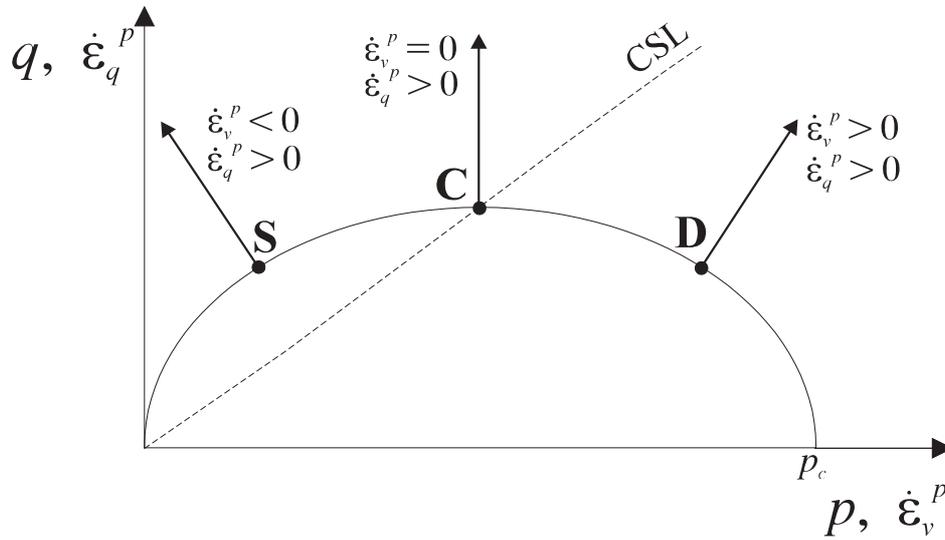


Figura 3.6: Cam-clay Modificato. Implicazioni dell'ipotesi di flusso plastico associato

### Rigidezza elastica a taglio

Sia nella formulazione originale sia in quella “Modificata”, si assume che le deformazioni elastiche a taglio siano nulle, cioè che il modulo di taglio sia infinito. Questa ipotesi, oltre ad essere poco realistica, rende difficile l'implementazione del modello in una formulazione agli spostamenti del metodo degli elementi finiti. Per superare queste difficoltà vengono spesso prese in esame due diverse posizioni relative alla descrizione, fornita dal modello, della risposta in campo elastico:

1. Si assume un valore finito e costante per il modulo di rigidezza a taglio  $\mu$ ; si osservi tuttavia che anche questa soluzione non risulta in buon accordo con il comportamento osservato in ambito sperimentale [24, 92]. Inoltre, per piccoli valori di tensione media, si perviene a valori negativi del coefficiente di Poisson e ciò non è fisicamente accettabile (cfr. par. 4.6.1).
2. Si pone costante il coefficiente di Poisson  $\nu$ , in modo da ricavare il modulo di rigidezza a taglio in funzione del modulo di rigidezza volumetrica, e quindi, della tensione media [11, 84]:

$$\mu = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\frac{pv}{k} \quad (3.32)$$

Quest'ultimo approccio è sicuramente più realistico, ma conduce ad una relazione costitutiva non-conservativa [96].

Si osservi che entrambe le modifiche implicano la determinazione di un parametro,  $\mu$  oppure  $\nu$ , che si aggiunge ai quattro previsti nella formulazione originale.

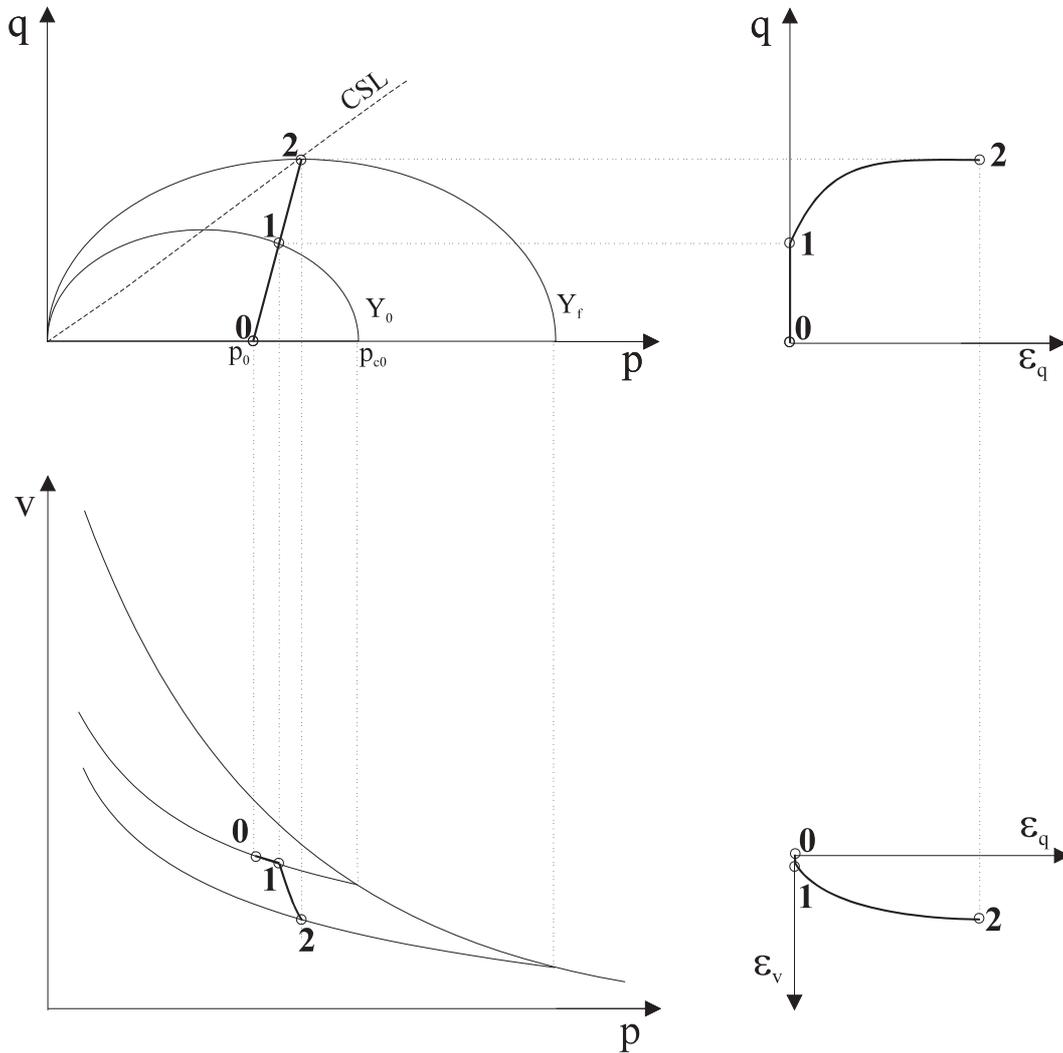


Figura 3.7: Cam Clay Modificato. Previsione della risposta di un campione di argilla debolmente sovraconsolidata durante una prova triassiale drenata standard

### Comportamento in compressione isotropa

Per risolvere i problemi connessi alla modellazione del comportamento isotropo per mezzo di relazioni di tipo  $v - \ln p$  (cfr. par. 3.3), Butterfield [13] e Hashiguchi [34, 36] propongono l'impiego di relazioni lineari  $\ln v - \ln p$ :

$$\ln \left( \frac{v}{v_p} \right) = -k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad \text{in campo } \textit{elastico} \quad (3.33)$$

$$\ln \left( \frac{v_c}{v_{c0}} \right) = -\lambda^* \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \quad (3.34)$$

Queste due equazioni conducono alla seguente relazione, analoga alla (3.7):

$$\ln \left( \frac{v_p}{v_0} \right) = -(\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad (3.35)$$

Si richiami la definizione (3.22) di deformazione volumetrica logaritmica, già utilizzata, partendo dalla sua forma incrementale (3.18), nella formulazione del Cam-clay e del Cam-clay Modificato:

$$\theta = -\ln \frac{v}{v_0} \quad \theta^e = -\ln \frac{v}{v_p} \quad \theta^p = -\ln \frac{v_p}{v_0} \quad (3.36)$$

Sostituendo le (3.33, 3.35), si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \theta^e &= k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \\ \theta^p &= (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

la cui forma incrementale è:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^e &= k^* \frac{\dot{p}}{p} \\ \dot{\theta}^p &= (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si osserva che le relazioni costitutive bi-logaritmiche (3.33-3.34) e le (3.37, 3.38), da queste ricavate, non conducono agli inconvenienti evidenziati in precedenza. In particolare, la deformabilità, sia in campo elastico sia in campo elasto-plastico è indipendente da  $v$ . Si osservi, inoltre, che per effetto di quest'ultima circostanza, l'ipotesi di incomprimibilità della fase solida ( $V_s \cong V_{s0}$ ) non è più necessaria; quindi le (3.33-3.34) possono essere direttamente espresse in termini di volume totale dell'argilla  $V = V_s + V_v = vV_s$  (cfr. par. 3.2).

Modelli costitutivi in deformazioni infinitesime, di tipo Cam-clay, in cui sono implementate le relazioni (3.33-3.34) sono presentati, ad esempio, in [1, 39, 91].

Si osservi, tuttavia, che non è coerente preferire le relazioni bi-logaritmiche (3.33-3.34) alle tradizionali di tipo  $v - \ln p$  (3.4-3.5) e contemporaneamente accettare l'ipotesi di deformazioni infinitesime. I motivi di tale affermazione saranno esposti nel par. 3.6.

### Potenziali elastici di Houlsby

Houlsby [38] propone un'espressione dell'energia di deformazione elastica che implica la dipendenza di entrambe le rigidzze, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media che dal deviatore degli sforzi; questo legame conduce, nel caso di compressione isotropa, alla relazione bilogaritmica (3.33). In alternativa, tale autore considera la possibilità di porre il modulo di taglio proporzionale al valore corrente della pressione di preconsolidazione  $p_c$ ; quest'ultima ipotesi di accoppiamento elasto-plastico, unitamente a considerazioni di carattere termodinamico, implica una leggera variazione della superficie di snervamento. Entrambi i legami costitutivi elastici proposti da Houlsby sono in soddisfacente accordo con le evidenze sperimentali [2, 38].

### Comportamento isteretico interno alla superficie di snervamento

Se si considerano cicli di scarico-ricarico, il legame elastico non lineare si rivela inadeguato a prevedere la risposta del materiale. I terreni, infatti, per effetto di una successione di cicli di carico, anche interni alla superficie di snervamento, accumulano deformazioni irreversibili. La modellazione di questo comportamento isteretico è utile per l'analisi di problemi dinamici; a tale studio si sono dedicati molti autori (cfr., ad es., [23, 53, 56])

### Parte “super-critica” della superficie di snervamento

Nella parte posta al di sopra della linea di stato critico, la forma della curva di snervamento fornita dalla (3.28) determina una sovrastima della resistenza di picco delle argille fortemente sovraconsolidate. Per ovviare a tale inconveniente, spesso si sostituisce il tratto in questione con una superficie simile a quella proposta da Hvorslev [40]. Questa soluzione, unitamente all'ipotesi di flusso associato, conduce alla previsione di un comportamento eccessivamente dilatante; per ovviare a questo inconveniente, si fa di solito ricorso ad equazioni evolutive non-associate (cfr., ad es., [39, 94]).

### Anisotropia del comportamento elasto-plastico

Prove sperimentali su argille *indisturbate* rivelano un comportamento anisotropo del materiale in campo inelastico. Tale circostanza si manifesta attraverso la “curva di snervamento” dedotta dai risultati sperimentali, che non presenta, in generale, asse coincidente con  $q = 0$  [92, 93]. Questo aspetto del comportamento non viene colto dal Cam-clay.

Nella maggior parte dei casi, nel corso della sua formazione, un banco di terreno consolida in condizioni sostanzialmente edometriche (cfr. par. 3.2); per effetto di questa particolare evoluzione delle deformazioni, la curva di snervamento determinata sperimentalmente ha asse di simmetria approssimativamente coincidente con la cosiddetta  $K_0$ -linea; cioè con la retta luogo degli stati tensionali corrispondenti ad un percorso di deformazione edometrica.

Per modellare questo aspetto del comportamento meccanico viene proposto di ruotare la curva di snervamento (cfr., ad es., [70]). Un approccio più rigoroso consiste nell'introdurre un'adeguata legge di incrudimento cinematico; cioè modellare l'evoluzione dell'orientamento della superficie al crescere della componente deviatorica di deformazione plastica (cfr., ad es., [35]). Ovviamente questi modelli sono ben più complessi della formulazione originale del Cam-clay e non sembra del tutto provato che a ciò corrisponda un sostanziale miglioramento delle previsioni della risposta meccanica del materiale.

### 3.6 Limiti dell'ipotesi di deformazioni infinitesime

Le relazioni pressione-volume discusse nel par. 3.3 e nel par. 3.5, sono qui richiamate allo scopo di mostrare come l'ipotesi di piccoli spostamenti non sia adeguata alla modellazione costitutiva delle argille tenere. Si considerino, quindi, i seguenti quadri riepilogativi.

#### Relazioni $v - \ln p$

campo elastico $v = v_p - k \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$	campo elasto-plastico $v_c = v_{c0} - \lambda \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$	(3.39)
--	---	--------

$\swarrow$ $E_v = -\frac{v-v_0}{v_0}$	$\searrow$ $\theta = -\ln \frac{v}{v_0}$	(3.40)
--	---	--------

$\downarrow$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>E_v^e = \frac{k}{v_0} \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)</math>  <math>E_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)</math>  <math>\dot{E}_v^e = \frac{k}{v_0} \frac{\dot{p}}{p}</math>  <math>\dot{E}_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \frac{\dot{p}_c}{p_c}</math> </td> </tr> </table>	$E_v^e = \frac{k}{v_0} \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$ $E_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$ $\dot{E}_v^e = \frac{k}{v_0} \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{E}_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$	$\downarrow$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>\dot{\theta}^e = \frac{k}{v} \frac{\dot{p}}{p}</math>  <math>\dot{\theta}^p = \frac{\lambda-k}{v} \frac{\dot{p}_c}{p_c}</math> </td> </tr> </table>	$\dot{\theta}^e = \frac{k}{v} \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{\theta}^p = \frac{\lambda-k}{v} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$	(3.41)
$E_v^e = \frac{k}{v_0} \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$ $E_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$ $\dot{E}_v^e = \frac{k}{v_0} \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{E}_v^p = \frac{\lambda-k}{v_0} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$				
$\dot{\theta}^e = \frac{k}{v} \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{\theta}^p = \frac{\lambda-k}{v} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$				

#### Relazioni $\ln v - \ln p$

campo elastico $\ln \left( \frac{v}{v_p} \right) = -k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$	campo elasto-plastico $\ln \left( \frac{v_c}{v_{c0}} \right) = -\lambda^* \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$	(3.42)
--	---	--------

$\downarrow$ $\theta = -\ln \frac{v}{v_0}$	(3.43)
---	--------

$\downarrow$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>\theta^e = k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)</math>  <math>\theta^p = (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)</math> </td> <td style="padding: 5px;"> <math>\dot{\theta}^e = k^* \frac{\dot{p}}{p}</math>  <math>\dot{\theta}^p = (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c}</math> </td> </tr> </table>	$\theta^e = k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$ $\theta^p = (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$	$\dot{\theta}^e = k^* \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{\theta}^p = (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c}$	(3.44)
$\theta^e = k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right)$ $\theta^p = (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right)$	$\dot{\theta}^e = k^* \frac{\dot{p}}{p}$ $\dot{\theta}^p = (\lambda^* - k^*) \frac{\dot{p}_c}{p_c}$		

In generale, il tensore di deformazione infinitesima  $\boldsymbol{\varepsilon}$  non rappresenta una misura esatta di deformazione; tuttavia, costituisce una efficace misura di deformazione nell'ipotesi di "piccoli" spostamenti. Si ricorda, a tal proposito, che una funzione deformazione  $\varphi$  si dice *infinitesima* se è piccolo il suo gradiente degli spostamenti [32];

questo implica che nella descrizione di  $\varphi$  si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore a (cfr. par. 2.2.1):

$$\omega := \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| = \|D\mathbf{u}\| \quad (3.45)$$

Si introduca, coerentemente con la definizione (3.45), il seguente parametro:

$$\omega_v := \det[\mathbf{F}] - \det[\mathbf{I}] = J - 1 = \frac{V - V_0}{V_0} \quad (3.46)$$

se, come fino ad ora si è fatto, si considera incomprimibile la fase solida, si ha:

$$\omega_v = \frac{v - v_0}{v_0} \quad (3.47)$$

Si consideri il seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$\ln v = \ln v_0 + \frac{v - v_0}{v_0} + O(\omega_v^2) \quad (3.48)$$

dove  $O(\omega_v^2)$  sono i termini di questo sviluppo che risultano infinitesimi di ordine superiore ad  $\omega_v$ . L'ipotesi di deformazioni infinitesime equivale a trascurare  $O(\omega_v^2)$ , ricavando:

$$\ln \frac{v}{v_0} \cong \frac{v - v_0}{v_0} \quad (3.49)$$

e quindi:

$$\theta \cong E_v \quad (3.50)$$

Quindi, se l'ipotesi di deformazioni infinitesime fosse appropriata, le equazioni costitutive (3.41<sub>box1</sub>) e (3.41<sub>box2</sub>), derivanti rispettivamente dall'impiego di  $E_v$  e di  $\theta$ , dovrebbero mostrare la stessa efficacia nel descrivere il comportamento delle argille tenere. Invece le previsioni ottenute utilizzando le (3.41<sub>box2</sub>) sono decisamente in migliore accordo con le osservazioni sperimentali, come è dimostrato dal fatto che esse siano normalmente preferite alle (3.41<sub>box1</sub>). Questa osservazione dimostra che l'approssimazione (3.50) non è in generale accettabile, nel senso che i termini  $O(\omega_v^2)$  non sono trascurabili. Si ha quindi che nella modellazione costitutiva delle argille tenere l'ipotesi di deformazioni infinitesime non è in generale appropriata.

Si considerino adesso le relazioni lineari  $\ln v - \ln p$  (3.42). Partendo dall'ipotesi di deformazioni infinitesime e quindi dalla (3.50), si ricava:

$$E_v^e \cong \theta^e \quad E_v^p \cong \theta^p \quad (3.51)$$

se al primo membro delle precedenti relazioni si sostituiscono le espressioni di  $E_v^e$  e di  $E_v^p$  (3.10) ed al secondo quelle di  $\theta^e$  e di  $\theta^p$  (3.44), si ha:

$$-\frac{v - v_p}{v_0} \cong k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad -\frac{v_p - v_0}{v_0} \cong (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad (3.52)$$

e quindi:

$$v \cong v_p - v_0 k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad v_p - v_0 \cong -v_0 (\lambda^* - k^*) \ln \left( \frac{p_c}{p_{c0}} \right) \quad (3.53)$$

Si nota come queste relazioni coincidano rispettivamente con la (3.4) e con la (3.7), una volta che si sono effettuate le seguenti sostituzioni:

$$k = v_0 k^* \quad \lambda = v_0 \lambda^* \quad (3.54)$$

Si ha quindi che l'ipotesi di deformazioni infinitesime implica l'equivalenza delle relazioni  $v - \ln p$  con quelle  $\ln v - \ln p$ , mentre è un'evidenza sperimentale che, in generale, queste ultime interpretano meglio il comportamento delle argille [13].

Per quanto fin qui evidenziato, risulta privo di coerenza constatare l'opportunità di introdurre la deformazione logaritmica  $\theta$  e, contemporaneamente, continuare a supporre che il solo tensore  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sia sufficiente come misura di deformazione. Questa e altre considerazioni riportate più avanti, giustificano la necessità della formulazione di un modello di tipo Cam-clay in deformazioni finite.

### Osservazione 3.6.1

Si noti che le (3.54) spiegano perché in letteratura [39] si affermi che i parametri  $k^*$  e  $\lambda^*$  si possono approssimativamente ricavare da  $k$  e  $\lambda$  come:

$$k^* \cong \frac{k}{v} \quad \lambda^* \cong \frac{\lambda}{v} \quad (3.55)$$

■

# Capitolo 4

## Un modello Cam-clay in deformazioni finite

### 4.1 Introduzione

Grazie al contributo di numerosi autori, un chiaro e completo inquadramento matematico della *plasticità classica in deformazioni infinitesime* si può considerare ormai raggiunto (cfr. [45]), intendendo, come “classica”, la teoria dell’elasto-plasticità presentata nei famosi lavori di Hill [37] e Koiter [41].

Lo stesso non si può certamente affermare per la *plasticità classica in deformazioni finite*; tale teoria, infatti, costituisce ancora oggi un argomento controverso. Sicuramente uno dei principali temi di discussione è la scelta di un’adeguata formula di decomposizione elasto-plastica. Come è noto, la teoria linearizzata si basa sulla decomposizione additiva del tensore di deformazione infinitesima; questa ipotesi viene a volte estesa alla teoria non lineare. Ad esempio, Green e Naghdi<sup>1</sup> [31] propongono la *decomposizione additiva* del tensore di deformazione di Green-Lagrange (2.15); si dimostra che la conseguente teoria costitutiva risulta accettabile da un punto di vista termodinamico [54].

Correlato a quello della decomposizione elasto-plastica della deformazione, vi è un altro tema estremamente controverso: la scelta della misura obiettiva di variazione temporale dello sforzo, da utilizzare nella relazione costitutiva in forma incrementale. A tal fine, viene proposto un numero ragguardevole di derivate obiettive. Nell’ambito di alcune formulazioni (cfr. ad es. [46]), la scelta della derivata corotazionale del tensore di Kirchhoff (2.67) è dimostrata essere una necessità; in altri lavori (cfr. ad es. [79]), si preferisce l’impiego della derivata di Lie (2.68).

Soprattutto in ambito computazionale, vengono proposte numerose *estensioni ipoplastiche* dei classici modelli della teoria infinitesimale (cfr., ad es., [55]). Nella maggior parte dei casi, questi modelli si basano sulla decomposizione additiva, nelle sue parti elastica e plastica, della velocità del gradiente di deformazione (2.51). Il comportamento costitutivo elastico è definito in forma incrementale; si tratta, quindi, di una

---

<sup>1</sup>I lavori di Green e Naghdi, insieme a quelli di Owen [60, 61], si pongono fra i primi significativi contributi alla formulazione di una teoria matematica dell’elasto-plasticità in deformazioni finite.

relazione fra la velocità di deformazione elastica ed una derivata temporale obiettiva della misura di sforzo. Il criterio di snervamento, in termini di tensioni, è definito nella configurazione corrente; la legge di flusso, quasi sempre associata, è formalmente identica a quella della teoria in deformazioni infinitesime.

La scelta di questa classe di legami è criticabile per vari motivi; ad esempio, a causa dell'ipoelasticità, non è a priori escluso che venga dissipata energia per effetto di un comportamento isteretico in campo elastico. Nella maggior parte dei casi, infatti, si assume costante il tensore di elasticità spaziale (2.83); tale ipotesi è incompatibile con la definizione di iperelasticità [80].

Un importante progresso è costituito dall'introduzione della nozione di *configurazione intermedia*, dovuta a Lee [44]. Si definisce intermedia la configurazione a cui si perviene annullando lo stato tensionale corrente; relativamente ad essa si caratterizza la risposta iperelastica del materiale. Sul concetto di questa configurazione "scarica" si basano numerosi lavori. Alcuni di questi sono finalizzati alla formulazione di una teoria generale dell'elasto-plasticità (cfr. ad es. [46, 47, 48, 50]), altri hanno come obiettivo principale lo sviluppo di adeguati algoritmi di integrazione numerica. In particolare, in questi ultimi contributi, si sfrutta la *decomposizione elasto-plastica moltiplicativa* del gradiente di deformazione. Tale decomposizione, conseguente al concetto di configurazione intermedia, è inizialmente proposta nell'ambito della descrizione micromeccanica del comportamento plastico dei singoli cristalli di metallo (cfr., ad es., [6]). Il suo uso viene poi esteso alla modellazione dei continui elasto-plastici da numerosi autori (cfr., ad es., [3, 72, 73, 74, 79]); talvolta, contemporaneamente all'ipotesi di decomposizione moltiplicativa, il potenziale elastico è assegnato in forma logaritmica (cfr., ad es., [63, 75]).

Attualmente, la teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa sembra incontrare i favori della maggior parte dei ricercatori, soprattutto in ambito computazionale. Fra l'altro, è stata applicata anche alla caratterizzazione ed alla simulazione numerica della localizzazione delle deformazioni [4, 5, 77].

In meccanica delle terre, a partire dalla fine degli anni '60, si lavora all'estensione al campo delle deformazioni finite della teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi (il comportamento costitutivo dello scheletro solido è supposto elastico); relativi a questo studio sono, ad esempio, i contributi di Gibson e dei suoi collaboratori [30].

Più recentemente, la consolidazione tridimensionale in deformazioni finite è stata trattata come estensione ipoelastica della teoria infinitesimale (cfr., ad es., [18]). E' invece basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, lo studio della consolidazione elasto-plastica in deformazioni finite riportato in [9].

Sempre nell'ambito della modellazione costitutiva dei geomateriali in deformazioni finite, risultano interessanti alcuni contributi sviluppati al di fuori della teoria della plasticità classica. In particolare, nell'ambito della cosiddetta "ipoplasticità", le relazioni costitutive vengono assegnate in forma incrementalmente non lineare (cfr., ad es., [42]).

Lo sviluppo di un efficace modello elasto-plastico in deformazioni finite per le argille, non solo è giustificato dall'osservazione della risposta meccanica di questi materiali (cfr par. 3.6), ma è anche indispensabile ad una corretta analisi di vari problemi geotecnici, come quelli riguardanti i pendii soggetti a grandi deformazioni oppure la stabilità di strutture a torre<sup>2</sup>.

Un Cam-clay Modificato in deformazioni finite, basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, è presentato in [78]; il comportamento in compressione isotropa è modellato utilizzando le tradizionali relazioni lineari  $v - \ln p$  (cfr par. 3.3), la rigidità elastica a taglio è supposta costante (cfr. par. 4.6.1). Lo sviluppo di un'altra estensione del Cam-clay Modificato alle deformazioni finite è attualmente in corso [85].

Il modello Cam-clay descritto nel seguito è formulato nell'ambito della teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa [14, 15, 16, 17]. In particolare, il modello si inquadra nella classe di legami elasto-plastici moltiplicativi caratterizzati da una funzione di snervamento convessa formulata in termini di tensioni e di variabili interne *vere*, cioè definite nella configurazione corrente [75]. In questo capitolo, la presentazione del modello Cam-clay in deformazioni finite è anticipata dalla formulazione generale di questa classe di legami. Infatti, dopo aver discusso la decomposizione moltiplicativa (par. 4.2), sono valutate le restrizioni imposte dall'assioma di obiettività sulla forma del criterio di snervamento (par. 4.3.1). In seguito, per la classe considerata, viene caratterizzata l'evoluzione della funzione di dissipazione plastica (par. 4.3.2), e quindi, utilizzando il Principio di Massima Dissipazione Plastica, è ricavata la forma generale delle equazioni evolutive (par. 4.3.3). La formulazione viene quindi ridotta allo spazio delle direzioni principali (par. 4.3.4).

La formulazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite è presentata e discussa nel par. 4.4. Il legame elastico è definito assegnando un potenziale che implica la dipendenza di entrambe le rigidità, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media sia dal deviatore dello sforzo (par. 4.4.1). Il criterio di snervamento del Cam-clay Modificato, viene esteso al campo delle deformazioni finite, utilizzando, come misura di sforzo, il tensore di Kirchhoff (par. 4.4.2). Si particularizzano le equazioni di flusso associato ricavate, in forma generale, nei paragrafi precedenti (par. 4.4.3). La legge di incrudimento viene definita assegnando l'espressione del contributo energetico della corrispondente variabile interna: la deformazione volumetrica plastica (par. 4.4.4).

Le principali implicazioni del modello vengono discusse e confrontate con quelle derivanti da altre ipotesi costitutive (par. 4.5). Particolare attenzione viene rivolta all'analisi della descrizione, da parte del modello, del comportamento in compressione isotropa (par. 4.5.1). Vengono inoltre evidenziati alcuni limiti di applicabilità (par. 4.5.2). Il significato fisico dei parametri del modello è chiarito nel par. 4.5.3. Infine,

---

<sup>2</sup>Al crescere dell'inclinazione dell'asse di una struttura a torre corrisponde un incremento dell'eccentricità del carico verticale. Un modello in deformazioni infinitesime, in cui si fa coincidere la geometria della configurazione corrente con quella della configurazione di riferimento, non può tenere conto di questo importantissimo effetto. Per tale motivo, nelle analisi di strutture a torre svolte nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, si applica, oltre al carico verticale, un momento ribaltante; tale momento viene progressivamente aggiornato nel corso dello svolgimento dell'analisi, sulla base della rotazione calcolata (cfr., ad es., [12]).

sono riportate alcune osservazioni su due legami elastici alternativi (par. 4.6).

## 4.2 La decomposizione moltiplicativa e le sue implicazioni cinematiche

La teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa si basa sulla seguente legge di decomposizione del tensore gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}) \mathbf{F}^p(\mathbf{X}) \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{F}^e(\mathbf{X})$  e  $\mathbf{F}^p(\mathbf{X})$  sono detti, rispettivamente, gradienti di deformazione elastica e plastica (Fig. 4.1). In particolare, il tensore  $\mathbf{F}^{e^{-1}}$  è definito come l'operatore che scarica le tensioni in  $\mathbf{x} \in \varphi(\mathcal{B})$ . Quindi, se si indica come *intermedia* la configurazione a cui si perviene annullando lo stato tensionale corrente, l'applicazione di  $\mathbf{F}^{e^{-1}}$  su  $\varphi(\mathcal{B})$  fornisce tale configurazione. Il gradiente di deformazione plastica  $\mathbf{F}^p$ , invece, fornisce la configurazione intermedia a partire da quella di riferimento  $\mathcal{B}$ .

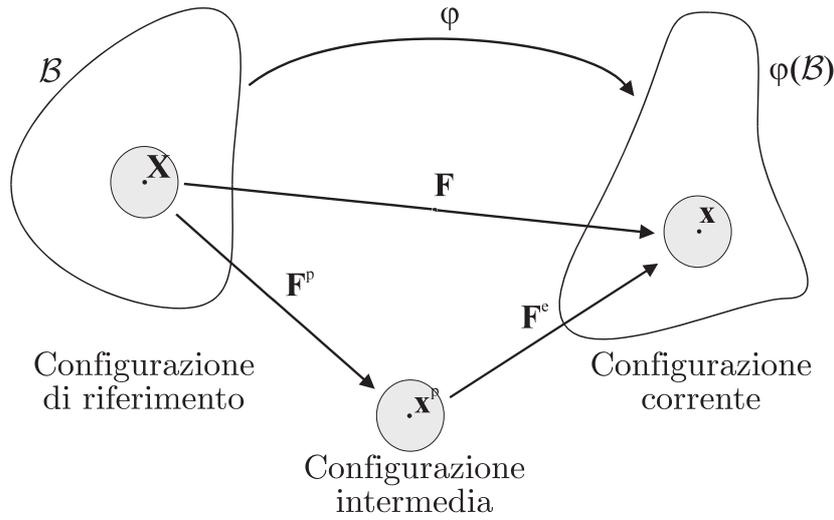


Figura 4.1: Decomposizione elasto-plastica moltiplicativa del gradiente di deformazione

Si considerano, adesso, alcune delle relazioni cinematiche associate alla decomposizione (4.1). A tal fine, si riportano le definizioni del tensore di Cauchy-Green destro di deformazione totale e di quello di deformazione plastica:

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \mathbf{C}^p := \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \quad (4.2)$$

Mentre le componenti totale ed elastica del tensore di Cauchy-Green sinistro sono rispettivamente:

$$\mathbf{b} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad \mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad (4.3)$$

Dalla definizione di  $\mathbf{b}^e$  e dalla decomposizione moltiplicativa (4.1), si ricava:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \mathbf{F}^{p^{-1}} \mathbf{F}^{p^{-T}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \left( \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \right)^{-1} \mathbf{F}^T$$

che, considerando la (4.2), fornisce la relazione<sup>3</sup>:

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{C}^{p-1}\mathbf{F}^T \quad (4.4)$$

Analogamente a quanto fatto per il tensore degli sforzi di Kirchhoff (2.68), si definisce la derivata di Lie del tensore sinistro di Cauchy-Green elastico:

$$L_v\mathbf{b}^e := \mathbf{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}^e\mathbf{F}^{-T}] \right\} \mathbf{F}^T \quad (4.5)$$

se si sostituisce la (4.4), si ottiene:

$$L_v\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{C}^{p-1}) \mathbf{F}^T \quad (4.6)$$

Infine, derivando la (4.4) rispetto al tempo, si ha:

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T + L_v\mathbf{b}^e \quad (4.7)$$

dove  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  è la velocità spaziale di deformazione.

Come si vedrà nei seguenti paragrafi, questa relazione cinematica incrementale è di fondamentale importanza nella formulazione di un modello elasto-plastico moltiplicativo.

### 4.3 Una classe di legami elasto-plastici moltiplicativi

Il modello Cam-clay discusso nel presente capitolo si inquadra nella classe di legami elasto-plastici moltiplicativi caratterizzati da una funzione di snervamento *convessa* formulata in termini di tensioni e di variabili interne *vere*. Nel seguito si richiama la formulazione generale di questa classe di legami [75].

Si consideri, quindi, un *dominio di elasticità* individuato da un criterio di snervamento definito sulla configurazione corrente:

$$E_d := \{(\boldsymbol{\tau}, i) \in \varphi(\mathcal{B}) \times R \mid \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0\} \quad (4.8)$$

dove  $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)$  è la funzione che fissa il criterio di snervamento ed  $i$  è la variabile interna (una misura di tensione) che caratterizza l'incrudimento del materiale. Si ipotizzi che tale dominio sia convesso.

---

<sup>3</sup>Secondo una terminologia frequentemente impiegata (cfr., ad es., [51]) questo tipo di operazioni sono dette di *push-forward*; questa, infatti, è un'operazione di push-forward su  $\mathbf{C}^p$ , definito nella configurazione intermedia, che fornisce  $\mathbf{b}^e$ , definito nella configurazione corrente.

### 4.3.1 Forma del criterio di snervamento e del potenziale elastico

L'assioma di obiettività (cfr. par. 2.4) limita la scelta di  $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)$  nell'ambito delle funzioni *isotrope*. Si considerino, infatti, due moti,  $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$  e  $\mathbf{x}^+ = \phi_t^+(\mathbf{X})$ , che differiscono solo per un cambiamento di osservatore; cioè:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{q} + \mathbf{Q}[\mathbf{x} - \mathbf{o}] \quad (4.9)$$

dove  $\mathbf{o}$  e  $\mathbf{q}$  appartengono a  $\mathcal{V}$  e  $\mathbf{Q} \in Orth$ . Il tensore di Kirchhoff si trasforma secondo la:  $\boldsymbol{\tau}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T$ . Quindi l'assioma di obiettività richiede:

$$\check{f}(\mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T, i) = \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \quad \forall \mathbf{Q} \in Orth \quad (4.10)$$

cioè l'isotropia della funzione di snervamento<sup>4</sup>.

Per coerenza, anche la funzione che esprime l'energia di deformazione elastica si assume isotropa. Si ricorda (cfr. par. 2.6.2) che nel caso di risposta isotropa, e soltanto in questo caso, l'energia di deformazione dipende dal moto attraverso il tensore di Cauchy-Green sinistro; cioè esiste una funzione  $\check{W}(\mathbf{b}^e) : Sym^+ \rightarrow R$  tale che  $\check{W}(\mathbf{C}^e) = \check{W}(\mathbf{b}^e)$ .

### 4.3.2 Dissipazione plastica

In questo paragrafo, con riferimento alla classe di modelli in esame, sono valutate le condizioni imposte dalla legge di Clausius-Plank sulla dissipazione plastica.

Nel seguito si definisce l'*energia libera di Helmholtz* come:

$$\psi(\mathbf{b}^e, \xi) = \check{W}(\mathbf{b}^e) + H(\xi) \quad (4.11)$$

dove  $\check{W}(\mathbf{b}^e)$  è l'energia di deformazione elastica (cfr. par. 2.5) e  $H$  è il contributo energetico della variabile interna di incrudimento (una misura di deformazione)  $\xi$ .

In ambito puramente meccanico, la densità di *dissipazione di energia* è data localmente dalla differenza tra la potenza degli sforzi e la variazione temporale di energia libera:

$$D := \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} - \frac{d\psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{dt} \quad (4.12)$$

dove, secondo la convenzione sui segni qui adottata, la velocità spaziale di deformazione è  $\mathbf{d} := -\text{sym}l$ .

Nel caso considerato,  $D$  coincide necessariamente con la densità di *dissipazione plastica*. Il secondo Principio della Termodinamica, così come viene espresso nella legge di Clausius-Plank, afferma che in ogni processo la dissipazione di energia è non-negativa. Tale principio costituisce pertanto un assioma di evoluzione:

$$D = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} - \dot{\psi}(\mathbf{b}^e, \xi) \geq 0 \quad (4.13)$$

<sup>4</sup>Si osservi che questa forte restrizione è ininfluenza nell'ambito del presente lavoro; il criterio di snervamento che ci si propone di estendere al campo delle deformazioni finite, il Cam-clay Modificato (3.28), è infatti definito da una funzione isotropa.

Si osservi che il caso di dissipazione nulla è relativo ad un processo puramente elastico (cfr. par. 2.5).

Se si deriva rispetto al tempo la funzione energia libera, tenendo conto della relazione (4.7), si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{b}^e, \xi) &= \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \cdot (\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + L_v \mathbf{b}^e) + \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} = \\ &= 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \cdot \left[ \mathbf{1} + \frac{1}{2} (L_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] + \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Per effetto dell'ipotesi di isotropia,  $\mathbf{b}^e$  commuta con  $\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi) / \partial \mathbf{b}^e$ , sicchè la parte antisimmetrica di  $\mathbf{l}$ , cioè la velocità spaziale di rotazione  $\mathbf{w}$ , scompare dalla (4.14). Si sostituisce quindi quest'ultima nella (4.13) e si ottiene la seguente disequazione:

$$D = \left( \boldsymbol{\tau} + 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \right) \cdot \mathbf{d} + 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \cdot \left[ -\frac{1}{2} (L_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] - \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0$$

Poichè la precedente è valida per ogni processo ammissibile, si ha (cfr. [21]):

$$\boldsymbol{\tau} = -2 \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \quad D = \boldsymbol{\tau} \cdot \left[ \frac{1}{2} (L_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] - i \dot{\xi} \geq 0 \quad (4.15)$$

dove  $i$  è la variabile di incrudimento (una misura di tensione), coniugata di  $\xi$ ; cioè:

$$i := \frac{\partial \psi(\mathbf{b}^e, \xi)}{\partial \xi} \quad (4.16)$$

La (4.15<sub>1</sub>) rappresenta la relazione costitutiva iperelastica fra il tensore di Kirchhoff ed il tensore di Cauchy-Green sinistro. Questa equazione e la (4.16), per effetto della definizione di  $\psi$  (4.11), possono essere scritte, rispettivamente, come:

$$\boldsymbol{\tau} = -2 \frac{\partial \check{W}(\mathbf{b}^e)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \quad (4.17)$$

$$i = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \quad (4.18)$$

La (4.15<sub>2</sub>) è una forma ridotta dell'assioma di evoluzione (4.13) e sarà impiegata, nel seguente paragrafo, per ricavare la forma generale delle equazioni evolutive.

### 4.3.3 Forma delle equazioni evolutive

Secondo il *Principio di Massima Dissipazione Plastica* [37], in una data configurazione deformata del corpo, con configurazione intermedia e coppia  $\{L_v \mathbf{b}^e, \dot{\xi}\}$  assegnate, l'effettivo stato  $(\boldsymbol{\tau}, i) \in E_d$  fornisce un massimo della funzione di dissipazione  $D$ . Pertanto la disuguaglianza, ottenuta a partire dalla (4.15<sub>2</sub>):

$$[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*] \cdot \left[ \frac{1}{2} (L_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} \right] + [i - i^*] [-\dot{\xi}] \geq 0 \quad (4.19)$$

vale per ogni coppia ammissibile  $(\boldsymbol{\tau}^*, i^*) \in E_d$ .

Si prova che la precedente disuguaglianza è verificata se e soltanto se i coefficienti  $\left\{ \frac{1}{2} (L_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1}, -\dot{\xi} \right\}$  giacciono in un cono normale alla frontiera di  $E_d$  nel punto  $(\boldsymbol{\tau}, i)$ . In particolare, se la frontiera  $\partial E_d$  è definita da una funzione di snervamento regolare, si ottengono le *equazioni evolutive*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_v \mathbf{b}^e &= \dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right] \mathbf{b}^e \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i} \right] \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

I vincoli (4.20<sub>3</sub>) sono le condizioni di carico/scarico plastico espresse nella classica forma di *Kuhn-Tucker* [41, 49].

#### 4.3.4 Riduzione allo spazio delle direzioni principali

La trattazione della classe di legami elasto-plastici moltiplicativi qui considerata, può subire una importante semplificazione. La formulazione può essere infatti ridotta allo spazio generato dalla base  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  in  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in \mathcal{S}$ .

L'isotropia del legame elastico fa coincidere le direzioni principali del tensore di Cauchy-Green sinistro elastico con quelle del tensore degli sforzi di Kirchhoff (cfr. par. 2.6.2). Si richiamano le decomposizioni spettrali di  $\mathbf{b}^e$  e di  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^e)^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (4.21)$$

Si introduce il *vettore delle tensioni principali di Kirchhoff*:

$$\boldsymbol{\beta} := \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e vengono definite le *deformazioni logaritmiche principali elastiche* come:

$$\rho_A^e := -\ln \lambda_A^e \quad A = 1, 2, 3 \quad (4.23)$$

queste sono ordinate nel vettore:

$$\boldsymbol{\rho}^e := \begin{bmatrix} \rho_1^e \\ \rho_2^e \\ \rho_3^e \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

L'ipotesi di isotropia del legame elastico implica che l'energia di deformazione può essere espressa in funzione degli allungamenti principali elastici e quindi dei loro logaritmi (cfr. par. 2.6.2). In altre parole, esiste una funzione  $\hat{W} : \mathcal{V} \rightarrow R$  tale che

$\check{W}(\mathbf{b}^e) = \hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$ . Utilizzando l'equazione (4.17) e le definizioni di  $\boldsymbol{\rho}^e$  (4.24) e di  $\boldsymbol{\beta}$  (4.22), si perviene facilmente alla seguente relazione costitutiva iperelastica:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \quad (4.25)$$

L'ipotesi di isotropia della funzione di snervamento implica l'esistenza di una funzione  $\hat{f} : \mathcal{V} \times R \rightarrow R$  tale che  $\check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)$ . Dopo facili passaggi si perviene alla seguente decomposizione spettrale:

$$\frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \sum_{A=1}^3 \left[ \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (4.26)$$

relazione che si rivelerà utile per la formulazione del criterio di flusso del modello.

## 4.4 Cam-clay Modificato in deformazioni finite

La formulazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite, sviluppato nell'ambito della classe di modelli elasto-plastici moltiplicativi finora discussa, è esposta nei seguenti paragrafi.

### Preliminari cinematici.

Il vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche  $\boldsymbol{\rho}^e$  può essere decomposto, coerentemente con quanto richiamato nel par. 2.2.1, nella seguente maniera:

$$\boldsymbol{\rho}^e = \frac{1}{3} \check{\theta}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^e \quad \text{con} \quad \mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

dove:

$$\check{\theta}^e := -\ln J^e = -\ln(\lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e) \quad (4.28)$$

è la *deformazione volumetrica logaritmica elastica*, mentre:

$$\mathbf{e}^e := \begin{bmatrix} e_1^e \\ e_2^e \\ e_3^e \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad e_A^e := -\ln \left( J^{e^{-\frac{1}{3}}} \lambda_A^e \right) \quad (4.29)$$

sarà indicato come *vettore delle distorsioni logaritmiche principali*; si osservi, infatti, che le quantità  $\bar{\lambda}_A^{e^2} := \left( J^{e^{-1/3}} \lambda_A^e \right)^2$  sono gli autovalori delle parti isocore dei tensori di deformazione di Cauchy-Green sinistro  $\bar{\mathbf{b}}^e := J^{e^{-2/3}} \mathbf{b}^e$  e destro  $\bar{\mathbf{C}}^e = J^{e^{-2/3}} \mathbf{C}^e$  (cfr. par. 2.2.1).

La formula di decomposizione moltiplicativa (4.1) implica  $J = J^e J^p$ , dove  $J^p := \det [\mathbf{F}^p]$ . Quindi, definendo la deformazione volumetrica logaritmica totale come<sup>5</sup>:

$$\theta := -\ln J \quad (4.30)$$

si ottiene:

$$\theta = \check{\theta}^e + \check{\theta}^p \quad (4.31)$$

dove:

$$\check{\theta}^p := -\ln J^p \quad (4.32)$$

è la parte plastica della deformazione volumetrica logaritmica.

#### 4.4.1 Legame elastico

Si assume che la densità di energia di deformazione elastica sia fornita dalla seguente funzione isotropa:

$$\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e) := p_0 \check{k} \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) + \alpha p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \|\mathbf{e}^e\|^2 \quad (4.33)$$

dove  $\alpha$  e  $\check{k}$  sono due costanti adimensionali positive (discusse nel par. 4.5.3) e la quantità  $p_0$ , come si vedrà più avanti, viene determinata specificando le condizioni iniziali. La funzione (4.33) costituisce un'estensione al campo delle deformazioni finite del potenziale elastico proposto da Houlsby in [38]. Secondo la (4.25), il vettore delle tensioni principali di Kirchhoff si ottiene differenziando la (4.33):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &:= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \check{\theta}^e} \frac{\partial \check{\theta}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e}\right)^T \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} = \\ &= \frac{\partial \hat{W}}{\partial \check{\theta}^e} \mathbf{1} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} \end{aligned} \quad (4.34)$$

In particolare si ha:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \check{\theta}^e} = p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) + \frac{\alpha}{\check{k}} p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \|\mathbf{e}^e\|^2 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{e}^e} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \mathbf{e}^e \quad (4.36)$$

Sostituendo le (4.35-4.36) nella (4.34), si ottiene:

$$\boldsymbol{\beta} = p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^e\|^2\right) \mathbf{1} + 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \mathbf{e}^e \quad (4.37)$$

---

<sup>5</sup>Come verrà mostrato nel par. 4.5.1, questa definizione di  $\theta$  coincide con quella espressa dalla (3.22).

Questo vettore può essere espresso nella forma:

$$\boldsymbol{\beta} = \check{p} \mathbf{1} + \mathbf{t} \quad (4.38)$$

dove:

$$\check{p} = p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^e\|^2\right) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{t} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \mathbf{e}^e \quad (4.40)$$

Utilizzando la definizione di  $\boldsymbol{\beta}$  e la sua decomposizione (4.38), è facile verificare che:

$$\check{p} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

dove i  $\bar{\beta}_A$  sono gli autovalori di  $\text{dev}(\boldsymbol{\tau})$ . E' quindi  $\check{p}$  la *tensione media di Kirchhoff*; mentre  $\mathbf{t}$  sarà indicato come il *vettore delle tensioni deviatoriche principali di Kirchhoff*. Si osserva che:

$$\|\mathbf{t}\| = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| \quad (4.43)$$

inoltre, dalla definizione dello sforzo di Kirchhoff (2.59), si ricavano le seguenti relazioni fra gli invarianti di  $\boldsymbol{\tau}$  e quelli di  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\check{p} = Jp \quad (4.44)$$

$$\|\mathbf{t}\| = J \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \quad (4.45)$$

Ponendo adesso, nell'equazione costitutiva (4.39),  $\check{\theta}^e = 0$  ed  $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$ , si ottiene  $\check{p} = p_0$ ; quindi,  $p_0$  è il valore *iniziale* della tensione media. Ovviamente, essendo  $J = 1$  nella configurazione di riferimento, la (4.44) implica che i due valori iniziali di tensione media, di Kirchhoff e di Cauchy, coincidono.

Le relazioni costitutive (4.39-4.40) implicano l'esistenza di accoppiamento volumetrico - deviatorico in campo elastico. Al fine di valutare gli effetti di questo accoppiamento sulla rigidità elastica, sia a taglio sia volumetrica, dalla relazione costitutiva (4.39) si ricavi la quantità:

$$p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) = \frac{\check{k}}{\check{k} + \alpha \|\mathbf{e}^e\|^2} \check{p} \quad (4.46)$$

e la si sostituisca nella relazione costitutiva (4.40); si ottiene:

$$\|\mathbf{t}\| = \frac{2\alpha \check{k} \|\mathbf{e}^e\|}{\check{k} + \alpha \|\mathbf{e}^e\|^2} \check{p} \quad (4.47)$$

Si espliciti, inoltre, la quantità  $\|\mathbf{e}^e\|$  nella (4.40):

$$\|\mathbf{e}^e\| = \frac{\|\mathbf{t}\|}{2\alpha p_0} \exp\left(-\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \quad (4.48)$$

e la si sostituisca nella (4.39); si ha:

$$\check{p} = p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \left[1 + \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{4\alpha\check{k}p_0^2} \exp\left(-2\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right)\right] \quad (4.49)$$

In Fig. 4.2a, sono riportati, in un diagramma  $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$ , i grafici della (4.47) corrispondenti a percorsi tensionali in cui la tensione media di Kirchhoff viene mantenuta costante ( $\check{p} = 50$ ,  $\check{p} = 100$  e  $\check{p} = 150$  kPa). E' evidente come la rigidezza elastica a taglio cresca con  $\check{p}$ . Questo risultato viene quindi ottenuto, diversamente dal caso di altre formulazioni (cfr. par. 3.5), nell'ambito di un legame iperelastico.

I grafici della (4.49), tracciati sul diagramma  $\check{p} - \theta^e$  di Fig. 4.2b, sono invece corrispondenti a percorsi in cui è la misura di tensione deviatorica  $\|\mathbf{t}\|$  ad essere mantenuta costante ( $\|\mathbf{t}\| = 0$ ,  $\|\mathbf{t}\| = 100$  e  $\|\mathbf{t}\| = 150$  kPa). Questi ultimi grafici mostrano che l'influenza di  $\|\mathbf{t}\|$  sulla rigidezza volumetrica è modesta; al crescere della deformazione  $\theta^e$ , infatti, il secondo addendo della (4.49) decresce, e le curve tendono a coincidere. Nei diagrammi di Fig. 4.2 si è posto  $\check{k} = 0.05$ ,  $\alpha = 100$  e  $p_0 = 100$  kPa.

Infine, si osservi che l'energia di deformazione  $\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$  espressa dalla (4.33) soddisfa la condizione:

$$\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\rho}^e \in \mathcal{V}$$

se e solo se sono positive la tensione media iniziale  $p_0$  e le costanti del materiale  $\alpha$  e  $\check{k}$ .

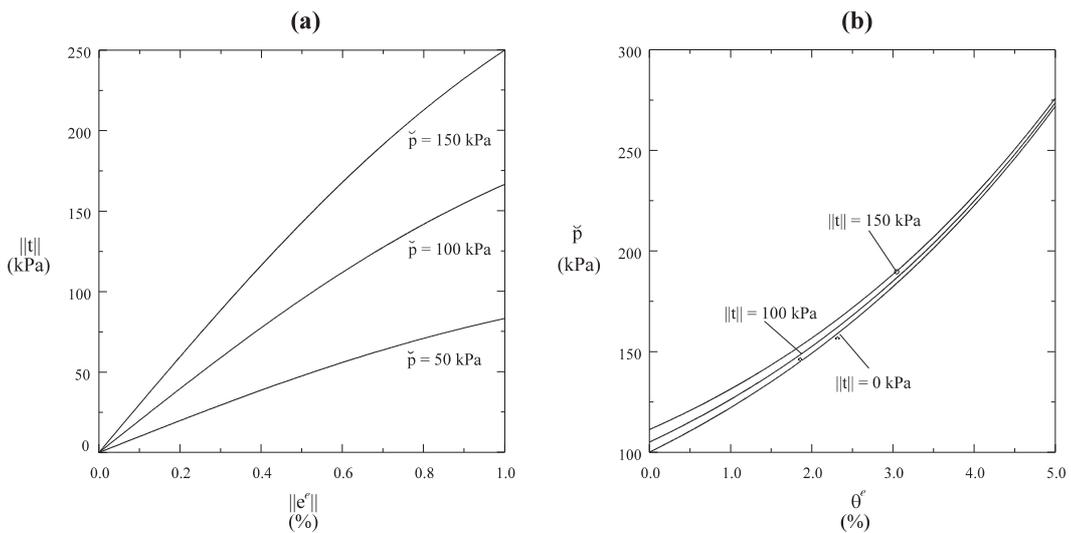


Figura 4.2: Legame elastico. Influenza della tensione media  $\check{p}$  sulla rigidezza a taglio (a) e della tensione deviatorica  $\|\mathbf{t}\|$  sulla rigidezza volumetrica (b)

### 4.4.2 Criterio di snervamento

Il dominio di elasticità è individuato dalla seguente funzione convessa ed isotropa definita sulla configurazione corrente:

$$\hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = \frac{\check{q}^2}{M^2} + \check{p}(\check{p} - \check{p}_c) = 0 \quad (4.50)$$

Si tratta di un'estensione al campo delle deformazioni finite del criterio di snervamento del Cam-clay Modificato, ottenuta sostituendo nella (3.28) gli invarianti dello sforzo di Cauchy con quelli del tensore di Kirchhoff; in particolare è:

$$\check{q} := \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{t}\| \quad (4.51)$$

e quindi:

$$\check{q} = Jq \quad (4.52)$$

la pressione di preconsolidazione  $\check{p}_c$  è la variabile tensionale di incrudimento ( $i = \check{p}_c$ ). Si noti che la pendenza  $M$  della retta di stato critico nel piano  $q - p$ , coincide con quella che caratterizza la stessa retta nel piano  $\check{q} - \check{p}$ ; infatti le (4.44, 4.52) implicano:

$$\frac{q}{p} = \frac{\check{q}}{\check{p}} \quad (4.53)$$

### 4.4.3 Legge di flusso

La legge di flusso del modello considerato si ricava a partire dall'equazione evolutiva (4.20<sub>1</sub>). In questa si sostituisce la (4.26), in modo da ottenere:

$$\frac{1}{2} L_v \mathbf{b}^e = \dot{\gamma} \left[ \sum_{A=1}^3 \left( \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \right] \mathbf{b}^e \quad (4.54)$$

Considerando l'espressione (4.38), la derivata della funzione di snervamento rispetto al vettore delle tensioni principali può essere calcolata come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}} \frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \left( \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)^T \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}} \mathbf{1} + \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

in particolare, dato che:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}} = 2\check{p} - \check{p}_c \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \quad (4.56)$$

attraverso la (4.55), si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \left[ \frac{1}{3} (2\check{p} - \check{p}_c) \mathbf{1} + \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \right] \quad (4.57)$$

la cui sostituzione nella (4.54) fornisce la legge di flusso cercata:

$$\frac{1}{2}L_v \mathbf{b}^e = \dot{\gamma} \left[ \sum_{A=1}^3 \left( \frac{1}{3} (2\check{p} - \check{p}_c) + \frac{3}{M^2} t_A \right) \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \right] \mathbf{b}^e \quad (4.58)$$

#### 4.4.4 Legge di incrudimento

La componente volumetrica della deformazione logaritmica plastica è la variabile di incrudimento ( $\xi = \check{\theta}^p$ ). Si assume che il suo contributo energetico nella (4.11) sia dato dalla funzione:

$$H(\check{\theta}^p) = \check{p}_{c0} \left( \check{\lambda} - \check{k} \right) \exp \left( \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \check{\theta}^p \right) \quad (4.59)$$

Richiamando la (4.18), si ha:

$$\check{p}_c = \frac{\partial H(\check{\theta}^p)}{\partial \check{\theta}^p} \quad (4.60)$$

e, quindi, la seguente legge di incrudimento:

$$\check{p}_c = \check{p}_{c0} \exp \left( \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \check{\theta}^p \right) \quad (4.61)$$

##### Osservazione 4.4.1

Si può verificare che l'evoluzione di  $\check{\theta}^p$  prescritta dalla legge di flusso associata (4.58) è diversa da quella implicata dall'equazione (4.20<sub>2</sub>), cioè:

$$\dot{\check{\theta}}^p \neq -\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, p_c)}{\partial p_c} \right] \quad (4.62)$$

La legge di incrudimento è quindi “non-associata”.

## 4.5 Studio del modello

Nel seguito si procede allo studio del legame elasto-plastico proposto. Le sue principali implicazioni vengono discusse e confrontate con quelle relative alle formulazioni richiamate nel Cap. 3.

### 4.5.1 Relazioni $\check{p} - v$ in compressione isotropa

Come si è richiamato nel par. 2.2.1,  $J := \det[\mathbf{F}(\mathbf{X})]$  fornisce la misura del volume corrente per unità di volume nella configurazione di riferimento; se si considera la definizione di volume specifico data nel par. 3.2, si può scrivere:

$$J = \frac{vV_s}{v_0V_{s0}} \quad (4.63)$$

dove  $V_s$  è il volume della fase solida misurato nella configurazione corrente,  $V_{s0}$  è il volume della stessa fase nella configurazione di riferimento e  $v_0$  è il volume specifico iniziale. Se si ipotizza che la comprimibilità della fase solida sia trascurabile<sup>6</sup> (cfr. par. 3.2), si ha  $V_s = V_{s0}$  e quindi:

$$J = \frac{v}{v_0} \quad (4.64)$$

Pertanto, dalla (4.30) e dalla (4.64), si ha:

$$\theta = -\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad (4.65)$$

quest'ultima, per effetto della decomposizione (4.31), implica:

$$\check{\theta}^e = -\ln\left(\frac{v}{\check{v}_p}\right) \quad \check{\theta}^p = -\ln\left(\frac{\check{v}_p}{v_0}\right) \quad (4.66)$$

Come si mostrerà tra poco, il significato del termine  $\check{v}_p$  che compare nelle due precedenti relazioni cinematiche, è analogo a quello enunciato a proposito di  $v_p$  (cfr. par. 3.3).

La relazione costitutiva per compressione isotropa in *campo elastico*, si ricava ponendo  $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$  nella (4.39):

$$\check{p} = p_0 \exp\left(\frac{\check{\theta}^e}{\check{k}}\right) \quad (4.67)$$

se si sostituisce in questa la (4.66<sub>1</sub>), si ottiene la seguente relazione pressione-volume per argille *sovraconsolidate*:

$$\ln\left(\frac{v}{\check{v}_p}\right) = -\check{k} \ln\left(\frac{\check{p}}{p_0}\right) \quad (4.68)$$

Si osserva che  $\check{v}_p$  è il volume a cui si perviene scaricando, a partire dalla configurazione corrente, fino al valore di pressione iniziale. Pertanto,  $\check{v}_p$  è la misura del volume specifico nella configurazione intermedia.

La relazione costitutiva per compressione isotropa in *campo elasto-plastico* è fornita dalla legge di incrudimento (4.61); se si sostituisce in questa la (4.66<sub>2</sub>), si ottiene:

$$\ln\left(\frac{\check{v}_p}{v_0}\right) + (\check{\lambda} - \check{k}) \ln\left(\frac{\check{p}_c}{\check{p}_{c0}}\right) = 0 \quad (4.69)$$

Inoltre, indicando con  $v_c$  e  $v_{c0}$  i valori di volume specifico rispettivamente corrispondenti a  $\check{p}_c$  ed a  $\check{p}_{c0}$ , è facile verificare la validità della seguente equazione (Fig. 4.3):

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = \ln\left(\frac{\check{v}_p}{v_0}\right) - \check{k} \ln\left(\frac{\check{p}_c}{\check{p}_{c0}}\right) \quad (4.70)$$

<sup>6</sup>Si osservi che questa ipotesi non è assolutamente necessaria nella formulazione del modello. Comunque, nella maggior parte dei casi, si osserva sperimentalmente che le deformazioni volumetriche delle argille sono dovute solo in minima parte al contributo della fase solida. Per questo motivo  $v$  è la misura volumetrica più impiegata, soprattutto in ambito sperimentale. A causa di queste considerazioni, nel presente lavoro si è scelto di fare riferimento al volume specifico.

dalla sostituzione di questa nella (4.69) si ricava la seguente relazione pressione-volume per argille *normal-consolidate*:

$$\ln \left( \frac{v_c}{v_{c0}} \right) = -\check{\lambda} \ln \left( \frac{\check{p}_c}{\check{p}_{c0}} \right) \tag{4.71}$$

Pertanto il legame elasto-plastico considerato implica, in compressione isotropa, relazioni lineari di tipo  $\ln v - \ln p$ . Queste relazioni bi-logaritmiche non conducono agli inconvenienti causati dall'impiego di relazioni lineari  $v - \ln p$  (cfr. par. 3.3 e par. 3.5). Ad esempio, secondo le (4.68-4.71), la deformabilità dell'argilla è indipendente dal volume specifico, sia in campo elastico sia in campo elasto-plastico.

Inoltre, queste relazioni sono qui utilizzate nell'ambito di una formulazione in deformazioni finite; questa scelta è l'unica coerente con le motivazioni, basate a loro volta su dati sperimentali [13], che ne giustificano l'impiego al posto delle classiche relazioni  $v - \ln p$  (cfr. par. 3.6).

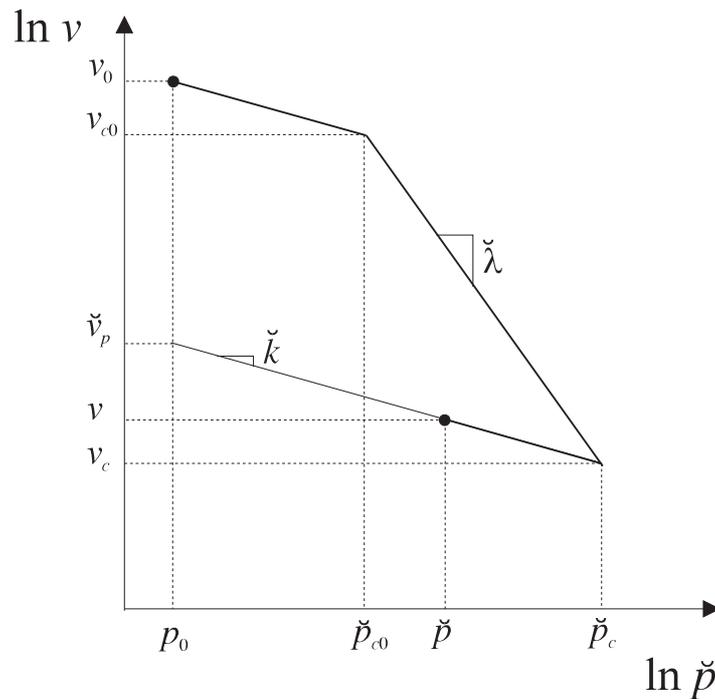


Figura 4.3: Relazione bilogarithmica fra pressione di Kirchhoff e volume specifico

### Soluzione del problema di classificazione

Con riferimento al legame elastico del modello, si affronta, adesso, la soluzione del problema di classificazione relativo al comportamento in compressione isotropa. Operazione, questa, che si rivelerà utile nel prosieguo del capitolo.

La relazione bi-logarithmica (3.33) fra pressione di Cauchy e volume specifico:

$$\ln \left( \frac{v}{v_p} \right) = -k^* \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \tag{4.72}$$

può essere scritta nella forma:

$$pv^{1/k^*} = p_0v_p^{1/k^*} \quad (4.73)$$

che, come è noto, caratterizza le trasformazioni adiabatiche nei gas. Si mostrerà adesso che questa circostanza non è soltanto un'analogia formale [13], ma la soluzione di un problema di classificazione (cfr. par. 2.6.1).

Si richiami la decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione elastico nelle sue parti volumetrica e distorsionale (cfr. par. 2.2.1):

$$\mathbf{F}^e = J^{e\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}^e \quad \text{dove:} \quad \det [\bar{\mathbf{F}}^e] = 1 \quad (4.74)$$

se si pone:

$$\hat{w}_v(J^e, \bar{\mathbf{F}}^e) := W(J^e \bar{\mathbf{F}}^e) \quad (4.75)$$

si può definire la *sottoenergia volumetrica* come:

$$w_v(J^e) := \inf [\hat{w}_v(J^e, \bar{\mathbf{F}}^e)]_{\det[\bar{\mathbf{F}}^e]=1} \quad (4.76)$$

Si ricorda che un materiale con una densità di energia di deformazione del tipo  $W(\mathbf{F}^e) = h(J^e)$  è classificato come un *fluido*; all'interno dei fluidi, la distinzione tra *liquidi* e *gas* può essere fatta analizzando il comportamento del fluido sotto *deformazioni estreme* [65].

Si consideri allora l'espressione (4.33) della densità di energia di deformazione elastica. È facile verificare che la sottoenergia volumetrica si ottiene ponendo  $\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{I}$ , cioè  $\mathbf{e}^e = \mathbf{0}$  in  $\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$ ; in termini di  $J^e$  si ha:

$$w_v(J^e) = p_0 \check{k} J^{e-1/\check{k}} \quad (4.77)$$

Nel caso di deformazioni estreme si osserva:

$$\begin{aligned} J^e \rightarrow 0 \quad (\theta^e \rightarrow \infty) & \Rightarrow w_v(J^e) \rightarrow \infty \\ J^e \rightarrow \infty \quad (\theta^e \rightarrow -\infty) & \Rightarrow w_v(J^e) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

quest'ultimo risultato, cioè che l'energia si annulla se si espande indefinitamente il materiale, è la condizione per classificare come *gas* un fluido. Si ha quindi che il comportamento costitutivo elastico *in compressione isotropa* descritto dalla (4.33), e quindi, in generale, da relazioni lineari  $\ln v - \ln p$ , è quello caratteristico di un gas.

Questo aspetto della relazione impiegata per descrivere la risposta isotropa delle argille ha un'altra interessante conseguenza; si ha infatti:

$$w_v(1) = p_0 \check{k} > 0 \quad (4.79)$$

cioè per deformazioni volumetriche nulle ( $J^e = 1, \theta^e = 0$ ), il corrispondente contributo energetico è diverso da zero.

**Confronto con le relazioni bi-logaritmiche in termini di pressioni di Cauchy**

Si richi amino le equazioni bi-logaritmiche in termini di pressioni di Cauchy (3.33-3.34):

$$\ln\left(\frac{v}{v_p}\right) = -k^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad \text{in campo } \textit{elastico} \quad (4.80)$$

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right) \quad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \quad (4.81)$$

E' di particolare importanza il confronto fra queste relazioni e le analoghe (4.68, 4.71) espresse in termini di pressioni di Kirchhoff ed utilizzate nel modello in deformazioni finite qui proposto:

$$\ln\left(\frac{v}{\check{v}_p}\right) = -\check{k} \ln\left(\frac{\check{p}}{p_0}\right) \quad \text{in campo } \textit{elastico} \quad (4.82)$$

$$\ln\left(\frac{v_c}{v_{c0}}\right) = -\check{\lambda} \ln\left(\frac{\check{p}_c}{\check{p}_{c0}}\right) \quad \text{in campo } \textit{elasto-plastico} \quad (4.83)$$

Si consideri, ad esempio, un campione inizialmente normal-consolidato ( $p_0 = p_{c0}$ ) e lo si comprima isotropicamente (Fig. 4.4). La sua risposta, secondo la relazione (4.81), è:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\lambda^* \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (4.84)$$

mentre in termini di pressioni di Kirchhoff, la (4.83) fornisce:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\check{\lambda} \ln\left(\frac{\check{p}}{p_0}\right) \quad (4.85)$$

Si sostituisca  $\check{p} = Jp$  in quest'ultima relazione; si ottiene:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) &= -\check{\lambda} \ln\left(\frac{Jp}{p_0}\right) = \\ &= -\check{\lambda} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - \check{\lambda} \ln J \end{aligned} \quad (4.86)$$

e quindi, essendo  $J = v/v_0$  (cfr. par. 4.5.1), si ha:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\check{\lambda}}{1 + \check{\lambda}} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (4.87)$$

Dal confronto fra questa relazione e la (4.84), si ricava:

$$\lambda^* = \frac{\check{\lambda}}{1 + \check{\lambda}} \quad (4.88)$$

Procedendo in modo analogo, con riferimento alla compressione isotropa di un campione inizialmente sovraconsolidato ( $p_0 < p_{c0}$ ), si prova che:

$$k^* = \frac{\check{k}}{1 + \check{k}} \quad (4.89)$$

Quindi, i parametri del modello  $\check{k}$  e  $\check{\lambda}$  possono essere ricavati da  $k^*$  e  $\lambda^*$  per mezzo delle relazioni:

$$\check{k} = \frac{k^*}{1 - k^*} \qquad \check{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \qquad (4.90)$$

Si osservi che per i valori di  $k^*$  e  $\lambda^*$  fisicamente possibili ( $k^*, \lambda^* \in ]0; 1[$ ), si ha  $\check{k} > k^*$  e  $\check{\lambda} > \lambda^*$  (Fig. 4.4).

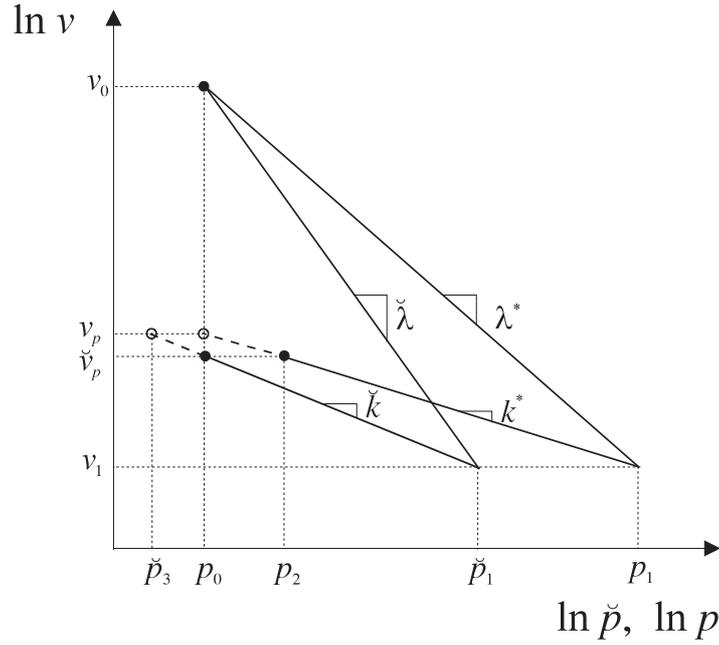


Figura 4.4: Relazioni pressione-volume in termini di sforzi di Kirchhoff e di Cauchy

Si supponga, adesso, di comprimere un campione, inizialmente normal-consolidato ( $p_0 = \check{p}_{c0}$ ), fino ad un valore di pressione di Kirchhoff  $\check{p}_1$ ; quindi lo si scarichi fino al valore di pressione iniziale  $\check{p}_2 = p_0$ . In Fig. 4.4, il grafico  $\ln \check{p} - \ln v$  relativo a questo percorso di carico è riportato insieme a quello corrispondente in termini di pressioni di Cauchy. Si osserva che quando la pressione di Kirchhoff viene scaricata fino al valore iniziale  $p_0$ , lo stesso non si verifica per la pressione di Cauchy; infatti risulta:

$$p_2 = J^{p-1} \check{p}_2 = J^{p-1} p_0 = \frac{\check{v}_p}{v_0} p_0 \qquad (4.91)$$

Affinchè la pressione di Cauchy recuperi il valore iniziale  $p_0$ , è necessario scaricare ulteriormente. In termini di pressione di Kirchhoff, come si ricava dalla (4.82), si perviene al valore:

$$\check{p}_3 = p_0 \left( \frac{\check{v}_p}{v_p} \right)^{1/\check{k}} \qquad (4.92)$$

Si noti che il risultato più importante di queste considerazioni è:

$$\check{v}_p \neq v_p \qquad (4.93)$$

tale differenza cresce al crescere della deformazione plastica.

Quindi, relativamente alle sole misure di volume, la configurazione intermedia “secondo Kirchhoff” non coincide con quella “secondo Cauchy”. Tale circostanza è conseguente all’aver assunto una pressione iniziale  $p_0$  non nulla. Questa ipotesi è necessaria non solo nel modello qui proposto, ma in ogni legame che fornisca la soluzione “gas-like” (4.78<sub>2</sub>) del problema di classificazione discusso nel precedente paragrafo. Inoltre, la possibilità di attribuire alla configurazione iniziale uno stato tensionale non nullo è in generale lecita.

Inoltre, se si richiamano rispettivamente le (3.36) e le (4.66):

$$\theta^e = -\ln \frac{v}{v_p} \quad \theta^p = -\ln \frac{v_p}{v_0} \quad (4.94)$$

$$\check{\theta}^e = -\ln \frac{v}{\check{v}_p} \quad \check{\theta}^p = -\ln \frac{\check{v}_p}{v_0} \quad (4.95)$$

si osserva che la (4.93) implica:

$$\theta^e \neq \check{\theta}^e \quad \theta^p \neq \check{\theta}^p$$

Si ha quindi, con riferimento alle deformazioni volumetriche, che la decomposizione elasto-plastica utilizzata dalle equazioni costitutive in termini di pressioni di Kirchhoff (4.82, 4.83) non coincide, in generale, con quella introdotta con le relazioni espresse in funzione dello sforzo di Cauchy (4.80, 4.81). Le deformazioni volumetriche *totali* coincidono ( $\theta = \check{\theta}$ ), è la loro decomposizione ad essere diversa.

Si osservi che considerazioni del tutto simili a quelle fatte in questo paragrafo possono essere, in generale, estese a qualsiasi modello elasto-plastico moltiplicativo le cui equazioni siano espresse in termini di tensore di Kirchhoff. Infatti, in modelli di questo tipo, circostanze analoghe a quelle prima discusse si verificano se si considera un processo deformativo a partire da una configurazione il cui stato tensionale non è nullo.

Al fine di valutare la relazione esistente fra le due misure di volume specifico  $\check{v}_p$  e  $v_p$ , si sostituisca  $\check{p}_3 = J_3 p_0$  nella (4.92); poichè risulta (Fig. 4.4):

$$J_3 = \frac{v_p}{v_0} \quad (4.96)$$

si ottiene:

$$\check{v}_p = \left( \frac{v_p}{v_0} \right)^{\check{k}} v_p \quad (4.97)$$

Da questa è facile ricavare, utilizzando la (4.94<sub>2</sub>) e la (4.95<sub>2</sub>), la relazione esistente fra le due componenti di deformazione volumetrica plastica:

$$\theta^p = \frac{1}{1 + \check{k}} \check{\theta}^p \quad (4.98)$$

La sua analogia fra le componenti di deformazione elastica, può essere ottenuta nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \theta^e &= \theta - \theta^p = \check{\theta}^e + \check{\theta}^p - \theta^p = \\ &= \check{\theta}^e + \check{\theta}^p - \frac{1}{1 + \check{k}} \check{\theta}^p \end{aligned} \quad (4.99)$$

Si ha quindi:

$$\theta^e = \check{\theta}^e + \frac{\check{k}}{1 + \check{k}} \check{\theta}^p \quad (4.100)$$

Si può infine, relativamente ai materiali qui considerati, dare una stima approssimata dello scostamento fra le due decomposizioni. Se si considera che il parametro  $\check{k}$  è normalmente compreso fra 0.01 e 0.1, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\check{\theta}^p}{\check{\theta}^e} &= 0.9090 \div 0.9901 \\ \frac{\theta^e}{\check{\theta}^e} &= 1 + 0.0099 \check{\theta}^p \div 1 + 0.0909 \check{\theta}^p \end{aligned}$$

se, ad esempio, la deformazione volumetrica plastica è pari al 30% si ha:

$$\frac{\theta^e}{\check{\theta}^e} = 1.0030 \div 1.0273$$

Nel seguito del presente lavoro si farà sempre riferimento alla decomposizione (4.31):

$$\theta = \check{\theta}^e + \check{\theta}^p \quad (4.101)$$

pertanto, per semplificare la notazione, il simbolo “ $\check{\cdot}$ ” in  $\check{\theta}^e$  ed in  $\check{\theta}^p$  sarà sottinteso.

## 4.5.2 Relazione costitutiva incrementale elastica

Si consideri il tensore del secondo ordine che lega gli incrementi  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  del vettore delle tensioni principali agli incrementi  $\dot{\boldsymbol{\rho}}^e$  del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche:

$$\mathbf{a}^e := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \quad (4.102)$$

le derivate che compaiono al secondo membro della precedente equazione possono essere calcolate come:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^e} \frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \left( \frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \right)^T \frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^e} \otimes \frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^e} \frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} \quad (4.104)$$

inoltre si ha:

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{1} \quad \frac{\partial \mathbf{e}^e}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (4.105)$$

E' quindi necessario derivare entrambe le relazioni che esprimono il legame iperelastico (4.39-4.40) sia rispetto alla componente volumetrica di deformazione  $\theta^e$  che rispetto al

vettore delle distorsioni  $\mathbf{e}^e$ :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^e} = \frac{\check{p}}{\check{k}} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^e} = \frac{\mathbf{t}}{\check{k}} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^e} = \frac{\mathbf{t}}{\check{k}} \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^e} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right) \mathbf{I} \quad (4.109)$$

Si pone:

$$g = p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right)$$

e si sostituiscono le quattro equazioni (4.106-4.109) nelle (4.103-4.104); si ottiene:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \rho^e} = \frac{1}{\check{k}} (\check{p} \mathbf{1} + \mathbf{t}) \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \rho^e} = \frac{1}{\check{k}} \mathbf{t} \otimes \mathbf{1} + 2\alpha g \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (4.111)$$

queste equazioni vengono a loro volta sostituite nella (4.102), unitamente alle (4.105); si ricava l'espressione del tensore elastico tangente :

$$\mathbf{a}^e = \frac{\check{p}}{\check{k}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\alpha g \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + \frac{1}{\check{k}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{1}) \quad (4.112)$$

in componenti:

$$a_{AB}^e = \frac{\check{p}}{\check{k}} - \frac{2\alpha g}{3} + 2\alpha g \delta_{AB} + \frac{1}{\check{k}} (t_A + t_B) \quad (4.113)$$

dove  $\delta_{AB}$  è il simbolo di Kronecker.

Si noti che, a causa dell'accoppiamento volumetrico-deviatorico, la forma della (4.112) differisce da quella di un tensore di elasticità del tipo di Lamè per la presenza del terzo addendo.

Si osserva che il tensore elastico tangente  $\mathbf{a}^e$  espresso dalla (4.112) non risulta definito positivo; cioè:

$$\exists \dot{\rho}^e \in \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{a}^e \dot{\rho}^e \cdot \dot{\rho}^e \leq 0 \quad (4.114)$$

In particolare, è facile verificare che la disequazione:

$$\det [\mathbf{a}^e] \leq 0 \quad (4.115)$$

risulta soddisfatta per:

$$\check{k} - \alpha \|\mathbf{e}^e\|^2 \leq 0 \quad (4.116)$$

e quindi:

$$\|\mathbf{e}^e\| \geq \left(\frac{\check{k}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.117}$$

quest'ultima rappresenta la condizione su  $\boldsymbol{\rho}^e$  per la verifica della (4.114).

Gli effetti della (4.114) sono mostrati in Fig. 4.5, dove è riportato, in un diagramma  $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$ , il grafico della (4.47):

$$\|\mathbf{t}\| = \frac{2\alpha\check{k}\|\mathbf{e}^e\|}{\check{k} + \alpha\|\mathbf{e}^e\|^2}\check{p} \tag{4.118}$$

Questa curva corrisponde ad un percorso a pressione costante ( $\check{p} = 100$  kPa); in particolare si è posto  $\check{k} = 0.05$ ,  $\alpha = 100$ . Si osserva che quando la componente di deformazione a taglio raggiunge il valore:

$$\|\mathbf{e}^e\| = \left(\frac{\check{k}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 0.022$$

la tangente alla curva sforzo-deformazione  $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$  cambia di segno.

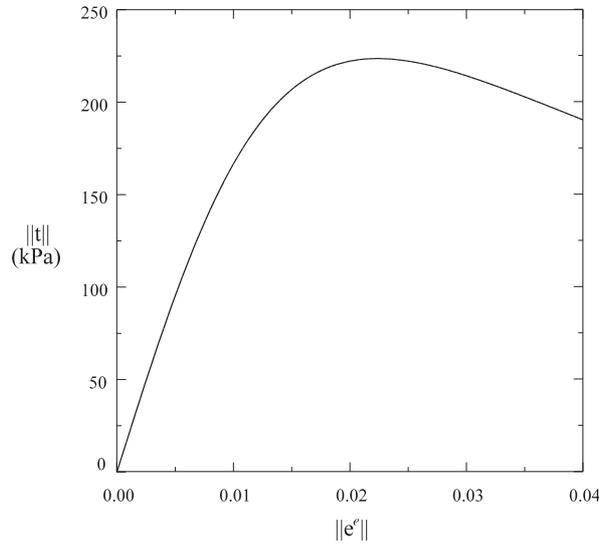


Figura 4.5: Legame elastico. Inversione di segno del modulo tangente

Poichè un comportamento del genere non è realistico in campo elastico, è importante valutare, in termini di tensioni, la condizione equivalente alla (4.117); questa relazione permetterà di individuare in modo più chiaro i limiti di applicabilità del modello. Si sostituisca, quindi, la (4.117) nella (4.118); se ne ricava:

$$\|\mathbf{t}\| = \left(\alpha\check{k}\right)^{\frac{1}{2}}\check{p} \Rightarrow \mathbf{a}^e\dot{\boldsymbol{\rho}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \leq 0 \tag{4.119}$$

Se risulta  $\|t\| = (\alpha\check{k})^{\frac{1}{2}}\check{p}$ , ad ogni incremento di deformazione elastica  $\dot{\rho}^e > 0$  corrisponde un incremento di tensione  $\dot{\beta} < 0$ ; si ha quindi che  $\|t\| = (\alpha\check{k})^{\frac{1}{2}}\check{p}$  è il *massimo* valore di tensione deviatorica raggiungibile, come è osservato da Houlsby in [38]. In termini di  $\check{q}$  si ha:

$$\check{q} = \left(\frac{3\alpha\check{k}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\check{p} \tag{4.120}$$

Se si considerano i valori dei parametri che normalmente caratterizzano le argille tenere, la retta fornita dalla precedente relazione si trova al di sopra della linea di stato critico; questa zona è di reale interesse solo nell'ambito della modellazione delle argille consistenti. Inoltre, in questa parte del piano  $p - \check{q}$  anche il criterio di snervamento del Cam-clay Modificato prevede una risposta poco realistica (cfr. par. 3.5).

In Fig. 4.6, la retta fornita dalla (4.120) è tracciata su un piano  $p - \check{q}$ , insieme alla linea di stato critico ed alla curva di snervamento (4.50); nel rappresentare questi grafici si è assunto  $\alpha = 100$ ,  $\check{k} = 0.05$  ed  $M = 0.9$ .

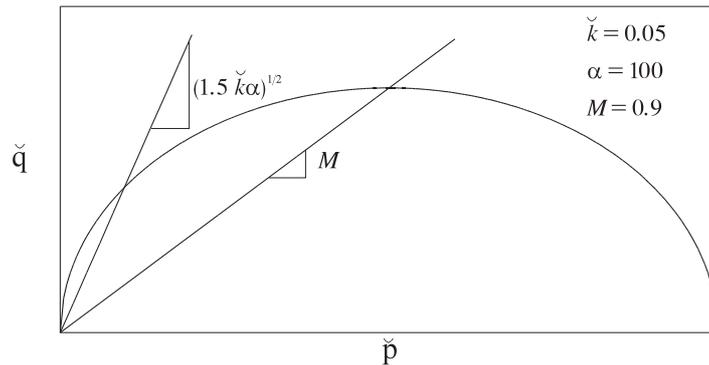


Figura 4.6: Legame elastico. Retta di massima tensione deviatorica

### 4.5.3 I parametri del modello

L'impiego del modello Cam-clay in deformazioni finite richiede la determinazione di quattro parametri adimensionali:

1. la costante elastica  $\alpha$ ;
2. l'indice di rigonfiamento  $\check{k}$ ;
3. l'indice di compressione vergine  $\check{\lambda}$ ;
4. la pendenza della linea di stato critico  $M$ .

Dal confronto con le formulazioni del Cam-clay e del Cam-clay Modificato (cfr. par. 3.4), si osserva che nonostante l'introduzione di  $\alpha$ , necessaria alla modellazione della

rigidezza elastica a taglio, il numero dei parametri non è aumentato. Infatti, a causa dell'impiego di relazioni lineari  $\ln v - \ln p$  al posto di quelle  $v - \ln p$ , il volume specifico iniziale  $v_0$  non è più una costante del modello.

I quattro parametri utilizzati nel modello sono brevemente discussi nel seguito.

### Costante elastica $\alpha$

Normalmente, la comprimibilità dell'acqua presente nei pori dell'argilla può essere trascurata, come quella della fase solida. Con queste ipotesi, se l'argilla è satura, le deformazioni volumetriche in condizioni non drenate (cfr. par. 3.2) sono nulle ( $\theta = 0$ ) e le equazioni costitutive elastiche (4.39-4.40) possono essere riscritte come:

$$\check{p} = p_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^e\|^2 \right) \quad \|\mathbf{t}\| = 2\alpha p_0 \|\mathbf{e}^e\| \quad (4.121)$$

secondo il legame elastico considerato, quindi, la rigidezza a taglio in condizioni non drenate di un'argilla inizialmente consolidata fino ad una pressione  $p_0$  è:

$$\mu_u := \frac{1}{2} \frac{\partial \|\mathbf{t}\|}{\partial \|\mathbf{e}^e\|} = \alpha p_0$$

da questa si ricava:

$$\alpha = \frac{\mu_u}{p_0} \quad (4.122)$$

Si osservi che essendo  $J = 1$  in condizioni non drenate, si ha  $q = \check{q} = \sqrt{3/2} \|\mathbf{t}\|$ ; se si introduce, inoltre, la misura di deformazione coniugata di  $\check{q}$ :

$$\check{\varepsilon}_q^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{e}^e\| \quad (4.123)$$

si ha:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial q}{\partial \check{\varepsilon}_q^e} = \frac{1}{2} \frac{\partial \|\mathbf{t}\|}{\partial \|\mathbf{e}^e\|} := \mu_u \quad (4.124)$$

La determinazione del parametro elastico  $\alpha$  può essere effettuata, quindi, per mezzo di una prova triassiale standard non drenata. Questa prova, se viene effettuata su un campione inizialmente normal-consolidato, deve comprendere un percorso di scarico. Dai risultati, in termini di tensioni e di deformazioni deviatoriche, relativi a quest'ultima fase della prova, si può ricavare  $\mu_u$  e quindi, utilizzando la (4.122), il parametro  $\alpha$  (Fig. 4.7). Valutazioni di  $\mu_u$  sono inoltre reperibili in letteratura (cfr., ad es., [24]).

### Indice di rigonfiamento $\check{k}$ e di compressione vergine $\check{\lambda}$

Per la determinazione dei parametri  $\check{k}$  e  $\check{\lambda}$  è teoricamente necessaria una sola prova di compressione isotropa (comprendente anche un percorso di scarico, se il campione è inizialmente normal-consolidato). A tal fine, è utile richiamare le relazioni esistenti fra  $(\check{k}, \check{\lambda})$  ed i parametri  $(k^*, \lambda^*)$  che compaiono nelle relazioni bilogaritmiche espresse in termini di pressione di Cauchy (4.80-4.81):

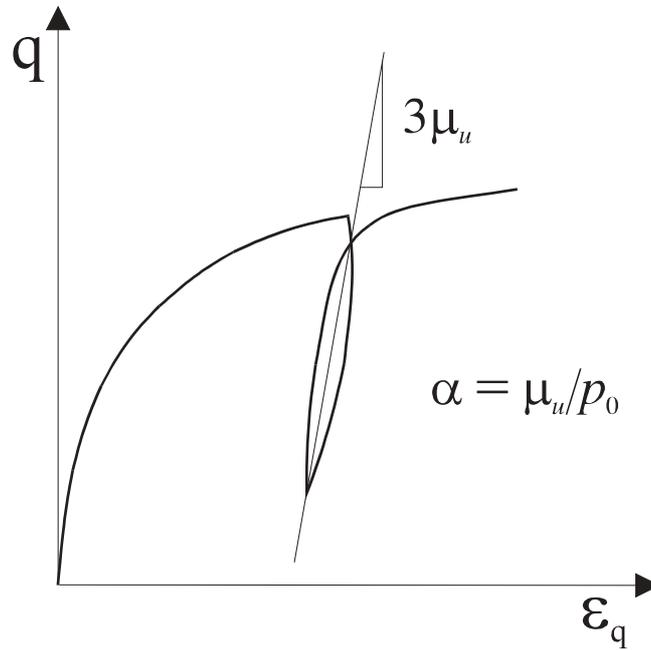


Figura 4.7: Calcolo del parametro elastico  $\alpha$  utilizzando i risultati di una prova triassiale non drenata

$$\check{k} = \frac{k^*}{1 - k^*} \quad \check{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \quad (4.125)$$

Valutazioni di  $k^*$  e  $\lambda^*$  sono riportate, ad esempio, in [13] per argille e limi di diversa provenienza, ed in [1] per il caolino speswhite.

#### Pendenza della linea di stato critico $M$

Il parametro  $M$  coincide con quello a cui si fa riferimento nelle formulazioni classiche del Cam-clay in deformazioni infinitesime (cfr. par. 4.4.2). Per la sua determinazione è teoricamente necessaria una sola prova triassiale standard in condizione drenata. Valutazioni di  $M$ , per svariati tipi di argille, sono ampiamente riportate in letteratura (cfr., ad es., [69]).

#### 4.5.4 Condizioni iniziali

Il modello richiede che vengano assegnati i valori iniziali della pressione ( $p_0$ ) e della pressione di preconsolidazione ( $\check{p}_{c0}$ ). Nel caso in cui il materiale sia sovraconsolidato ( $p_0 < \check{p}_{c0}$ ) è necessario, noto il valore iniziale della pressione di preconsolidazione di Cauchy ( $p_{c0}$ ), ricavare il corrispondente valore in termini di sforzo di Kirchhoff ( $\check{p}_{c0}$ ). A tal fine, si utilizza la relazione:

$$\check{p}_{c0} = J_{c0} p_{c0} \quad (4.126)$$

dove la quantità:

$$J_{c0} = \frac{v_{c0}}{v_0} \quad (4.127)$$

può essere ricavata, come mostrato in Fig. 4.8, utilizzando la (4.80):

$$\ln \left( \frac{v_{c0}}{v_0} \right) = -k^* \ln \left( \frac{p_{c0}}{p_0} \right) \quad (4.128)$$

da cui si ricava:

$$\frac{v_{c0}}{v_0} = \left( \frac{p_0}{p_{c0}} \right)^{k^*} \quad (4.129)$$

Si ha, infine:

$$\check{p}_{c0} = \left( \frac{p_0}{p_{c0}} \right)^{k^*} p_{c0} \quad (4.130)$$

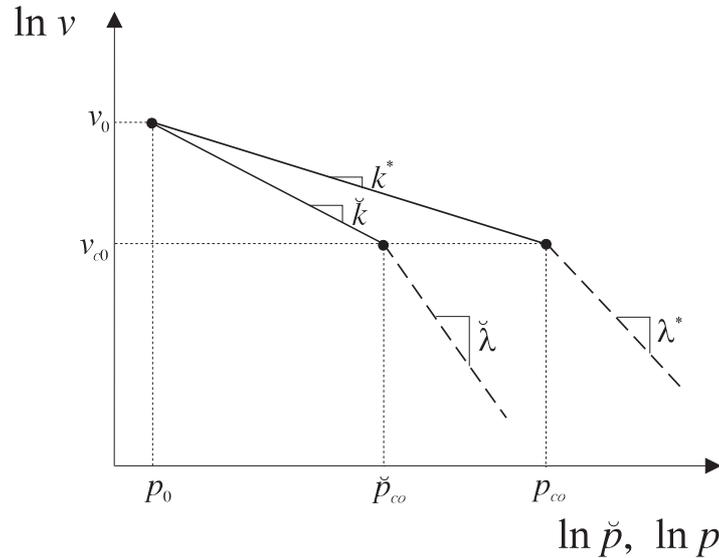


Figura 4.8: Valore iniziale della pressione di preconsolidazione in termini di sforzi di Cauchy  $p_{c0}$  e di Kirchhoff  $\check{p}_{c0}$

Sebbene non sia un parametro del modello, l'assegnazione di  $v_0$  è necessaria se si vuole rappresentare la risposta prevista dalle equazioni costitutive in termini di pressione-volume. Poichè spesso, durante una prova di compressione isotropa, viene valutato il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino ad un valore di pressione unitaria ( $v_{c1}$ ), è utile ricavare la relazione che permette di ricavare  $v_0$  a partire da  $v_{c1}$ . A tal fine, noti  $p_0$  e  $p_{c0}$  (Fig. 4.9), si utilizzano le (4.80, 4.81)<sup>7</sup>:

$$\ln \left( \frac{v_{c0}}{v_0} \right) = -k^* \ln \left( \frac{p_{c0}}{p_0} \right) \quad (4.131)$$

$$\ln \left( \frac{v_{c1}}{v_{c0}} \right) = -\lambda^* \ln \left( \frac{p_{c1}}{p_{c0}} \right) \quad (4.132)$$

<sup>7</sup>E' necessario che la scelta ricada su queste relazioni costitutive e non su quelle espresse in termini di pressioni di Kirchhoff; infatti, la pressione (unitaria) a cui viene misurato  $v_{c1}$  è di Cauchy.

dove  $p_{c1} = 1$  (ad es. kPa). Dalla seconda relazione si ricava  $\ln v_{c0}$  e lo si sostituisce nella prima; si ottiene infine:

$$v_0 = \left(\frac{p_{c0}}{p_0}\right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1} \tag{4.133}$$

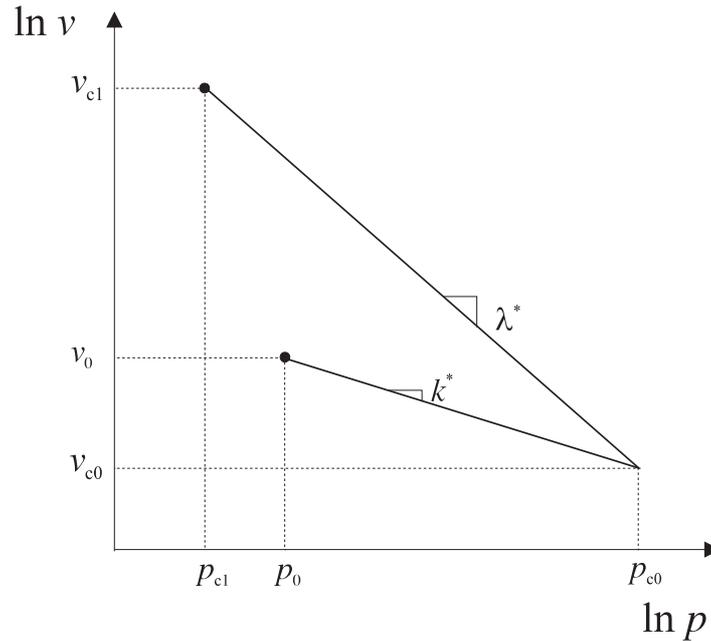


Figura 4.9: Relazione fra il volume specifico iniziale  $v_0$  ed il volume specifico  $v_{c1}$  di un campione normalmente consolidato fino ad un valore unitario di pressione  $p_{c1}$

## 4.6 Osservazioni su due legami elastici alternativi

### 4.6.1 Legame elastico con rigidezza a taglio costante

Nel modello qui presentato non è stata considerata la possibilità di assumere un legame elastico caratterizzato da un modulo di taglio  $\mu$  costante. E' un'evidenza sperimentale, infatti, che la rigidezza delle argille è, in generale, influenzata in modo non trascurabile dalla tensione media (cfr., ad es., [24, 92]).

Nell'ambito dell'ipotesi di deformazioni infinitesime, è noto [29, 96] che questa ipotesi, associata a quella di  $K$  variabile con la tensione media (3.26), implica, per piccoli valori di tensione media, un coefficiente di Poisson negativo. Anche in una formulazione del modello elastico in deformazioni finite, la scelta di  $\mu$  costante ha un'implicazione del tutto equivalente a questa, come di seguito mostrato.

Si consideri, infatti, il legame elastico espresso dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned}\check{p} &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right) \\ \mathbf{t} &= 2\mu \mathbf{e}^e\end{aligned}\quad (4.134)$$

Da queste relazioni si ricava il tensore che lega gli incrementi  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  del vettore delle tensioni principali agli incrementi  $\dot{\boldsymbol{\rho}}^e$  del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche:

$$\mathbf{a}^e := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^e} = \check{K} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (4.135)$$

dove il modulo di rigidezza volumetrica è espresso come:

$$\check{K} = \frac{\check{p}}{\check{k}} \quad (4.136)$$

Indicate con  $\mathbf{n}_a$  ed  $\mathbf{n}_r$  due direzioni mutuamente ortogonali, si consideri l'applicazione di un'incremento di tensione monoassiale nella direzione  $\mathbf{n}_a$ :

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

a questo corrisponderà un incremento di deformazione logaritmica:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^e = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_a^e \\ \dot{\rho}_r^e \\ \dot{\rho}_r^e \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

dove l'incremento di deformazione assiale può essere calcolato come:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_a^e &= (\mathbf{a}^{e^{-1}} \dot{\boldsymbol{\beta}}) \cdot \mathbf{n}_a = \left( \frac{\check{p}}{3\check{K}} \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu} \dot{\mathbf{t}} \right) \cdot \mathbf{n}_a = \\ &= \frac{1}{3\check{K}} \dot{p} + \frac{1}{2\mu} \dot{t}_a\end{aligned}\quad (4.139)$$

dalla (4.137) e dalla (4.38) si ricava:

$$\dot{p} = \frac{1}{3} \dot{\beta}_a \quad \dot{t}_a = \frac{2}{3} \dot{\beta}_a \quad (4.140)$$

si ottiene quindi:

$$\dot{\rho}_a^e = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\check{K}} + \frac{1}{\mu} \right) \dot{\beta}_a \quad (4.141)$$

Procedendo in modo analogo, si calcola la deformazione logaritmica radiale:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_r^e &= (\mathbf{a}^{e^{-1}} \dot{\boldsymbol{\beta}}) \cdot \mathbf{n}_r = \frac{1}{3\check{K}} \dot{p} + \frac{1}{2\mu} \dot{t}_r = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\check{K}} - \frac{1}{2\mu} \right) \dot{\beta}_a\end{aligned}\quad (4.142)$$

Se si introduce la seguente definizione di coefficiente di Poisson “logaritmico”:

$$\check{\nu} := -\frac{\partial \rho_r^e}{\partial \rho_a^e} \quad (4.143)$$

dalle (4.139-4.142) si ottiene:

$$\check{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3\check{K} - 2\mu}{3\check{K} + \mu} \quad (4.144)$$

che, sostituendo la (4.136), diventa:

$$\check{\nu} = \frac{1}{2} \frac{3\check{p} - 2\mu\check{k}}{3\check{p} + \mu\check{k}} \quad (4.145)$$

Si ha quindi che il coefficiente  $\check{\nu}$  risulta negativo per:

$$\check{p} < \frac{2}{3}\mu\check{k} \quad (4.146)$$

Se, ad esempio, si assume  $\check{k} = 0.05$  e  $\mu = 10000$  kPa, la precedente fornisce  $\check{p} < 330$  kPa. Si osservi, inoltre, che la (4.146), nel caso di compressione monoassiale, è equivalente alla seguente condizione:

$$\beta_a < 2\mu\check{k} \quad (4.147)$$

Al fine di illustrare, in termini di risposta del materiale, le implicazioni della condizione  $\check{\nu} < 0$ , si consideri una prova di compressione monoassiale; dalle (4.134) si ricava la seguente espressione della tensione di Kirchhoff applicata nella direzione  $\mathbf{n}_a$ :

$$\beta_a = \check{p} + 2\mu e_a^e = \frac{1}{3}\beta_a + 2\mu e_a^e \quad (4.148)$$

dove la componente  $e_a^e$  del vettore delle distorsioni logaritmiche principali elastiche  $\mathbf{e}^e$  può essere espressa come:

$$e_a^e = \rho_a^e - \frac{1}{3}\theta^e \quad (4.149)$$

in questa relazione si può sostituire l'espressione di  $\theta^e$  ottenuta dalla (4.134):

$$\theta^e = \check{k} \ln \left( \frac{\check{p}}{p_0} \right) = \check{k} \ln \left( \frac{\beta_a}{\beta_{a0}} \right) \quad (4.150)$$

dove  $\beta_{a0}$  è il valore iniziale della tensione assiale; si ha, quindi, la seguente equazione:

$$\beta_a = 3\mu \left[ \rho_a^e - \frac{1}{3}\check{k} \ln \left( \frac{\beta_a}{\beta_{a0}} \right) \right] \quad (4.151)$$

che, esplicitata rispetto a  $\rho_a^e$ , diventa:

$$\rho_a^e = \frac{1}{3\mu} \left[ \beta_a + \mu \check{k} \ln \left( \frac{\beta_a}{\beta_{a0}} \right) \right] \quad (4.152)$$

da questa relazione, può essere calcolata anche la deformazione radiale in funzione della tensione applicata assialmente:

$$\begin{aligned} \rho_r^e &= \frac{\theta^e - \rho_a^e}{2} = \frac{1}{2} \left[ \check{k} \ln \left( \frac{\beta_a}{\beta_{a0}} \right) - \rho_a^e \right] = \\ &= -\frac{1}{6\mu} \left[ \beta_a - 2\mu \check{k} \ln \left( \frac{\beta_a}{\beta_{a0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.153)$$

In Fig. 4.10 sono riportati gli andamenti della deformazione logaritmica assiale (4.152) e radiale (4.153) causati dall'applicazione di una compressione monoassiale crescente; per tracciare queste curve si è assunto:  $\check{k} = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  kPa e  $\beta_{a0} = 1$  kPa. Si osserva che fino al valore del carico applicato:  $\beta_a = 2\mu\check{k} = 100$  kPa, gli incrementi di deformazione radiale  $\rho_r^e$  sono positivi. Quindi, le (4.134) prevedono un comportamento non osservato nei terreni; cioè che nella fase iniziale di una prova di compressione non confinata, il provino si contrae lateralmente, manifestando un brusco incremento di rigidità assiale.

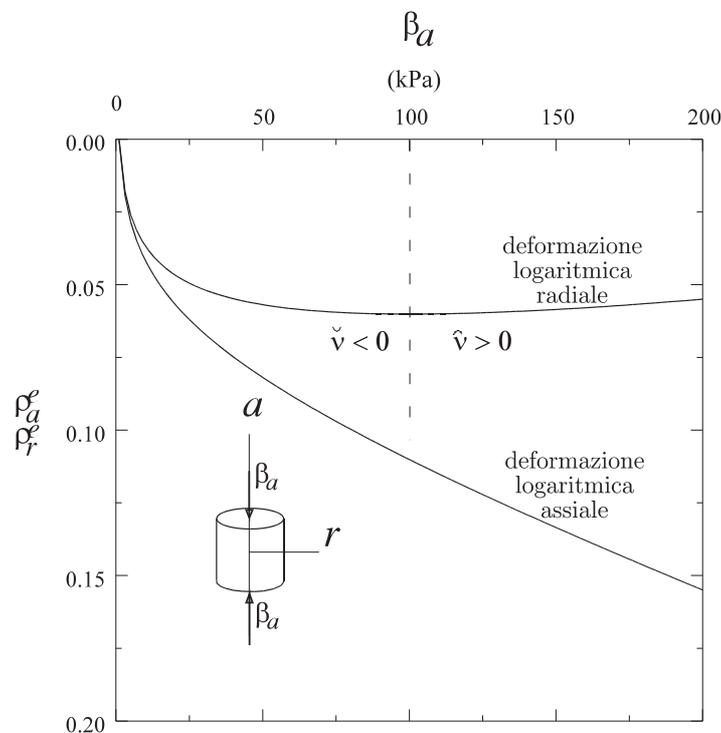


Figura 4.10: Legame elastico con rigidità a taglio costante. Previsione della risposta di un campione sottoposto a prova di compressione monoassiale

### 4.6.2 Legame elastico definito da tre parametri

Si consideri il legame elastico rappresentato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \check{p} &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^e\|^2\right) \\ \mathbf{t} &= 2 \left[ \alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right) + \bar{\mu} \right] \mathbf{e}^e \end{aligned} \quad (4.154)$$

è facile verificare che la scelta di queste equazioni è equivalente, in termini di potenziale elastico, ad aggiungere il termine  $\bar{\mu} \|\mathbf{e}^e\|^2$  alla  $\hat{W}(\boldsymbol{\rho}^e)$  espressa dalla (4.33). Una espressione di questo tipo, per l'energia di deformazione elastica, è impiegata in [85]. Utilizzare la (4.154<sub>2</sub>) significa supporre che un'aliquota della rigidezza a taglio sia indipendente dalla tensione media.

Anche in questo caso, il tensore elastico tangente  $\mathbf{a}^e := \partial\boldsymbol{\beta}/\partial\boldsymbol{\rho}^e$  non è definito positivo:

$$\exists \boldsymbol{\rho}^e \in \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{a}^e \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^e \leq 0 \quad (4.155)$$

In particolare, se nell'espressione del determinante di  $\mathbf{a}^e$  si sostituisce la seguente relazione:

$$p_0 \exp\left(\frac{\theta^e}{\check{k}}\right) = \frac{\check{k}}{\check{k} + \alpha \|\mathbf{e}^e\|^2} \check{p} \quad (4.156)$$

ottenuta dalla (4.154<sub>1</sub>), si ricava che:

$$\det[\mathbf{a}^e] \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mu} \alpha^2 \|\mathbf{e}^e\|^4 + \alpha \check{k} (2\bar{\mu} - \alpha \check{p}) \|\mathbf{e}^e\|^2 + \check{k}^2 (\alpha \check{p} + \bar{\mu}) \leq 0 \quad (4.157)$$

questa disequazione, di quarto grado nell'incognita  $\|\mathbf{e}^e\| \geq 0$ , risulta soddisfatta per:

$$\min(|e_{sol1}|, |e_{sol2}|) \leq \|\mathbf{e}^e\| \leq \max(|e_{sol1}|, |e_{sol2}|) \quad (4.158)$$

dove:

$$e_{sol1} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{2}{\bar{\mu}} \left( \alpha^2 \check{p} \check{k} - 2\alpha \check{k} \bar{\mu} - A \right)} \quad e_{sol2} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{2}{\bar{\mu}} \left( \alpha^2 \check{p} \check{k} - 2\alpha \check{k} \bar{\mu} + A \right)} \quad (4.159)$$

con  $A = \alpha \check{k} \sqrt{\alpha^2 \check{p}^2 - 8\alpha \bar{\mu} \check{p}}$

Si sostituisca la (4.156) nella (4.154<sub>2</sub>); si ottiene:

$$\|\mathbf{t}\| = 2 \left[ \frac{\alpha \check{k}}{\check{k} + \alpha \|\mathbf{e}^e\|^2} \check{p} + \bar{\mu} \right] \|\mathbf{e}^e\| \quad (4.160)$$

In termini di sole tensioni, la condizione (4.158), si può quindi esprimere sostituendo le (4.159) nella precedente relazione; si ha quindi:

$$\min(t_{sol1}, t_{sol2}) \leq \|\mathbf{t}\| \leq \max(t_{sol1}, t_{sol2}) \quad (4.161)$$

dove:

$$t_{sol1} = 2 \left[ \frac{\alpha \check{k}}{\check{k} + \alpha e_{sol1}^2} \check{p} + \bar{\mu} \right] |e_{sol1}| \quad t_{sol2} = 2 \left[ \frac{\alpha \check{k}}{\check{k} + \alpha e_{sol2}^2} \check{p} + \bar{\mu} \right] |e_{sol2}| \quad (4.162)$$

Nel diagramma  $\check{p} - \|\mathbf{t}\|$  di Fig. 4.11a, sono tracciati i grafici delle (4.162) per  $\check{k} = 0.05$ ,  $\alpha = 100$  e  $\bar{\mu} = 100$  kPa; nella regione del piano tensionale compresa fra queste due curve, risulta  $\det[\mathbf{a}^e] \leq 0$ . Nel diagramma  $\|\mathbf{t}\| - \|\mathbf{e}^e\|$  di Fig. 4.11b è riportato il grafico della (4.160) corrispondente al percorso tensionale ABC a tensione media di Kirchhoff costante ( $\check{p} = 100$  kPa). Si osserva che la tangente alla curva sforzo-deformazione cambia di segno in B e ritorna ad assumere valori positivi solo dopo che si è superato il punto C.

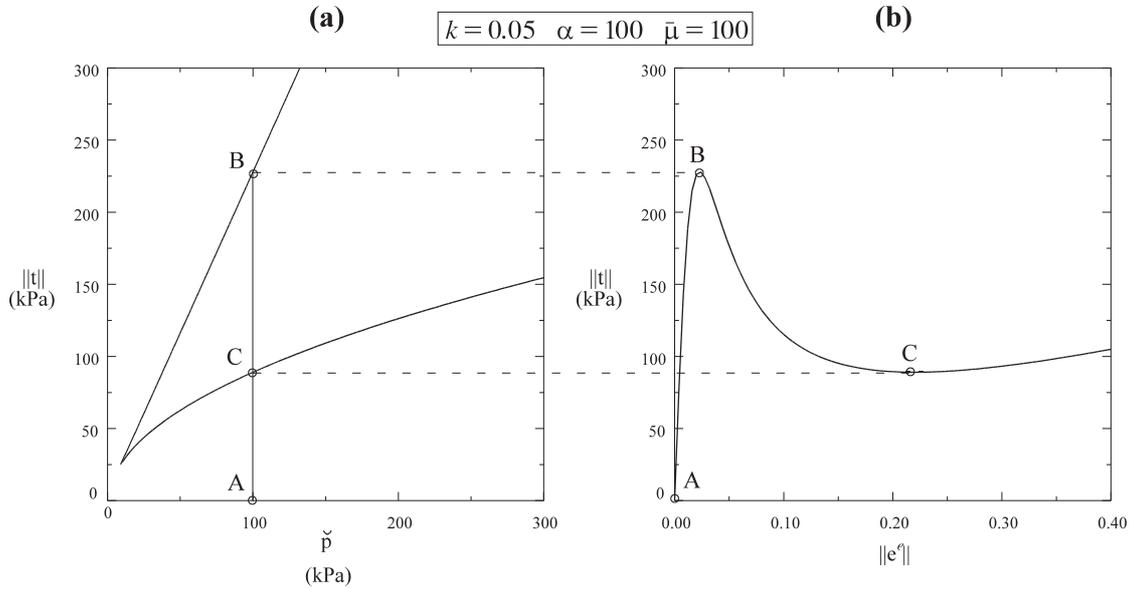


Figura 4.11: Legame elastico definito da tre parametri. Condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente (a) e suoi effetti sulla risposta meccanica prevista (b)

La regione del piano  $\check{p} - \|\mathbf{t}\|$  in cui risulta verificata la (4.155) si rimpicciolisce al crescere del rapporto  $\bar{\mu}/\alpha$ . Comunque, gli effetti della (4.155) diventano trascurabili per valori di  $\bar{\mu}/\alpha$  talmente grandi, da rendere praticamente nulla l'influenza della tensione media nella (4.160). In questa circostanza, le previsioni del modello sono sostanzialmente equivalenti a quelle ottenute da un legame elastico con modulo di taglio costante.

Le (4.162), espresse in termini di  $\check{q}$ :

$$\check{q}_{sol1} = \sqrt{\frac{3}{2}} t_{sol1} \quad \check{q}_{sol2} = \sqrt{\frac{3}{2}} t_{sol2} \quad (4.163)$$

sono rappresentate nel piano  $\check{p} - \check{q}$  di Fig. 4.12. Nello stesso diagramma sono riportate la linea di stato critico, la curva di snervamento (4.50) e, tratteggiata, la retta di

pendenza  $\left(3\alpha\check{k}/2\right)^{1/2}$ , che fissa, secondo il legame elastico (4.33), il massimo valore di tensione deviatorica raggiungibile (cfr. par. 4.5.2). Si osserva che quest'ultima retta è praticamente coincidente con la "superiore" delle curve (4.163); può essere verificato, infatti, che l'inclinazione di tale curva è sostanzialmente indipendente dal valore di  $\bar{\mu}$ ; da questo parametro, invece, è influenzato l'andamento della curva "inferiore". In particolare, al crescere di  $\bar{\mu}$ , con  $\alpha$  fissato, la curva inferiore tende a confondersi con quella superiore.

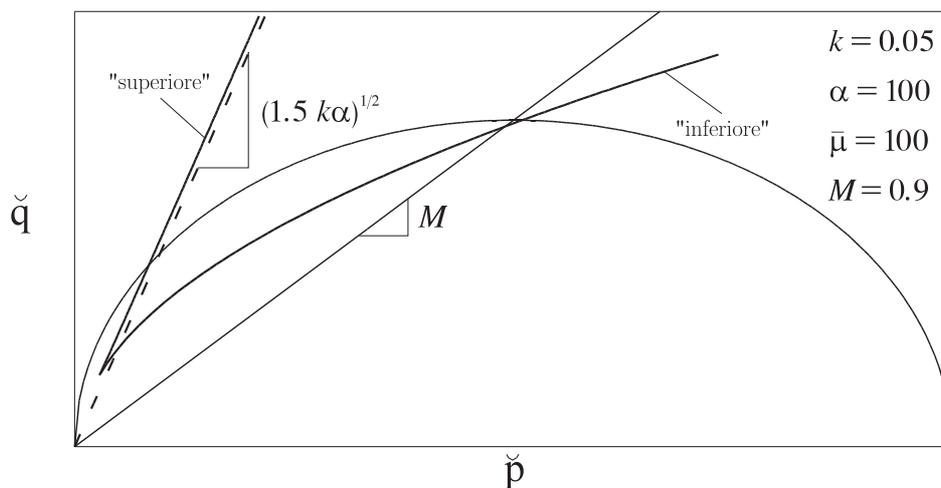


Figura 4.12: Legame elastico definito da tre parametri. Grafico delle condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente sul piano  $\check{p} - \check{q}$

# Capitolo 5

## Integrazione del modello

### 5.1 Introduzione

In meccanica dei continui deformabili, l'integrazione numerica di problemi non-lineari può essere basata sulla soluzione iterativa di una forma discretizzata dell'equazione dei lavori virtuali.

In particolare, da queste equazioni di bilancio si ricava un campo di spostamenti incrementale. Utilizzando le relazioni cinematiche, si calcolano le corrispondenti deformazioni; da queste, integrando localmente le equazioni costitutive, si ottengono le tensioni e le altre variabili di stato. Si verifica, quindi, l'ammissibilità di tale stato tensionale; se l'equilibrio è violato, la procedura viene ripetuta.

Una classica scelta per la discretizzazione del continuo deformabile (integrazione nello spazio) è il metodo degli elementi finiti.

L'integrazione nel tempo delle equazioni costitutive è un punto di fondamentale importanza, soprattutto nell'analisi dei continui elasto-plastici. In questo caso, se si applica una procedura implicita di tipo euleriano (*backward-Euler*), l'integrazione delle equazioni evolutive si trasforma nella soluzione di un problema di ottimizzazione vincolato. In particolare, tali vincoli sono rappresentati dalle condizioni di Kuhn-Tucker in forma discretizzata. L'applicazione di questa metodologia conduce allo sviluppo di tecniche di integrazione numerica note come algoritmi di *return mapping* (una trattazione generale di tali procedure è riportata in [76]).

Con riferimento al caso di un modello elastico-perfettamente plastico, lo schema di un algoritmo di *return mapping* è riportato in Fig. 5.1. All'interno del generico passo temporale  $[t_n, t_{n+1}]$ , si calcola lo stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}$  corrispondente all'assegnato incremento di deformazione, supponendo nullo il flusso plastico (*stato di tentativo elastico*). Se la condizione di snervamento viene violata ( $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}) > 0$ ), l'effettivo stato  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  è ottenuto proiettando lo stato di tentativo sulla superficie  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  del dominio di elasticità (*passo di correzione plastica*). Se si fa ricorso al metodo degli elementi finiti, questa proiezione è normalmente calcolata nei punti di Gauss.

Il problema globale viene in generale risolto utilizzando procedure iterative di tipo Newton o Newton-Raphson. Se nell'implementazione di tali procedure, si impiega l'operatore tangente ottenuto dalla linearizzazione del legame elasto-plastico, la ve-



Dalla prima formulazione del Cam-clay [68], un notevole lavoro di ricerca è dedicato al miglioramento delle capacità di previsione del modello ed all'estensione del suo campo di applicabilità (cfr. par. 3.5). La presentazione di questi modelli elastoplastici, spesso estremamente sofisticati, è raramente accompagnata dalla formulazione di una efficace procedura di integrazione numerica. Eppure, l'implementazione di un algoritmo stabile ed accurato per un modello di tipo Cam-clay merita, per la sua complessità, particolare attenzione. Nell'ambito della meccanica computazionale, infatti, si considera l'integrazione di tale legame costitutivo come un severo test per gli algoritmi numerici [58].

Una delle prime implementazioni del Cam-clay in un codice agli elementi finiti è sviluppata in [94]. Fino alla fine degli anni '80, la maggior parte degli algoritmi proposti per questo tipo di modelli è basata sul trattamento esplicito delle equazioni evolutive, come può essere verificato nell'esauriente rassegna riportata in [29]. Procedure esplicite sono implementate, ad esempio, in codici agli elementi finiti molto utilizzati sia in ambito di ricerca che nelle pratiche applicazioni [11]. L'impiego di tali procedure, comunque, implica una non trascurabile dipendenza della soluzione dall'ampiezza del passo di integrazione [62]; a causa di tale dipendenza, affinché la risposta calcolata sia attendibile, è necessario utilizzare una fitta suddivisione della storia di carico. Non sempre, soprattutto nell'analisi di problemi geotecnici, tale controllo sugli incrementi di carico risulta agevole.

Più recentemente vengono proposti metodi semi-impliciti ed impliciti per l'integrazione del Cam-clay Modificato in deformazioni infinitesime [8, 10, 33]. Sostanzialmente, in questi lavori, non sono apportate modifiche alla formulazione originale del modello (cfr. par. 3.4). La presenza del volume specifico nelle relazioni costitutive, già non accettabile da un punto di vista fisico (cfr. par. 3.3), complica lo sviluppo dell'algoritmo di integrazione. La rigidità elastica a taglio è variabile con la tensione media secondo la relazione ipoelastica (3.32).

In [78] è presentato un algoritmo implicito per l'integrazione di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite. In tale modello, basato sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione, il comportamento in compressione isotropa è descritto dalle tradizionali relazioni lineari  $v - \ln p$ ; la rigidità elastica a taglio è supposta costante (cfr. par. 4.6.1). Lo sviluppo di un Cam-clay Modificato in deformazioni finite e della relativa procedura di integrazione è attualmente in corso [85].

Nel seguito, si espone la formulazione di un algoritmo implicito per l'integrazione del modello Cam-clay in deformazioni finite presentato nel Cap. 4 [14, 15, 16, 17].

Inizialmente si richiama una metodologia generale per l'integrazione di legami elastoplastici moltiplicativi (par. 5.2); quindi se ne sviluppa l'applicazione al modello in esame (par. 5.3). In particolare, l'integrazione delle equazioni evolutive è effettuata attraverso un algoritmo di *return mapping* (par. 5.3.1). La soluzione delle equazioni algoritmiche è ottenuta mediante una procedura di tipo Newton-Raphson (par. 5.3.2). Infine, dalla linearizzazione dell'algoritmo, si ricava l'operatore tangente necessario all'implementazione della procedura in un codice agli elementi finiti (par. 5.3.3).

## 5.2 Formulazione generale dell'algoritmo

Nel presente paragrafo è richiamata una metodologia [75] per l'integrazione di un modello in deformazioni finite formulato nell'ambito della classe di legami discussa all'inizio del Cap. 4. Per comodità, le ipotesi che caratterizzano questa classe di legami elasto-plastici moltiplicativi sono qui brevemente riepilogate:

1. Il dominio di elasticità è convesso e individuato da un criterio di snervamento formulato in termini di vere tensioni e di vere variabili interne; inoltre, affinché sia rispettato l'assioma di obiettività, la funzione che esprime il criterio di snervamento deve essere isotropa.
2. Il legame elastico è formulato assegnando una funzione energia di deformazione isotropa.
3. Le equazioni evolutive rispettano il Principio di Massima Dissipazione Plastica.

Si consideri, quindi, un generico intervallo temporale  $[t_n, t_{n+1}]$  e si assuma che il gradiente di deformazione, il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico e la variabile di incrudimento, siano assegnate come dati iniziali nel punto materiale  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ :

$$\{\mathbf{F}_n, \mathbf{b}_n^e, \xi_n\} \in Lin^+ \times Sym^+ \times R^+ \quad (5.1)$$

Anche il tensore degli sforzi di Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}_n$  è univocamente determinato dalle (5.1), mediante la relazione costitutiva (4.17). L'algoritmo deve fornire la soluzione approssimata delle equazioni di evoluzione del flusso plastico in  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  per deformazioni assegnate durante l'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Si consideri, pertanto, un problema a deformazione controllata e sia:

$$\mathbf{u} : \varphi_n(\mathcal{B}) \times [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow \mathcal{V} \quad (5.2)$$

un campo di spostamenti *incrementali* imposti sulla data configurazione  $\varphi_n(\mathcal{B})$ ; il corrispondente gradiente di *deformazione relativa* è definito come (Fig. 5.2):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) := \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (5.3)$$

Il gradiente di deformazione totale è quindi  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\varphi_n(\mathbf{X})) \mathbf{F}_n(\mathbf{X})$ . Sostituendo le equazioni evolutive (4.20) nell'espressione (4.7) della derivata temporale di  $\mathbf{b}^e$ , si ottiene il seguente sistema di equazioni evolutive vincolate:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{l}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + 2\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right] \mathbf{b}^e \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i} \right] \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \quad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove  $\mathbf{l}$  è il gradiente di velocità spaziale definito dalla (2.50) e  $(\boldsymbol{\tau}, i)$  sono determinate in funzione delle variabili  $\{\mathbf{f}, \mathbf{b}^e, \xi\}$  per mezzo dell'equazione costitutiva elastica (4.17) e della legge di incrudimento (4.18):

$$\boldsymbol{\tau} = -2 \frac{\partial \check{W}(\mathbf{b}^e)}{\partial \mathbf{b}^e} \mathbf{b}^e \quad (5.5)$$

$$i = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \quad (5.6)$$

Le equazioni evolutive (5.4) sono soggette alle condizioni iniziali:

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{b}^e, \xi\}|_{t=t_n} = \{\mathbf{1}, \mathbf{b}_n^e, \xi_n\} \quad (5.7)$$

La soluzione del sistema (5.4, 5.5, 5.6) fornisce l'evoluzione delle variabili  $\{\mathbf{f}, \mathbf{b}^e, \xi\}$  nel punto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ , durante l'intervallo di tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Una soluzione approssimata di questo sistema può essere ottenuta tramite un procedimento algoritmico (*product formula algorithm*) basato sulla seguente suddivisione (*operator split*) del problema evolutivo:

1. *Stato di tentativo elastico (trial state):*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{l}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T \\ \dot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

2. *Passo di correzione plastica (return mapping):*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{b}}^e &= 2\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right] \mathbf{b}^e \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i) = 0$$

Gli algoritmi associati a ciascuno di questi due problemi sono esposti nei seguenti paragrafi.

### 5.2.1 Stato di tentativo elastico

Questo problema è ottenuto dal problema originale (5.4, 5.5, 5.6) supponendo nullo il flusso plastico e ignorando il vincolo imposto dal criterio di snervamento sullo stato tensionale. La soluzione  $\{\mathbf{f}^{tr}, \mathbf{b}^{e,tr}, \xi^{tr}\}$  di questo problema può essere calcolata esattamente per mezzo delle seguenti espressioni in forma chiusa:

$$\mathbf{f}^{tr} = \mathbf{f} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \mathbf{f} \mathbf{b}_n^e \mathbf{f}^T \quad (5.11)$$

$$\xi^{tr} = \xi_n \quad (5.12)$$

dove il gradiente di deformazione relativa  $\mathbf{f}$  è dato dalla (5.3) in funzione degli assegnati incrementi di spostamento (5.2). L'algoritmo può essere così interpretato (Fig. 5.2):

- la configurazione intermedia viene tenuta fissa mentre la configurazione corrente viene portata nella sua posizione finale rappresentata da  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \mathbf{F}_n$  (5.10);
- il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico  $\mathbf{b}_n^e$  è quindi trasformato mediante l'operazione di *push-forward* (5.11), in modo da ottenere il valore corrispondente alla configurazione corrente;
- Il tensore degli sforzi di Kirchhoff viene calcolato mediante la relazione costitutiva elastica (5.5), si ha quindi:

$$\boldsymbol{\tau}^{tr} = -2 \left[ \frac{\partial \check{W}(\mathbf{b}^e)}{\partial \mathbf{b}^e} \right] \mathbf{b}^{e,tr} \quad (5.13)$$

### 5.2.2 Passo di correzione plastica

Si indichi con  $\{\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{b}}^e, \bar{\xi}\}$  la soluzione approssimata del problema (5.4, 5.5, 5.6) fornita dall'algoritmo. La prima delle equazioni che definiscono il passo di correzione plastica (5.9), unitamente alla (5.10), implica:

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^{tr} = \mathbf{f} \quad (5.14)$$

Il passo di correzione plastica è quindi formulato sulla configurazione corrente che viene mantenuta fissa nella posizione raggiunta nel passo di tentativo per mezzo del gradiente di deformazione relativa (fig. 5.2).

Per giustificare l'approssimazione algoritmica delle rimanenti equazioni di evoluzione, si ricordi che la soluzione della seguente equazione differenziale del primo ordine:

$$\dot{z}(t) = A z(t) \quad \text{in } [t_n, t_{n+1}] \quad \text{con } z(t)|_{t=t_n} = z(t_n) \quad (5.15)$$

è data da  $z(t) = \exp[(t - t_n)A] z(t_n)$ . Pertanto, la forma delle equazioni che governano l'evoluzione di  $\mathbf{b}^e$  e di  $\xi$  (5.9<sub>2-3</sub>) suggerisce un'approssimazione esponenziale per l'algoritmo di integrazione del problema; che, ponendo  $\Delta\gamma = (t - t_n)\gamma$ , assume la forma:

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \mathbf{f} \mathbf{b}_n^e \mathbf{f}^T \quad (5.16)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^e = \exp \left\{ 2\Delta\gamma \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right] \right\} \mathbf{b}^{e,tr} \quad (5.17)$$

$$\bar{\xi} = \xi_n - \Delta\gamma \left[ \frac{\partial \check{f}(\boldsymbol{\tau}, i)}{\partial i} \right] \quad (5.18)$$

$$\Delta\gamma \geq 0 \quad \check{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{i}) \leq 0 \quad \Delta\gamma \check{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{i}) = 0$$

dove le derivate della funzione di snervamento  $\check{f}$  sono calcolate in  $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{i})$ , a sua volta valutato a partire da  $(\bar{\mathbf{b}}^e, \bar{\xi})$  mediante le relazioni costitutive (5.5-5.6).



pressa come:

$$\mathbf{b}^{e,tr} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^{e,tr})^2 \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \quad (5.20)$$

si ricava, per l'unicità della decomposizione spettrale:

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_A^{tr} \quad \text{e} \quad (\lambda_A^e)^2 = \exp \left[ 2\Delta\gamma \left( \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right)_A \right] (\lambda_A^{e,tr})^2 \quad \text{con} \quad A = 1, 2, 3 \quad (5.21)$$

Si è provato, quindi, che le direzioni principali  $\mathbf{n}_A$  relative allo stato finale coincidono con le direzioni principali  $\mathbf{n}_A^{tr}$ . Pertanto l'algoritmo di *return mapping* è caratterizzato da direzioni principali fissate e definite nel passo di tentativo elastico.

Coerentemente con la (4.24), il vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche di tentativo è definito come:

$$\boldsymbol{\rho}^{e,tr} := \begin{bmatrix} \rho_1^{e,tr} \\ \rho_2^{e,tr} \\ \rho_3^{e,tr} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \rho_A^{e,tr} := -\ln \lambda_A^{e,tr} \quad A = 1, 2, 3 \quad (5.22)$$

Se si considera il logaritmo di entrambi i membri della (5.21<sub>2</sub>) e si utilizza la notazione vettoriale, l'algoritmo espresso dalle (5.16-5.18) viene così riformulato nello spazio delle direzioni principali:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^e &= \boldsymbol{\rho}^{e,tr} - \Delta\gamma \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ \xi &= \xi_n - \Delta\gamma \frac{\partial \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i)}{\partial i} \\ \Delta\gamma &\geq 0 \quad \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i) \leq 0 \quad \Delta\gamma \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, i) = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'equazione costitutiva (4.25), la legge di incrudimento (5.6) e le formule algoritmiche (5.23) definiscono un problema algebrico non lineare vincolato le cui variabili principali sono  $(\boldsymbol{\rho}^e, \xi) \in \mathcal{V} \times R$ .

## 5.3 Integrazione del Cam-clay

Nel seguito si procede allo sviluppo di una procedura per l'integrazione del modello Cam-clay in deformazioni finite presentato nel Capitolo 4.

### 5.3.1 Algoritmo di return mapping

L'espressione del passo di correzione plastica è ottenuta sostituendo la (4.57) nella (5.23<sub>1</sub>):

$$\boldsymbol{\rho}^e = \boldsymbol{\rho}^{e,tr} - \Delta\gamma \left[ \frac{1}{3} (2\check{p} - \check{p}_c) \mathbf{1} + \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \right] \quad (5.24)$$

questa relazione può essere decomposta nelle sue parti volumetrica e deviatorica:

$$\theta^e = \theta^{e,tr} - \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \quad (5.25)$$

$$\mathbf{e}^e = \mathbf{e}^{e,tr} - \Delta\gamma \frac{3}{M^2} \mathbf{t} \quad (5.26)$$

La formula di decomposizione (4.31) implica:

$$\theta^{e,tr} = \theta - \theta_n^p \quad (5.27)$$

quindi, l'equazione (5.25) fornisce:

$$\theta^p = \theta_n^p + \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \quad (5.28)$$

Gli sforzi di tentativo sono ricavati dalle relazioni costitutive elastiche (4.39-4.40) come:

$$\check{p}^{tr} = p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2\right) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{t}^{tr} = 2\alpha p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}}\right) \mathbf{e}^{e,tr} \quad (5.30)$$

Al fine di ottenere le relazioni esistenti fra gli sforzi effettivamente agenti all'istante  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  e le deformazioni elastiche di tentativo, si sostituiscono le (5.25-5.26) prima nella relazione costitutiva (4.39):

$$\begin{aligned} \check{p} = p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}}\right) \exp\left[-\frac{1}{\check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c)\right] \\ \left[1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 + \frac{9\alpha}{\check{k}M^4} \Delta\gamma^2 \|\mathbf{t}\|^2 - \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \Delta\gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr}\right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

e quindi nella relazione costitutiva (4.40), in modo da ottenere, esplicitando rispetto a  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{tr} \exp\left[-\frac{1}{\check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c)\right] \quad (5.32)$$

$$\left\{1 + \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}}\right) \exp\left[-\frac{1}{\check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c)\right]\right\}^{-1} \quad (5.33)$$

Infine si sostituisce la (5.28) nella legge di incrudimento (4.61):

$$\check{p}_c = \check{p}_{c0} \exp\left(\frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \theta_n^p\right) \exp\left[\frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c)\right] \quad (5.34)$$

Inoltre, sempre dalla (4.61), risulta:

$$\check{p}_{c,n} = \check{p}_{c0} \exp\left(\frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \theta_n^p\right) \quad (5.35)$$

si ha quindi:

$$\check{p}_c = \check{p}_{c,n} \exp \left[ \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \right] \quad (5.36)$$

A causa della particolare forma delle relazioni (5.31) e (5.36), non è possibile pervenire ad un'espressione della condizione di snervamento (4.50) in termini del solo parametro di consistenza (cioè ad un'equazione scalare del tipo  $f(\Delta\gamma) = 0$ ). Pertanto la soluzione dell'algoritmo è ricavata per via numerica, utilizzando la procedura di tipo Newton-Raphson descritta nel seguente paragrafo.

### 5.3.2 Soluzione dell'algoritmo

Per la soluzione del sistema di equazioni algoritmiche (4.50, 5.31, 5.36) si utilizza la procedura di Newton qui di seguito descritta.

Si pone:

$$g = p_0 \exp \left( \frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}} \right) \quad (5.37)$$

$$h = \exp \left[ -\frac{1}{\check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \right] \quad (5.38)$$

$$l = 1 + \frac{\alpha}{\check{k}} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 + \frac{9\alpha}{\check{k}M^4} \Delta\gamma^2 \|\mathbf{t}\|^2 - \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \Delta\gamma \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (5.39)$$

La (5.31) può essere quindi riscritta:

$$\check{p} = ghl \quad (5.40)$$

Inoltre si pone:

$$m = \left( 1 + \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma gh \right)^{-1} \quad (5.41)$$

le (5.37, 5.41) permettono di riscrivere la (5.32) nella forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^{tr} mh \quad (5.42)$$

Si consideri il vettore delle *incognite*:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \check{p} \\ \check{p}_c \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

ed il vettore dei *residui*  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi})$ , di componenti:

$$R_1 = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = \frac{3}{2} \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{M^2} + \check{p} (\check{p} - \check{p}_c) \quad (5.44)$$

$$R_2 = ghl - \check{p} \quad (5.45)$$

$$R_3 = \check{p}_{c,n} \exp \left[ \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \right] - \check{p}_c \quad (5.46)$$

Il sistema costituito dalle (4.50, 5.31, 5.36) è equivalente al sistema  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{0}$ , per la cui soluzione è stato utilizzato l'algoritmo di Newton qui sintetizzato:

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. inizializzazione: <math>k = 0, \quad \boldsymbol{\chi}^k = \boldsymbol{\chi}^0 = [0 \quad \check{p}^{tr} \quad \check{p}_{c,n}]</math></li> <li>2. calcolo dei residui: <math>\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}^k)</math></li> <li>3. if <math>\ \mathbf{R}^k\  &lt; RTOL</math> exit; else</li> <li>4. aggiornamento soluzione: <math>\boldsymbol{\chi}^{k+1} = \boldsymbol{\chi}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}}\right)_k^{-1} \mathbf{R}^k</math></li> <li>5. <math>k + 1 \longrightarrow k</math> and goto 2</li> </ol>	(5.47)
--	--------

L'impiego di questo algoritmo richiede pertanto la determinazione dei coefficienti della matrice:

$$\mathbf{R}' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (5.48)$$

Il procedimento seguito per il calcolo di  $\mathbf{R}'$  è riportato in Appendice A.

### 5.3.3 Tangente algoritmica

L'espressione in forma chiusa del tensore elasto-plastico algoritmico viene determinata linearizzando l'algoritmo finora descritto. Dalla combinazione della decomposizione spettrale di  $\boldsymbol{\tau}$  (4.21<sub>2</sub>) con la (5.21<sub>1</sub>) si ottiene la seguente espressione del tensore di Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A^{tr} \quad \text{dove } \mathbf{m}_A^{tr} = \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \quad (5.49)$$

Il tensore di rigidità spaziale  $\mathbf{c} \in \mathbb{L}in$  ha componenti (cfr. par. 2.5.1):

$$c_{abcd} := 2F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD} \left( \frac{\partial S_{AB}}{\partial C_{CD}} \right) \quad (5.50)$$

dove con  $S_{AB}$  e con  $C_{CD}$  si sono indicate, rispettivamente, le componenti del secondo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  e del tensore di Cauchy-Green destro totale  $\mathbf{C}$ . Nell'implementazione dell'algoritmo, il calcolo esplicito del tensore  $\mathbf{c}$  si basa sulle seguenti considerazioni [75]:

- L'algoritmo fornisce il vettore delle tensioni principali  $\boldsymbol{\beta}$  come una funzione implicita del vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche di tentativo  $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$  (5.31, 5.32). La linearizzazione di questa relazione fornisce il tensore algoritmico:

$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \quad (5.51)$$

- poiché la configurazione intermedia è mantenuta fissa nello stato di tentativo, le deformazioni logaritmiche  $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$  sono funzioni della deformazione totale e sono indipendenti dal flusso plastico relativo all'intervallo  $[t_n, t]$ . Sotto tali ipotesi, si dimostra la validità della seguente relazione [75]:

$$\mathbf{m}_A^{tr} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \rho_A^{e,tr}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad A = 1, 2, 3 \quad (5.52)$$

- Il tensore  $\mathbf{m}_A^{tr} = \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr}$  è anch'esso funzione della deformazione totale ed è indipendente dal flusso plastico relativo all'intervallo  $[t_n, t]$ . La linearizzazione di  $\mathbf{m}_A^{tr}$  viene quindi effettuata una volta per tutte e fornisce il tensore del quarto ordine, indicato come  $\mathbf{c}_A^{tr}$ , la cui espressione è riportata in [57, 76].

Combinando i risultati sopra elencati, si ricava la seguente espressione della tangente algoritmica spaziale fornita dalla (5.50):

$$\mathbf{c} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 a_{AB}^{ep} \mathbf{m}_A^{tr} \otimes \mathbf{m}_B^{tr} + 2 \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{c}_A^{tr} \quad (5.53)$$

I moduli  $\mathbf{c}_A^{tr}$  ed i prodotti tensoriali  $\mathbf{m}_A^{tr}$  che compaiono nella (5.53) sono indipendenti dal particolare modello considerato; pertanto, il tensore algoritmico  $\mathbf{c}$  è completamente determinato a meno dei coefficienti  $a_{AB}^{ep}$ . Questi ultimi coefficienti dipendono dal legame elasto-plastico impiegato e dalla struttura dell'algoritmo di *return mapping* formulato nello spazio delle direzioni principali. Il calcolo di  $\mathbf{a}^{ep}$ , con riferimento al modello Cam-clay qui considerato, è svolto nel seguente paragrafo.

### Calcolo del tensore algoritmico elasto-plastico $\mathbf{a}^{ep}$

Il calcolo del tensore elasto-plastico algoritmico  $\mathbf{a}^{ep}$  implica la differenziazione delle formule algoritmiche (5.31, 5.32, 5.36); infatti è:

$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \quad (5.54)$$

in particolare si ha:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left( \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \otimes \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \quad (5.56)$$

La procedura necessaria per la determinazione dell'espressione in forma chiusa di  $\mathbf{a}^{ep}$  è estremamente laboriosa, a causa, soprattutto, dell'accoppiamento volumetrico-deviatorico presente anche nel legame elastico. Questo calcolo è quindi riportato in maggior dettaglio in Appendice B, mentre qui ci si limita a riepilogarne i passaggi fondamentali.

Dalla differenziazione di  $\check{p}$  rispetto alle componenti di deformazione elastica di tentativo  $\theta^{e,tr}$  ed  $\mathbf{e}^{e,tr}$  si ottiene:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + c_2 \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \quad (5.58)$$

e da quella di  $\mathbf{t}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left( u_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + u_2 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \quad (5.60)$$

Le espressioni dei coefficienti  $a_{10}$ ,  $c_i$  ed  $u_i$  sono riportate in App. B. Tutte le posizioni assunte durante i calcoli sono inoltre riepilogate in App. C.

La sostituzione delle derivate (5.57-5.60) nelle (5.55-5.56) e di queste, a loro volta, nella (5.54) fornisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} &= (c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + (c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + \\ &+ (c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{t} + (d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{1} + a_{10} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.61)$$

dove  $d_6$  è un coefficiente noto (cfr. App. C). Nella precedente espressione l'unica incognita è costituita dalla derivata del parametro  $\Delta \gamma$  rispetto al vettore delle deformazioni logaritmiche di tentativo  $\boldsymbol{\rho}^{e,tr}$ . La determinazione di tale incognita può essere effettuata come descritto nel seguito.

Se vi è sviluppo di deformazioni plastiche risulta  $\Delta \gamma > 0$ ; quindi, le condizioni di Kuhn-Tucker (5.23<sub>3</sub>) implicano l'annullamento dell'equazione di snervamento:

$$\hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = 0 \quad (5.62)$$

differenziando questa relazione si ottiene la *condizione di consistenza*:

$$d\hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}_c} d\check{p}_c = 0 \quad (5.63)$$

i differenziali di  $\boldsymbol{\beta}$  e di  $\check{p}_c$  sono calcolati come:

$$d\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (5.64)$$

$$d\check{p}_c = \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (5.65)$$

Dalla sostituzione dell'espressione (5.61) nel differenziale di  $\boldsymbol{\beta}$  (5.64) si ottiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta} &= (c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}) d(\Delta \gamma) + (c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + \\ &+ (c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + (d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + a_{10} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Il calcolo del differenziale della pressione di preconsolidazione fornisce:

$$d\check{p}_c = d_1 d(\Delta \gamma) + d_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (5.67)$$

dove i coefficienti  $d_i$  sono noti (cfr. App. C). In queste due ultime relazioni compare il differenziale di  $\Delta \gamma$ :

$$d(\Delta \gamma) = \frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (5.68)$$

I differenziali (5.66, 5.67), unitamente alle derivate della funzione di snervamento, vengono sostituiti nell'equazione scalare di consistenza (5.63), la cui soluzione fornisce il differenziale  $d(\Delta\gamma)$ . Si ottiene, infine, la seguente espressione del tensore algebrico elasto-plastico tangente:

$$\mathbf{a}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = (\delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{1} + (\delta_3 \mathbf{1} + \delta_4 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + (\delta_5 \mathbf{1} + \delta_6 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \quad (5.69)$$

dove i coefficienti  $\delta_i$  hanno le espressioni riportate in App. C.

Si noti che il tensore  $\mathbf{a}^{ep}$  non è simmetrico; ciò è dovuto alla legge di incrudimento “non-associata” assunta nel Cam-clay (cfr. par. 4.4.4).

## 5.4 Implementazione della procedura numerica

L'algoritmo è implementato nel codice agli elementi finiti *Finite Element Analysis Program* (FEAP) [95]. La procedura di integrazione seguita è qui brevemente riassunta:

Le seguenti fasi hanno luogo in ogni punto di integrazione dell'elemento, nell'ambito dell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

### 1. Stato di tentativo

Dato  $\{\mathbf{b}_n^e, \theta_n^p\}$  nel punto di integrazione  $\mathbf{x}_n \in \varphi_n(\mathcal{B})$ , si calcolano il gradiente di deformazione relativa  $\mathbf{f}_{n+1}$  ed il tensore di Cauchy-Green sinistro elastico  $\mathbf{b}_{n+1}^e$  corrispondenti all'assegnato campo di incrementi di spostamento  $\mathbf{u}_{n+1} : \varphi_n(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{V}$ :

$$\mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{x}_n) := \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}_n) \quad \mathbf{b}_{n+1}^{e,tr} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{b}_n^e \mathbf{f}_{n+1}^T \quad (5.70)$$

### 2. Decomposizione spettrale di $\mathbf{b}_{n+1}^{e,tr}$

Si calcolano gli allungamenti principali  $\{\lambda_{A,n+1}^{e,tr}\}$ , risolvendo l'equazione caratteristica. Le direzioni principali  $\{\mathbf{n}_{A,n+1}^{tr}\}$  vengono determinate in forma chiusa utilizzando la seguente espressione:

$$\mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} \otimes \mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} = \left[ \frac{\mathbf{b}_{n+1}^{e,tr} - (\lambda_{B,n+1}^{e,tr})^2 \mathbf{I}}{(\lambda_{B,n+1}^{e,tr})^2 - (\lambda_{A,n+1}^{e,tr})^2} \right] \left[ \frac{\mathbf{b}_{n+1}^{e,tr} - (\lambda_{C,n+1}^{e,tr})^2 \mathbf{I}}{(\lambda_{C,n+1}^{e,tr})^2 - (\lambda_{A,n+1}^{e,tr})^2} \right] \quad (5.71)$$

per  $A = 1, 2, 3$ , con  $B = 1 + \text{mod}(3, A)$  e  $C = 1 + \text{mod}(3, B)$ .

### 3. Return mapping nello spazio delle direzioni principali

Si calcolano le deformazioni logaritmiche e le tensioni principali di tentativo:

$$\boldsymbol{\rho}_{n+1}^{e,tr} = \begin{bmatrix} \ln \lambda_{1,n+1}^{e,tr} \\ \ln \lambda_{2,n+1}^{e,tr} \\ \ln \lambda_{3,n+1}^{e,tr} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr} = \check{p}_{n+1}^{tr} \mathbf{1} + \mathbf{t}_{n+1}^{tr} \quad (5.72)$$

dove  $\check{p}_{n+1}^{tr}$  e  $\mathbf{t}_{n+1}^{tr}$  sono dati dalle (5.29-5.30). Si valuta quindi  $f_{n+1}^{tr} = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}, \check{p}_{c,n})$ ; se  $f_{n+1}^{tr} > 0$  si ricorre all'algoritmo (5.47) per il calcolo di  $\{\boldsymbol{\rho}_{n+1}^e, \theta_{n+1}^p\}$ . Il tensore degli sforzi di Kirchhoff viene determinato tramite la formula:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \sum_{A=1}^3 (\boldsymbol{\beta}_{n+1})_A \mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} \otimes \mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} \quad (5.73)$$

dove  $\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \check{p}_{n+1} \mathbf{1} + \mathbf{t}_{n+1}$  e  $\check{p}_{n+1}$ ,  $\mathbf{t}_{n+1}$  sono ottenuti sostituendo  $\boldsymbol{\rho}_{n+1}^e$  nelle equazioni costitutive (4.39-4.40).

#### 4. Aggiornamento della configurazione intermedia

Si calcola il tensore di Cauchy-Green sinistro aggiornato mediante la decomposizione spettrale:

$$\mathbf{b}_{n+1}^e = \sum_{A=1}^3 \exp(2\rho_{A,n+1}^e) \mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} \otimes \mathbf{n}_{A,n+1}^{tr} \quad (5.74)$$

dove le direzioni principali  $\mathbf{n}_{A,n+1}^{tr}$  ( $A = 1, 2, 3$ ) sono quelle determinate nella fase 2.

# Capitolo 6

## Risultati numerici

### 6.1 Introduzione

L'algoritmo di *return mapping* sviluppato per l'integrazione numerica del modello Cam-clay in deformazioni finite e la tangente elasto-plastica ottenuta dalla linearizzazione dello stesso algoritmo sono implementati, insieme ad un elemento finito isoparametrico tridimensionale ad otto nodi, nel codice *Finite Element Analysis Program* (FEAP) [95].

Risultati numerici ottenuti con tale procedura sono esposti nel presente capitolo. In particolare, vengono simulate prove di laboratorio (par. 6.2); le previsioni del modello sono quindi confrontate con dati sperimentali disponibili in letteratura (par. 6.3). Si analizza, successivamente, il caricamento di una fondazione nastriforme (par. 6.4).

Gli esempi numerici sono finalizzati alla validazione del modello proposto ed alla verifica dell'accuratezza e della stabilità dell'algoritmo di integrazione.

Per comodità, si richiamano le definizioni delle misure di sforzo e di deformazione utilizzate per presentare i risultati delle analisi numeriche. In particolare:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \quad (6.1)$$

sono, rispettivamente, la tensione media e la tensione deviatorica di Cauchy. Mentre:

$$\check{p} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad \check{q} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| \quad (6.2)$$

sono le omologhe grandezze in termini di sforzo di Kirchhoff (cfr. par. 4.4). Si utilizza, inoltre, la deformazione volumetrica logaritmica (cfr. par. 3.3, 4.4 e 4.5.1):

$$\theta = -\ln J = -\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad (6.3)$$

e la misura di deformazione deviatorica (cfr. par. 4.4):

$$\check{\varepsilon}_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{e}\| \quad \text{con:} \quad (\mathbf{e})_A := -\ln\left(J^{-\frac{1}{3}} \lambda_A\right) \quad (6.4)$$

dove i  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  sono gli allungamenti principali totali.

## 6.2 Simulazione di prove di laboratorio

Si commentano, in questo paragrafo, le simulazioni numeriche di prove di laboratorio. In particolare, sono considerate prove di compressione isotropa e prove triassiali drenate. In queste ultime si impone una deformazione assiale crescente, mantenendo costante la pressione laterale sul provino; si tratta quindi di prove triassiali “standard”, a cui corrisponde, nel piano  $p - q$ , un percorso di tensione di pendenza pari a 3.

### 6.2.1 Prova di compressione isotropa

La prova consiste nell’applicazione di un ciclo di carico-scarico-ricarico su un campione di argilla inizialmente normal-consolidato ( $p_0 = \check{p}_{c0} = 100$  kPa). Nell’analisi, si utilizzano i seguenti valori dei parametri:

$$\check{k} = 0.02 \quad \alpha = 100 \quad \check{\lambda} = 0.09 \quad M = 0.9 \quad (6.5)$$

I risultati sono riportati in termini di pressione di Kirchhoff ( $\check{p}$ ) e di deformazione volumetrica logaritmica ( $\theta$ ) (Fig. 6.1). Dopo una fase di carico in campo elasto-plastico (OA), si procede allo scarico (AB); è evidente, in questa parte della prova, la forte non linearità della risposta elastica del materiale. Durante il ricarico, il materiale si comporta elasticamente fino allo snervamento (BC) e quindi riprende a deformarsi in campo elasto-plastico (CD).

La simulazione della prova è ripetuta utilizzando due diverse suddivisioni della storia di carico: in 300 ed in 6 incrementi. Quindi, si sono applicati incrementi di carico di circa 1 kPa nella prima analisi, e incrementi decisamente più grandi ( $100 \div 200$  kPa) nella seconda. I corrispondenti risultati sono praticamente coincidenti (Fig. 6.1); si ha, quindi, una prima conferma dell’accuratezza della procedura numerica.

La velocità di convergenza dell’algoritmo, nel corso dell’esempio numerico considerato, è studiata in Fig. 6.2. In questi diagrammi è riportato il numero dell’iterazione sull’asse delle ascisse ed il valore assunto da una norma dei residui ( $err$ ) sull’asse delle ordinate. Se il carico è applicato in 300 incrementi (Fig. 6.2a), la velocità di convergenza della procedura è quadratica fin dalla prima iterazione; anche nel caso di incrementi molto più grandi (Fig. 6.2b, carico applicato in 6 incrementi), si osserva, a partire dalla seconda iterazione, la stessa velocità di convergenza.

### 6.2.2 Prove di compressione triassiale

Si considerano prove triassiali drenate standard su provini debolmente sovraconsolidati e fortemente sovraconsolidati.

A proposito di queste ultime prove, si ricorda che le previsioni del Cam-clay e del Cam-clay Modificato relative al comportamento delle argille fortemente sovraconsolidate non sono particolarmente soddisfacenti (cfr. par. 3.5). Tali legami sono infatti finalizzati alla modellazione costitutiva delle argille normal-consolidate o debolmente sovraconsolidate. Inoltre, nelle argille fortemente sovraconsolidate, è frequente un comportamento rammollente accompagnato dalla formazione di bande di taglio.

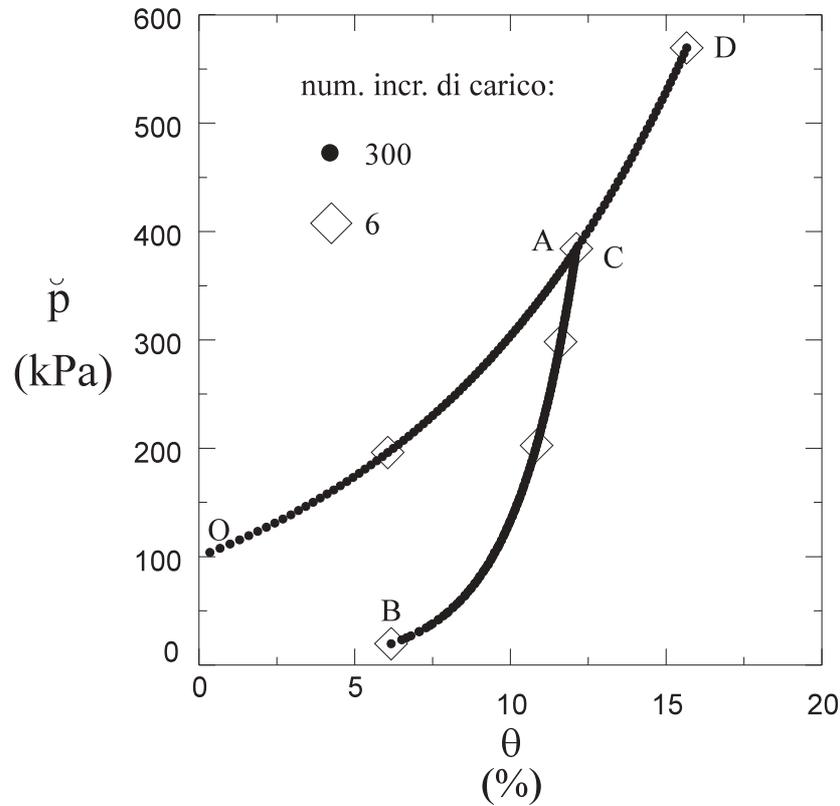


Figura 6.1: Simulazione di una prova di compressione isotropa. Pressione di Kirchhoff  $\check{p}$  vs. deformazione volumetrica logaritmica  $\theta$

Tali fenomeni di localizzazione delle deformazioni non possono essere efficacemente simulati utilizzando elementi finiti convenzionali, come quello qui considerato. Infatti, la posizione della banda di taglio ricavata dall'impiego di tecniche standard agli elementi finiti risulta dipendente dalla geometria della mesh (cfr., ad es., [4, 5, 59, 77]).

Quindi, il motivo per cui è stata considerata una prova triassiale su argilla fortemente sovraconsolidata, è esclusivamente quello di verificare l'accuratezza e la stabilità dell'algoritmo di integrazione del modello anche in presenza di comportamento ram-mollente.

Si suppone di eseguire le prove su un'argilla caratterizzata dai parametri (6.5). Inoltre, al fine di rappresentare i risultati anche in termini di curve pressione-volume, si assegna il volume specifico di un campione normalmente consolidato fino a  $p = 1$  kPa:

$$v_{c1} = 3.5$$

Il volume specifico iniziale  $v_0$  viene quindi ricavato utilizzando la relazione (4.133):

$$v_0 = \left( \frac{p_{c0}}{p_0} \right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1}$$

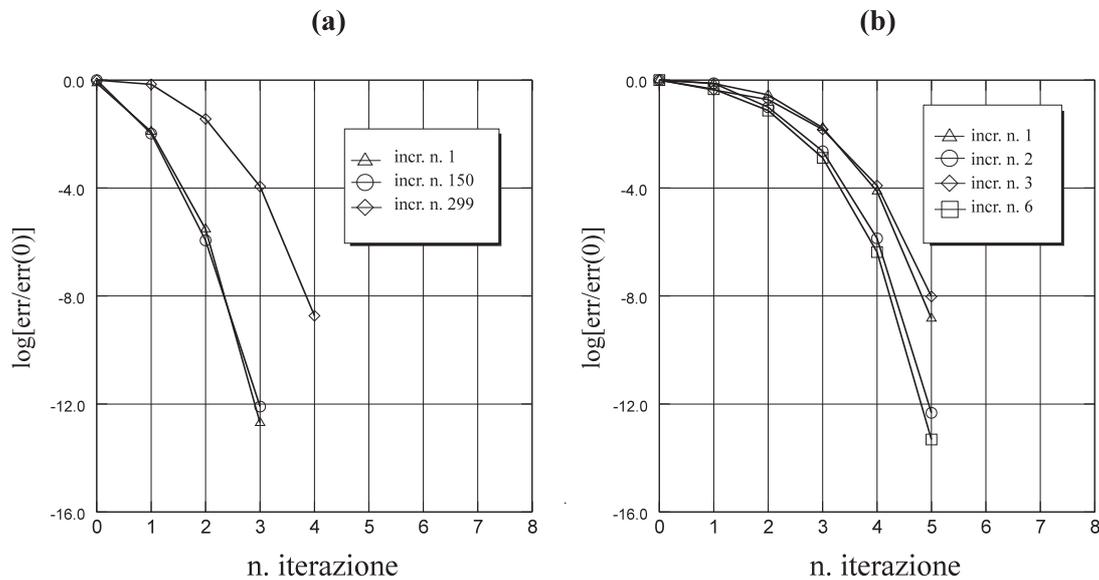


Figura 6.2: Simulazione di una prova di compressione isotropa. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico applicato in 300 (a) ed in 6 incrementi (b)

### Campione debolmente sovraconsolidato

Un provino, caratterizzato da una pressione di preconsolidazione iniziale  $\check{p}_{c0} = 100$  kPa, viene compresso isotropicamente da  $p_0 = 10$  kPa fino a  $\check{p} = 80$  kPa; quindi, a partire da questo stato debolmente sovraconsolidato, si impone una deformazione assiale crescente, mantenendo costante la pressione di confinamento. In Fig. 6.3, i risultati di questa prova sono riportati in quattro diagrammi. Il percorso di tensione è tracciato nel piano  $\check{p} - \check{q}$  (Fig. 6.3a); il campione si deforma elasticamente all'interno della curva di snervamento iniziale ( $Y_0$ ), segue un comportamento incrudente fino al raggiungimento della linea di stato critico (CSL). In tale stato, la componente volumetrica dell'incremento di deformazione plastica è nulla, come è mostrato nel diagramma  $\check{\epsilon}_q - \theta$  (Fig. 6.3c); quindi, la corrispondente curva di snervamento ( $Y_f$ ) risulta stazionaria.

Se si impongono incrementi relativamente grandi di deformazione assiale (14 e 6 incrementi), si calcola una risposta praticamente coincidente con quella ottenuta dall'impiego di incrementi molto piccoli (1000 incrementi).

Infine, la velocità di convergenza della procedura numerica è studiata in Fig. 6.4, con riferimento ai casi in cui la deformazione assiale è imposta in 14 (Fig. 6.4a) ed in 6 incrementi (Fig. 6.4b). Nonostante tali incrementi siano relativamente grandi, la convergenza viene raggiunta dopo poche iterazioni.

### Campione fortemente sovraconsolidato

La prova viene eseguita a partire da uno stato fortemente sovraconsolidato del campione di argilla; in particolare, la preliminare compressione isotropa viene arrestata a  $\check{p} = 20$  kPa ( $\check{p}_{c0} = 100$  kPa). Di conseguenza, il materiale perviene allo stato critico manifestando un comportamento rammollente (Fig. 6.5b), a cui corrisponde un'inversione del

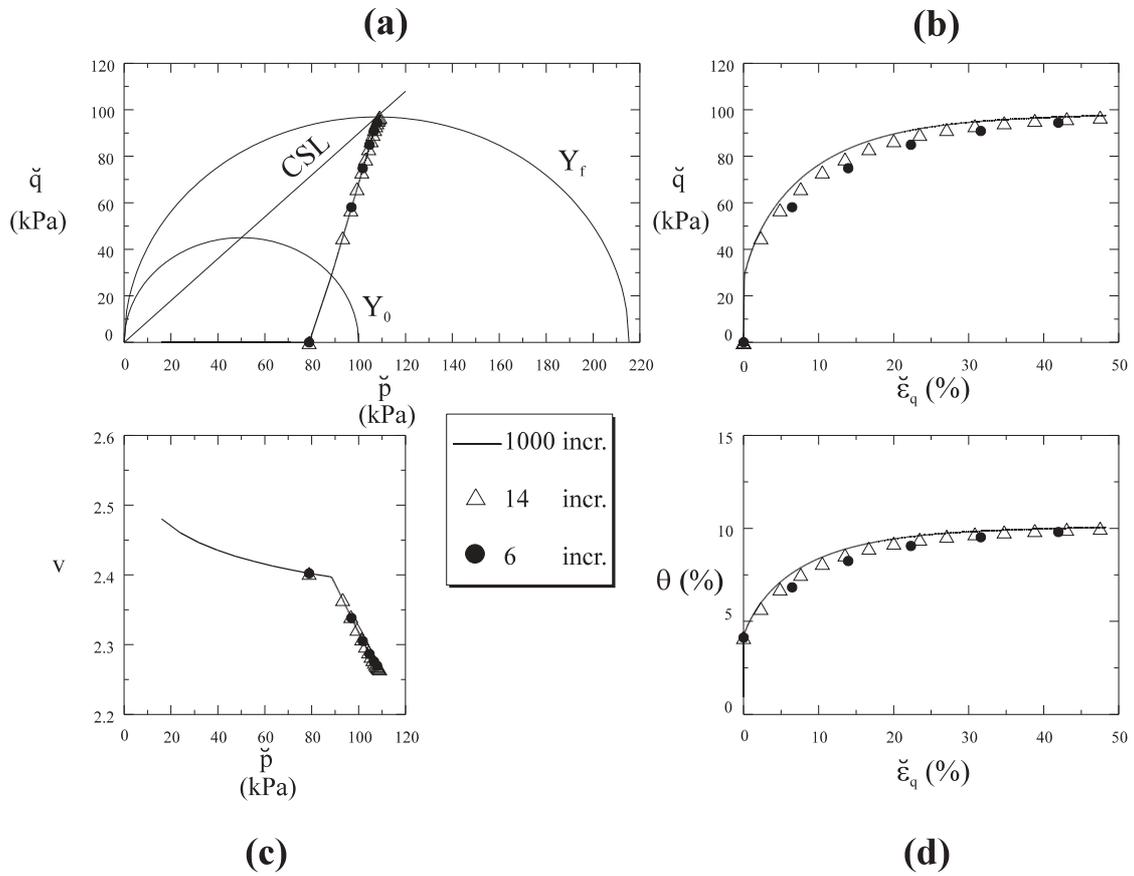


Figura 6.3: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media  $\tilde{p}$  e tensione deviatorica  $\tilde{q}$  di Kirchhoff, deformazione volumetrica  $\theta$  e deviatorica  $\tilde{\epsilon}_q$ , volume specifico  $v$

percorso di tensione (Fig. 6.5a) ed un fenomeno di dilatanza (Fig. 6.5c, d). Anche questa risposta del materiale, più complessa di quella osservata nella prova precedente, viene calcolata in modo accurato utilizzando incrementi di deformazione assiale relativamente grandi (20 e 10 incrementi).

All'interno del diagramma di Fig. 6.5b, è riportato un ingrandimento (ottenuto amplificando la scala di  $\tilde{\epsilon}_q$ ) della parte della curva sforzo-deformazione precedente al raggiungimento del valore di picco di  $\tilde{q}$ ; la non linearità di questo tratto di curva è conseguenza del legame elastico adottato (cfr. par. 4.4.1).

La Fig. 6.6 mostra la velocità di convergenza osservata durante questa prova. La procedura numerica converge in 4 ÷ 6 iterazioni. In corrispondenza dell'applicazione del primo incremento di deformazione assiale, durante il quale si verifica l'inversione del percorso tensionale, sono necessarie 7 iterazioni (Fig. 6.6b).

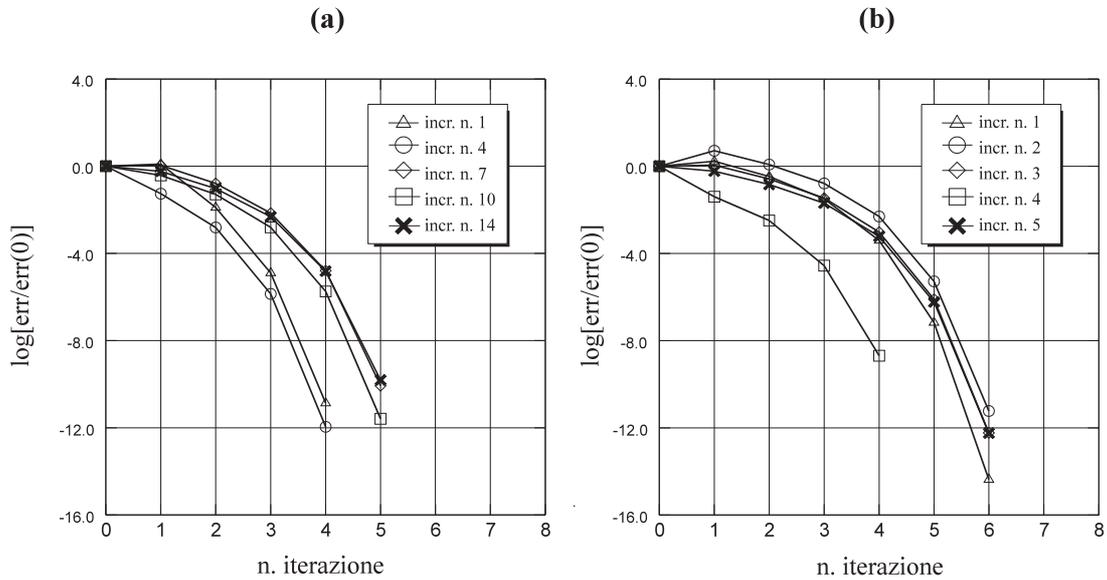


Figura 6.4: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 14 (a) ed in 6 incrementi (b)

### 6.3 Confronto con dati sperimentali

Al fine di verificare l'affidabilità del modello, si confrontano le sue previsioni con i risultati di prove di laboratorio riportati in [1]. In particolare, si considerano una prova di compressione isotropa ed una triassiale drenata standard su campioni di caolino speswhite.

Nel seguito, prima di presentare i risultati di tale confronto, la scelta dei parametri del materiale viene brevemente commentata.

In particolare, per quanto riguarda gli indici bi-logaritmici di rigonfiamento e di compressione vergine ( $k^*$ ,  $\lambda^*$ ; cfr. par. 3.5) del caolino speswhite, in letteratura [1] sono riportate le seguenti stime:

$$k^* = 0.013 \quad \lambda^* = 0.085$$

Quindi, se si richiamano le relazioni (4.125):

$$\check{k} = \frac{k^*}{1 - k^*} \quad \check{\lambda} = \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \quad (6.6)$$

si calcolano i corrispondenti valori dei parametri del modello:

$$\check{k} = 0.013 \quad \check{\lambda} = 0.093$$

Per la valutazione della costante elastica  $\alpha$ , si è fatto ricorso a [38], dove si riportano i valori di rigidezza a taglio misurati nella fase di scarico-ricarico di prove triassiali non drenate su caolino speswhite [24]. In particolare, il rapporto fra tale rigidezza e la

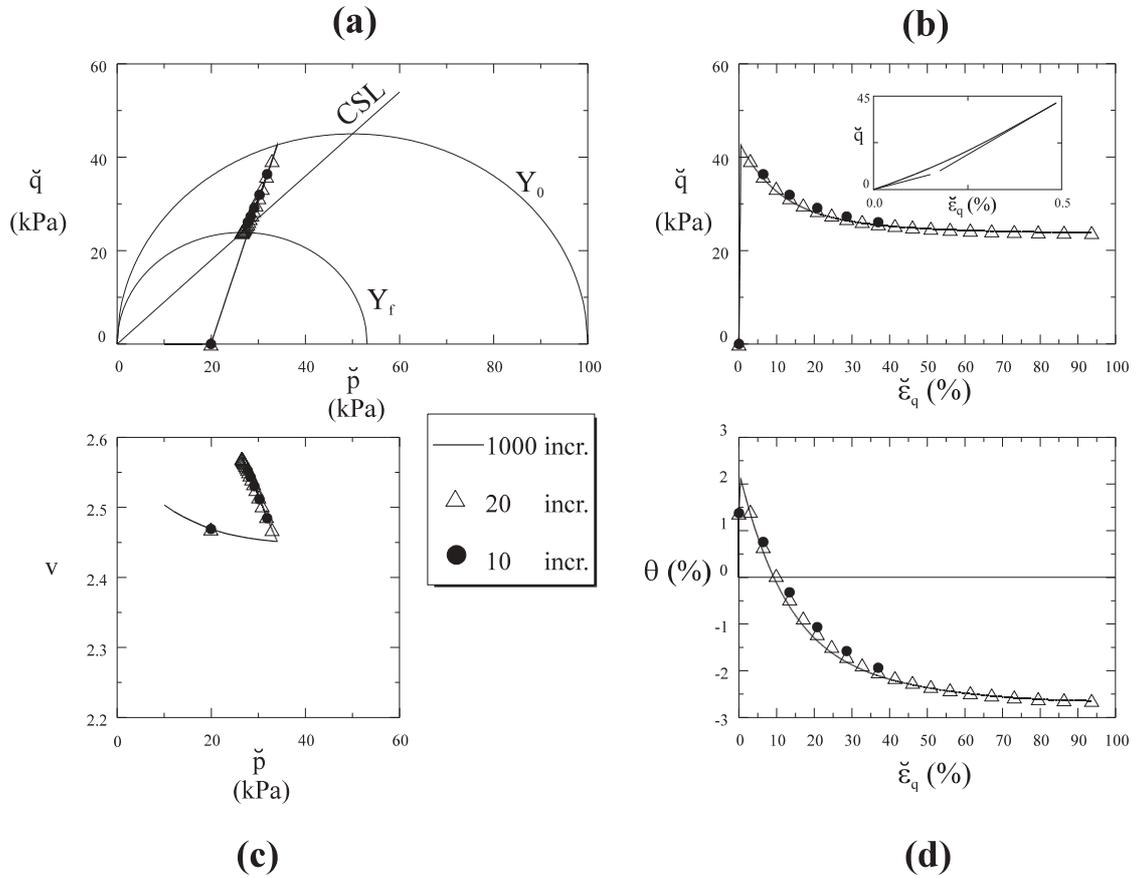


Figura 6.5: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media  $\check{p}$  e tensione deviatorica  $\check{q}$  di Kirchhoff, deformazione volumetrica  $\theta$  e deviatorica  $\check{\epsilon}_q$ , volume specifico  $v$

tensione media efficace ( $\mu_u/p$ ) risulta variabile nell'intervallo  $60 \div 110$ . E' quindi in questo stesso intervallo che va scelto il valore di  $\alpha$ ; tale costante del modello pu' essere infatti calcolata come  $\alpha = \mu_u/p_0$  (cfr. par. 4.5.3).

Secondo [1], un campione di caolino speswhite normalmente consolidato fino a  $p = 1$  kPa presenta volume specifico:  $v_{c1} = 3.20$ . Mentre per la pendenza media della linea di stato critico, si valuta:  $M = 0.9$ . Si osserva, sempre in [1], che altri autori riportano, per il caolino speswhite, stime di  $v_{c1}$  e di  $M$  variabili negli intervalli:

$$v_{c1} = 3.00 \div 3.65 \quad M = 0.8 \div 0.9 \quad (6.7)$$

Alla luce di queste considerazioni, nelle simulazioni numeriche esposte nel seguito, si pone:

$$\check{k} = 0.013 \quad \alpha = 90 \quad \check{\lambda} = 0.093 \quad M = \begin{cases} 0.8 \\ 0.9 \end{cases}$$

e inoltre, al fine di rappresentare i risultati anche in termini di curve pressione-volume, si sceglie  $v_{c1} = 3.50$ .

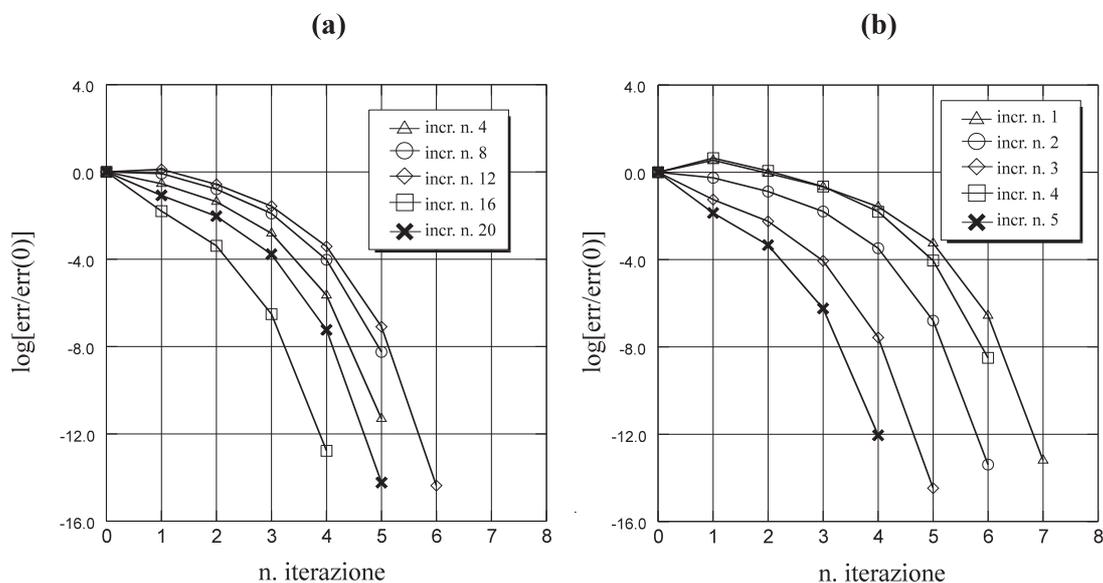


Figura 6.6: Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 20 (a) ed in 10 incrementi (b)

La prova di compressione isotropa indicata come “test 1” in [1], consiste nell’applicazione, su un campione inizialmente normal-consolidato ( $p_0 = p_{c0} = 100$  kPa), di una successione di cicli di carico-scarico-ricarico. La corrispondente curva  $p - v$  è riportata nel piano bi-logaritmico di Fig. 6.7.

Nell’ambito della simulazione numerica della prova, il volume specifico iniziale è calcolato utilizzando la relazione (4.133):

$$v_0 = \left( \frac{p_{c0}}{p_0} \right)^{k^*} p_{c0}^{-\lambda^*} v_{c1} = 2.37$$

E’ evidente, in Fig. 6.7, il buon accordo fra risultati numerici e dati sperimentali.

La prova triassiale drenata indicata come “test 13” in [1], viene eseguita su un campione inizialmente normal-consolidato ( $p_0 = p_{c0} = 300$  kPa). Tale prova comprende anche una fase di scarico, a cui si procede dopo aver raggiunto il valore di tensione deviatorica  $q = 120$  kPa. Le corrispondenti curve sforzo-deformazione  $q/p - \theta$  e  $q/p - \tilde{\epsilon}_q$  sono riportate rispettivamente nei diagrammi di Fig. 6.8 e di Fig. 6.9. I calcoli sono ripetuti per valori di  $M$  variabili nell’intervallo determinato sperimentalmente (6.7<sub>2</sub>). L’esame delle suddette figure evidenzia un soddisfacente accordo fra risultati numerici e dati sperimentali, indicando in  $M = 0.8$  il valore più adatto per la pendenza della linea di stato critico.

Nell’ambito della simulazione F.E.M. della prova triassiale, vengono anche valutate le prestazioni della procedura di Newton (5.47, pag. 89) utilizzata per la soluzione delle equazioni algoritmiche (4.50, 5.31, 5.36). Durante l’applicazione dell’ultimo incremento di carico in campo elasto-plastico, la velocità di convergenza mostrata da tale algoritmo è più che quadratica (Fig. 6.10).

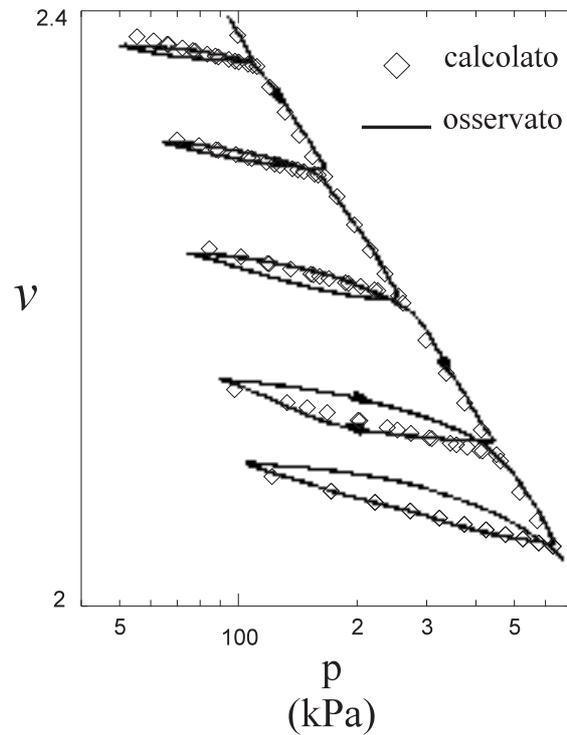


Figura 6.7: Prova di compressione isotropa su caolino speswhite. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Pressione  $p$  vs. volume specifico  $v$

## 6.4 Fondazione nastriforme

Si considera una fondazione nastriforme, di larghezza 1.0 m e di lunghezza infinita, soggetta ad un carico verticale uniformemente distribuito. Si assume che tale fondazione sia infinitamente flessibile; il carico è quindi applicato direttamente sul piano di posa. Tale struttura insiste su un banco di argilla tenera caratterizzato dai seguenti parametri:

$$\check{k} = 0.05 \quad \alpha = 90 \quad \check{\lambda} = 0.20 \quad M = 1.0 \quad \gamma = 20 \text{ kN/m}^3$$

dove  $\gamma$  è il peso dell'unità di volume di terreno.

Si suppone che la velocità di applicazione del carico sia sufficientemente piccola da poter considerare l'argilla in condizioni drenate (cfr. par. 3.2).

La mesh è composta da 100 elementi tridimensionali ad 8 nodi. Lo stato piano di deformazione e la simmetria del problema permettono di considerare solo la metà di una "fetta" di terreno trasversalmente vincolata.

Lo stato tensionale *in situ* è generato attraverso la seguente procedura. Si impone, in ogni punto di integrazione, uno stato tensionale isotropo ( $p_0 = p_{c0} = 1.0 \text{ kPa} \cong 1.2\%$  della massima pressione indotta dal peso proprio del terreno); infatti, l'equazione costitutiva elastica (4.39) richiede che la parte sferica dello stato tensionale iniziale sia non nulla. Il banco di argilla viene quindi suddiviso in 6 strati e a questi si applica sequenzialmente il carico gravitazionale, iniziando dal basso, in 20 incrementi per ogni

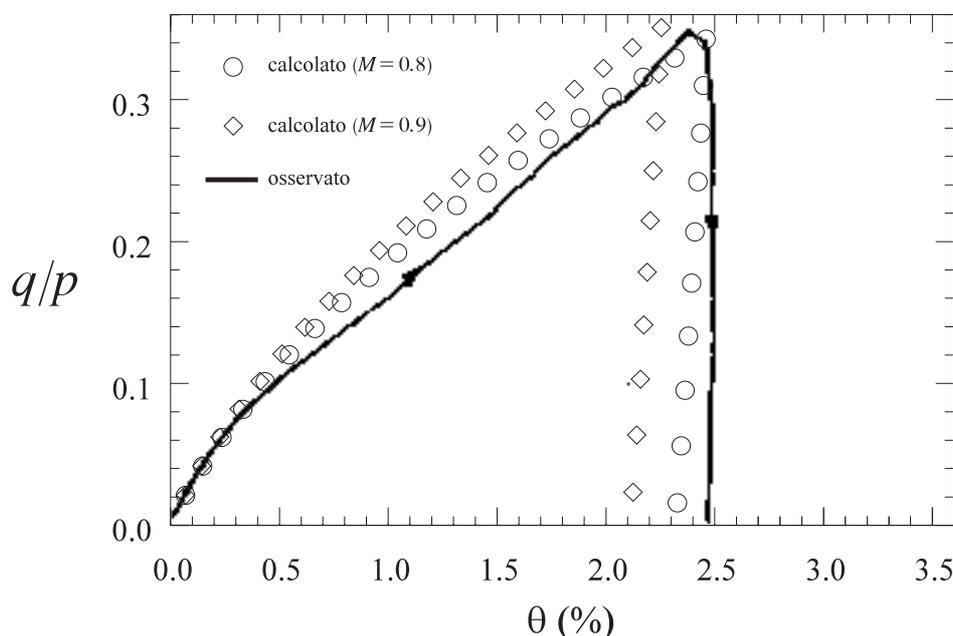


Figura 6.8: Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto  $q/p$  vs. deformazione volumetrica  $\theta$

strato.

Le tensioni verticali *in situ* sono graficamente riportate in Fig. 6.11; nella stessa figura sono rappresentati i carichi nodali equivalenti alla pressione della fondazione sul piano di posa.

Il carico della fondazione è applicato in uguali incrementi di 0.5, 1.0, 2.0 e 5.0 kPa fino ad un valore massimo di 80 kPa. In Fig. 6.12, le tensioni verticali sono graficamente rappresentate sulla mesh deformata. Il cedimento del centro della fondazione ( $w$ ) in funzione del carico applicato, è riportato in Fig. 6.13.

La deformazione della superficie del terreno e l'evoluzione di  $w$  sono quelli qualitativamente osservati nel caso di fondazioni di esigua larghezza che insistono su terreni molto compressibili; si osserva, infatti, un meccanismo di punzonamento, caratterizzato da assenza di rigonfiamento del terreno ai lati della fondazione e da cedimenti che crescono gradualmente con il carico applicato. Questi cedimenti sono di notevole entità; si osservi, a tal proposito, che in Fig. 6.12 la scala utilizzata per rappresentare gli spostamenti non è amplificata.

Nel diagramma di Fig. 6.13, si nota, soprattutto nella fase iniziale, un irrigidimento della risposta causato dalla non-linearità geometrica. Nella stessa figura viene anche verificata l'accuratezza dell'algoritmo; le soluzioni ottenute utilizzando incrementi di carico di diversa ampiezza sono infatti praticamente coincidenti.

Infine, nelle Fig. 6.14a e 6.14b, viene mostrata la velocità di convergenza della procedura numerica. La convergenza viene raggiunta in 6, al massimo 7, iterazioni; dopo la terza iterazione, tale velocità risulta quadratica.

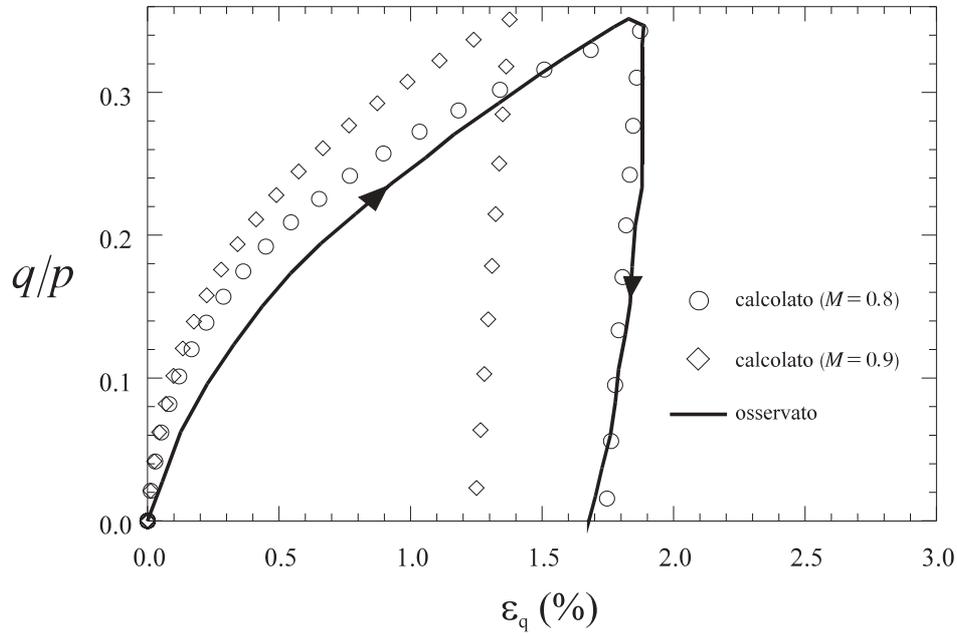


Figura 6.9: Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto  $q/p$  vs. deformazione deviatorica  $\varepsilon_q$

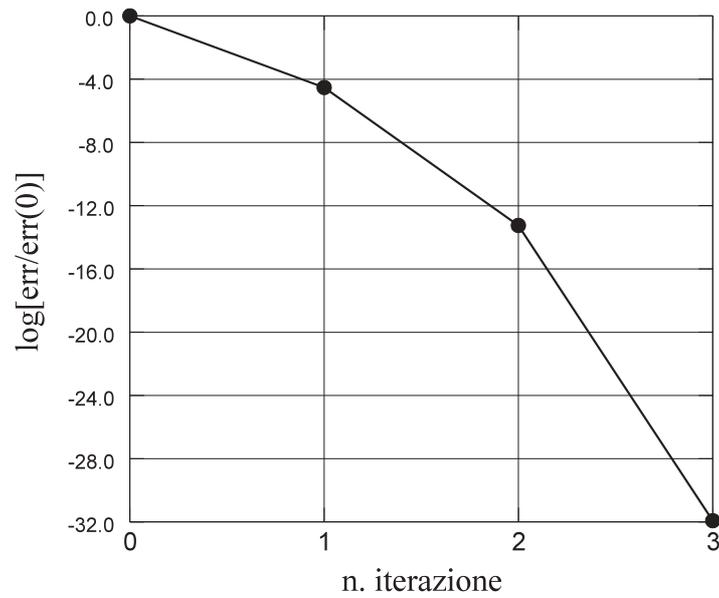


Figura 6.10: Prova triassiale drenata. Velocità di convergenza della procedura di Newton (5.47)

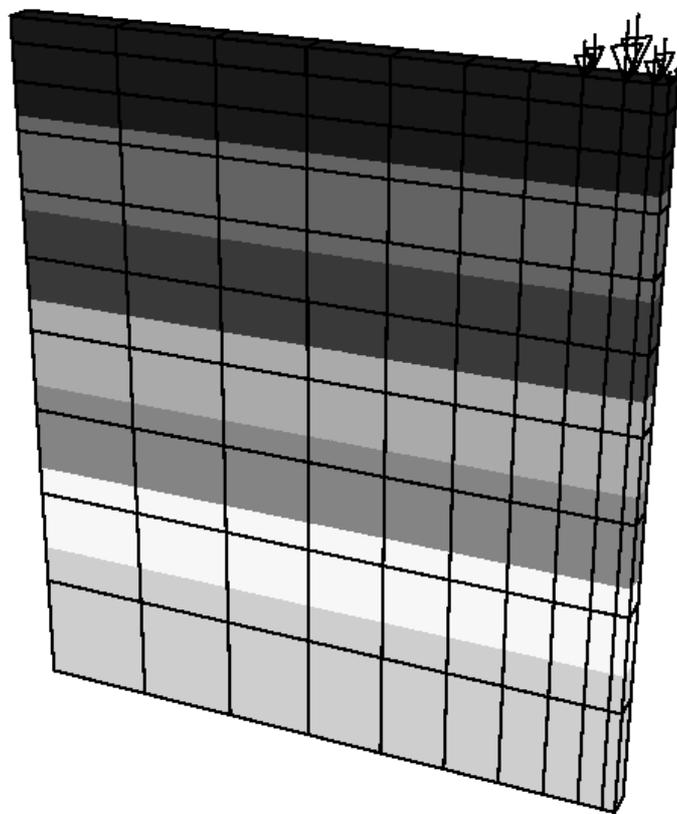


Figura 6.11: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Tensioni verticali in situ e carichi nodali equivalenti alla pressione della fondazione sul piano di posa

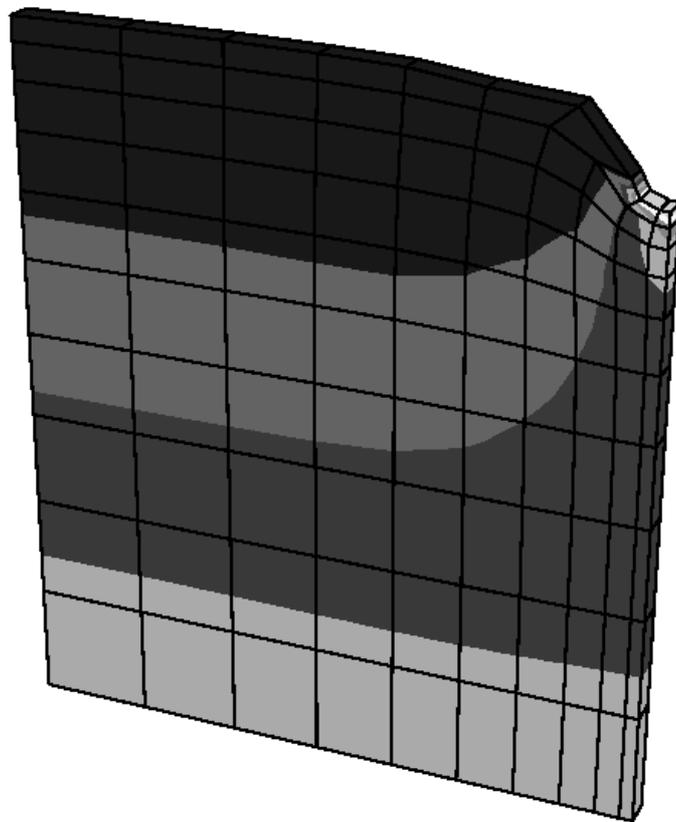


Figura 6.12: Fondazione nastroforme su argilla tenera. Mesh deformata e distribuzione delle tensioni verticali

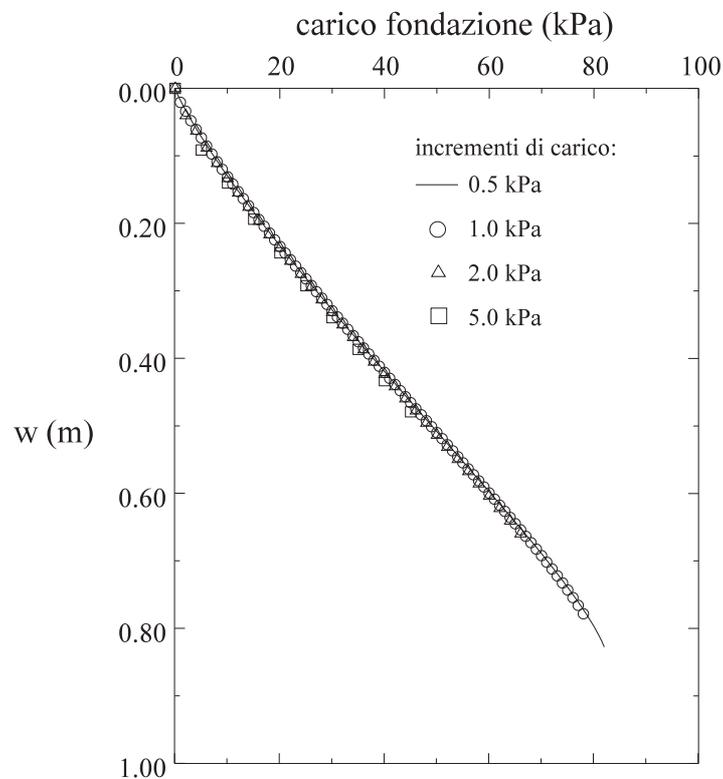


Figura 6.13: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Cedimento del centro della fondazione  $w$  in funzione del carico applicato

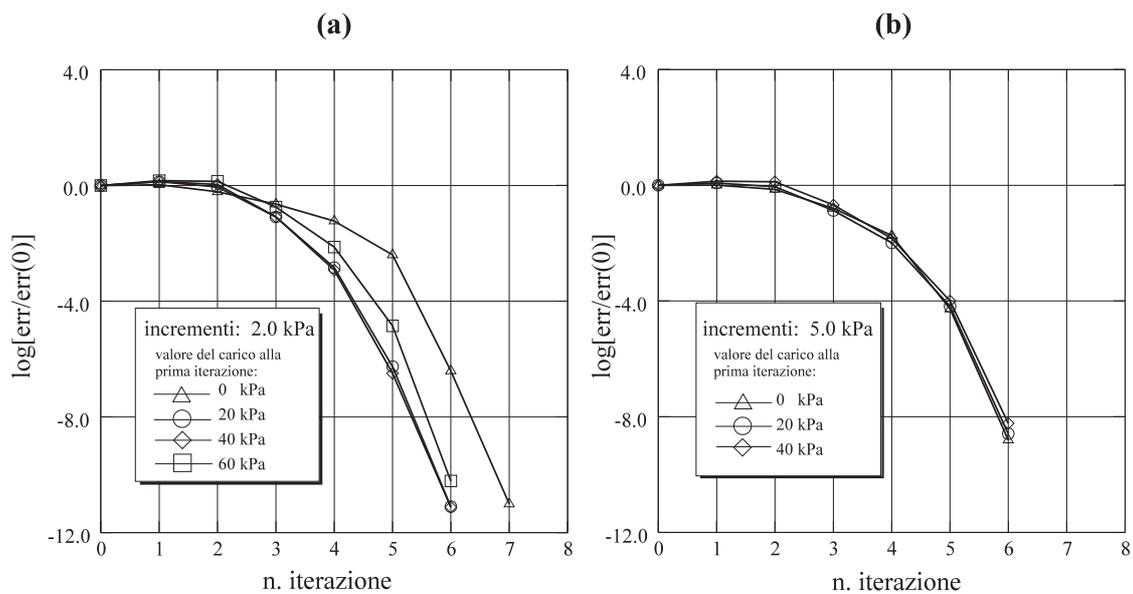


Figura 6.14: Fondazione nastriforme su argilla tenera. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico imposto utilizzando incrementi da 2.0 kPa (a) e da 5.0 kPa (b)

## Conclusioni

L'esame dei dati sperimentali ed una razionale definizione degli aspetti cinematici del comportamento in compressione isotropa evidenziano come l'ipotesi di deformazioni infinitesime non sia in generale adeguata alla modellazione delle argille tenere.

D'altra parte, i risultati del presente lavoro evidenziano come la teoria dell'elasto-plasticità moltiplicativa rappresenti un efficace strumento per la modellazione in deformazioni finite di questi terreni.

In particolare, l'estensione del potenziale elastico proposto da Houlby [38] al caso di deformazioni finite e l'impiego del criterio di snervamento del Cam-clay Modificato [67] in termini di tensioni "vere" conducono ad un modello sia formalmente che fisicamente accettabile.

Infatti, l'espressione adottata per l'energia di deformazione elastica implica la realistica dipendenza di entrambe le rigidità, volumetrica ed a taglio, sia dalla tensione media sia dalla componente ottaedrica dello sforzo. Questo importante risultato viene quindi ottenuto nell'ambito di un legame iperelastico, diversamente da altre formulazioni. Il modello, inoltre, si basa sulla determinazione di pochi parametri di chiaro significato fisico.

Da un punto di vista computazionale, si verifica che una procedura implicita per l'integrazione di un modello Cam-clay in deformazioni finite può essere efficacemente sviluppata nell'ambito degli algoritmi di tipo *return mapping*.

La formulazione di tale procedura è, comunque, operazione abbastanza complessa a causa delle particolarità del legame considerato. Il modello proposto è infatti caratterizzato da forte non linearità del legame elastico, accoppiamento volumetrico-deviatorico in campo elastico e plastico, dipendenza dalla tensione media e possibilità di comportamento rammollente.

L'accuratezza e la stabilità dell'algoritmo di integrazione proposto, implementato in un codice agli elementi finiti, è evidenziata dai risultati numerici. Le previsioni del modello, relative alla simulazione di prove di laboratorio, risultano in soddisfacente accordo con i dati sperimentali disponibili in letteratura.

# Bibliografia

- [1] Al-Tabbaa, A., Permeability and stress-strain response of speswhite kaolin, *Ph.D. thesis*, University of Cambridge, 1987.
- [2] Amorosi, A., Applicazione di un modello iperelastico alla interpretazione del comportamento meccanico di un'argilla consistente e sovraconsolidata, *Proc. G.N.C.S. Ing. Geotecnica C.N.R.*, 1996, 137-140.
- [3] Argyris, J. H. and Doltsinis, J. St., On the large strain inelastic analysis in natural formulation- Part I: Quasistatic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 20, 1979, 213-252.
- [4] Armero, F. and Garikipati, K., Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids, *Proc. 4<sup>th</sup> Comp. Plast. Conf.*, April 1995, Barcelona.
- [5] Armero, F. and Garikipati, K., An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids, *Int. J. Solids Structures*, 33, 1996, 2863-2885.
- [6] Asaro, R., Micromechanics of crystals and polycrystals, *Adv. Appl. Mech.*, 23, 1983, 1-115.
- [7] Atkinson, J. H., and Bransby, P. L., *The mechanics of soils: an introduction to critical state soil mechanics*, London, McGraw Hill, 1978.
- [8] Borja, R. I., Cam-clay plasticity, Part II: Implicit integration of constitutive equation based on a non-linear elastic stress predictor, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 88, 1991, 225-240.
- [9] Borja, R. I. and Alarcòn, E., A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: balance laws, variational formulation, and linearization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 122, 1995, 145-171.
- [10] Borja, R. I. and Lee, S. R., Cam-clay plasticity, Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 78, 1990, 49-72.
- [11] Britto, A.M. and Gunn, M.J., *Critical state soil mechanics via finite elements*, Ellis Horwood, Chichester, 1987.

- [12] Burland, J. B. and Potts, D. M., Development and application of a numerical model for the leaning tower of Pisa, *Proc. First Int. Conf. on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*, Sapporo, Japan, 2, 1995, 715-738.
- [13] Butterfield, R., A natural compression law for soils (an advance on  $e - \log p'$ ), *Géotechnique*, 29, 1979, 469-480.
- [14] Callari, C., Auricchio, F. and Sacco, E., A Return Map Algorithm for a Finite-strain Cam-clay Plasticity Model, *Joint Conf. of Italian Group of Comp. Mech. and Ibero-Latin American Association of Comp. Meth. in Eng.*, Padova, September 1996.
- [15] Callari, C., Auricchio, F. and Sacco, E., Finite-element implementation of a finite-strain Cam-clay model, *5th Int. Conf. on Comp. Plas. (COMPLAS V)*, Barcelona, 1997.
- [16] Callari, C., Auricchio, F. and Sacco, E., A fully-implicit integration technique for the finite element implementation of a finite-strain Cam-clay model, Research Report, Università di Roma Tor Vergata, 1997.
- [17] C. Callari, F. Auricchio, and E. Sacco, A finite-strain Cam-clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity, *International Journal of Plasticity*, 14 (12), 1998, 1155-1187.
- [18] Carter, J. P., Booker, J. R. and Small, J. C., The analysis of finite elasto-plastic consolidation, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 3, 1979, 107-129.
- [19] Chadwick, P., *Continuum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1976
- [20] Charrier, P., Dacorogna, B., Hanouzet, B. and Laborde, P., An existence theorem for slightly compressible material in nonlinear elasticity, *S.I.A.M. Math. Anal.*, 19, 1988, 70-86.
- [21] Coleman, B. D. and Gurtin, M. E., Thermodynamics with internal state variables, *J. Chem. Phys.* 47, 1967, 597-613.
- [22] Coulomb, C. A., Essai sur une application des règles de maxims et minims à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, *Mèm. Acad. R. Sci.*, 7, 1776, 343-382.
- [23] Dafalias, J. F. and Herrmann, L. R., Bounding surface formulation of soil plasticity, *Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads* (Eds. G. N. Pande and O. C. Zienkiewicz), Wiley Chichester, 1982, 253-282.
- [24] Davidson, C. S., The shear modulus of clays, Engineering Tripos, part II, group A, project report, Cambridge University, 1980.
- [25] Derski, W., Izbicki, R., Kisiel, I. and Mróz, Z., *Rock and soil mechanics*, Elsevier, PWN, Warsaw, 1989.

- [26] Drucker, D. C., Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems, *J. Mech. Phys. Solids*, 1, 1953, 217-226.
- [27] Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J., Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, *Trans. ASCE*, 122, 1957, 338-346.
- [28] Drucker, D. C. and Prager, W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Math.*, 10, 1952, 157-165.
- [29] Gens, A. and Potts, D. M., Critical state models in computational geomechanics, *Engrg. Comp.*, 5, 1988, 178-197.
- [30] Gibson, R. E., England, G. L. and Hussey, M. J. L., The theory of one dimensional consolidation of saturated clays, I. Finite non-linear consolidation of thin homogeneous layers, *Géotechnique*, 17, 1967, 261-273.
- [31] Green, A. E. and Naghdi, P., M., A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 18, 1965.
- [32] Gurtin, M. E., *An introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, Orlando, Florida, 1981.
- [33] Hashash, Y. M. A. and Whittle, A. J., Integration of the modified Cam-clay model in non-linear finite element analysis, *Computers and Geotechnics*, 14, 1992, 59-83.
- [34] Hashiguchi, K., On the linear relations of  $V - \ln p$  and  $\ln v - \ln p$  for isotropic consolidation of soils, *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomechanics*, 19, 1995, 367-376.
- [35] Hashiguchi, K., An expression of anisotropy in a plastic constitutive equation of soils, *Proc. 9th Int. Conf. SMFE, Specialty Session 9, Tokio*, 1977, 302-305.
- [36] Hashiguchi, K. and Ueno, M., Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Proc. 9th Int. Conf. SMFE, Specialty Session 9, Tokio*, 1977, 73-82.
- [37] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1951.
- [38] Houlsby, G. T., The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays, *Comput. Geotechn.*, 1, 1985, 3-13.
- [39] Houlsby, G. T., Wroth, C. P. and Wood, D. M., Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model, *Proc. Int. Workshop on Constitutive Behaviour of Soils*, Grenoble, Balkema, Rotterdam, 1982, 99-121.
- [40] Hvorslev, M. J., *Physical properties of remoulded cohesive soils*, Vicksburg, US Army Engineer Waterways Experiment Station, translation, 1969.
- [41] Koiter, W. T., General theorems for elastic-plastic solids, *Prog. in Solid Mech.*, 1, 1960, 167-221.

- [42] Kolymbas, D., The outline of hypoplasticity, *Ing.-Arch.*, 61,1991, 143
- [43] Lambe, T. W. and Whitman, R. V., *Soil Mechanics*, Wiley, New York, 1969.
- [44] Lee, E. H., Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, 36, 1969, 1-6.
- [45] Lubliner, J., *Plasticity Theory*, Macmillan, New York, 1990.
- [46] Lucchesi, M., Owen, D. R. and Podio-Guidugli, P., Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part III: Approximate constitutive Relations, *Arch. Rational Mech. Anal.*,117, 1992, 53-96.
- [47] Lucchesi, M. and Podio-Guidugli, P., Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part I, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 102, 1988, 23-43.
- [48] Lucchesi, M. and Podio-Guidugli, P., Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part II, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 110, 1990, 9-42.
- [49] Maier, G., A matrix structural theory of piecewise linear elasto-plasticity with interacting yield planes, *Meccanica*, 1970, 54-66.
- [50] Mandel, J., Thermodynamics and plasticity, *Foundations of Continuum Thermodynamics*, Macmillan, London, 1974, 283-304.
- [51] Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [52] Meyerhof, G. G., The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads. *3rd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, I, Zurich, 1953, 440-445.
- [53] Mróz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C., An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomechanics*, 2, 1978, 203-221.
- [54] Naghdi, P., M. and Trapp, J. A., Restrictions on constitutive equations for finitely deformed elastic-plastic materials, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* XXVIII, 1, 1975.
- [55] Nagtegaal, J. C., On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 33, 1982.
- [56] Nova, R. and Hueckel, T., A unified approach to the modelling of liquefaction and cyclic mobility of sands, *Soils Foundat.*, 21, 1981, 13-28.
- [57] Ogden, R. W., *Nonlinear elastic deformations*, Ellis Horwood, West Sussex, England, 1984.

- [58] Ortiz, M. and Simo, J. C., An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 23, 1986, 353-366.
- [59] Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A., A finite element method for localized failure analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 61, 1987, 189-214.
- [60] Owen, D. R., Thermodynamics of materials with elastic range, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31, 1968, 91-112.
- [61] Owen, D. R., A mechanical theory of materials with elastic range, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 37, 1970, 85-110.
- [62] Owen, D. R. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, McGraw-Hill, New York, 1980
- [63] Peric, Dj., Owen, D. R. and Honnor, M. E., A model for finite strain elastoplasticity, *2nd Int. Conf. on Comp. Plas.*, Pineridge, Swansea, 111-126.
- [64] Pinsky, P., Ortiz, M. and Pister, K. S., Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 40, 1983, 137-158.
- [65] Podio-Guidugli, P. and Vergara Caffarelli, G., Extreme elastic deformations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 115, 1991, 311-328.
- [66] Rankine, W. J. M., On the stability of loose earth, *Phil. Trans. R. Soc.*, 147, 1857, 9-27.
- [67] Roscoe, K. H. and Burland, J. B., On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press, 1968, 535-609.
- [68] Roscoe, K. H. and Schofield, A. N., Mechanical behaviour of an idealized 'wet' clay, *Proc. 2nd Eur. Conf. SMFE*, Wiesbaden, 1, 1963, 47-54.
- [69] Schofield, A. N. and Wroth, C. P., *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill, 1968.
- [70] Sekiguchi, H. and Ohta, H., Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proc. 9th Int. Conf. SMFE, Specialty Session 9, Tokio*, 1977, 163-175
- [71] Shield, R. T., On Coulomb's law of failure in soils. *J. Mech. Phys. Solids*, 4(1), 1955, 10-16.
- [72] Simo, J. C., On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity, *Mech. Mater.*, 1985, 439-451.

- [73] Simo, J. C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition. Part I: Continuum formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 66, 1988, 199-219.
- [74] Simo, J. C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition. Part II: Computational aspects, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 68, 1988, 1-31.
- [75] Simo, J. C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, 1992, 61-112.
- [76] Simo, J. C., Topics on the numerical analysis and simulation of plasticity. In P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds., *Handbook of numerical analysis*, Vol. 3, Elsevier Science Publisher, 1996.
- [77] Simo, J. C., Oliver, J. and Armero, F., An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, *Computational Mechanics*, 12, 1993, 277-296.
- [78] Simo, J. C. and Meschke, G., A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials, *Computational Mechanics*, 11, 1993, 253-278.
- [79] Simo, J. C. and Ortiz, M., A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 49, 1985, 221-245.
- [80] Simo, J. C. and Pister, K. S., Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: Computational implications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 46, 1984, 201-215.
- [81] Simo, J. C. and Taylor, R. L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 48, 1985, 101-118.
- [82] Simo, J. C. and Taylor, R. L., Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 85, 1991, 273-310.
- [83] Simo, J. C. and Taylor, R. L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 22, 1986, 649-670.
- [84] Simpson, B., Finite elements applied to problems of plane strain deformation in soil, *Ph.D. thesis*, University of Cambridge, 1973.
- [85] Tamagnini, C. and Borja, R.I., Cam-clay modificato: estensione alle grandi deformazioni, *Proc. G.N.C.S. Ing. Geotecnica C.N.R.*, 1996, 177-180.

- [86] Taylor, D. W., *Fundamentals of soil mechanics*, New York, John Wiley and Sons, 1948.
- [87] Terzaghi, K. V., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1943.
- [88] Truesdell, C. and Noll, W., *The non-linear field theories*, Handbuch der Physik, Band III/3, Springer, Berlin, 1965.
- [89] Truesdell, C. and Toupin, R. A., *The classical field theories*, Handbuch der Physik, Band III/1, Springer, Berlin, 1960.
- [90] Wroth, C. P., The predicted performance of soft clay under a trial embankment loading based on the Cam-clay model, *Finite Elements in Geomechanics*, John Wiley and Sons, London, 1975, 191-208.
- [91] Wroth, C. P., and Houlsby, G. T., A critical state model for predicting the behaviour of clays, in *Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-strain in Geotechnical Engineering*, 1980, 592-627.
- [92] Wroth, C. P., and Houlsby, G. T., Soil mechanics - property characterization and analysis procedures, *Proc. 11th Int. Conf. SMFE, San Francisco*, 1, 1985, 1-55.
- [93] Wood, D. M., *Soil behaviour and critical state soil mechanics*, Cambridge University Press, 1990.
- [94] Zienkiewicz, O. C. and Naylor, O. J., Finite element studies of soils and porous media, *Lect. Finite Elements in Continuum Mechanics*, UAH Press, 1973, 459-493.
- [95] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The finite element method*, McGraw Hill, New York, Vol. I, 1989, Vol II, 1991.
- [96] Zytinsky, M., Randolph, M. K., Nova, R. and Wroth, C. P., On modelling the unloading-reloading behaviour of soils, *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomechanics*, 2, 1978, 87-93.
-

# Elenco delle figure

1.1	Curve carico-cedimenti tipicamente osservate per fondazioni su sabbie addensate, argille consistenti (a) e su sabbie sciolte, argille tenere (b) . . . . .	7
1.2	Risposta meccanica delle argille. Sviluppo di deformazioni irreversibili in una prova triassiale (a) ed in una prova di compressione isotropa (b) . . . . .	9
1.3	Influenza della tensione media sulla risposta meccanica delle argille . . . . .	10
3.1	Relazioni logaritmiche fra pressione $p$ e volume specifico $v$ . . . . .	30
3.2	Applicazione di un incremento di pressione su argilla normal-consolidata . . . . .	33
3.3	Cam clay (a) e Cam-clay Modificato (b). Curva di snervamento e linea di stato critico nel piano $p - q$ . . . . .	35
3.4	Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e superficie di stato critico nello spazio delle tensioni principali . . . . .	36
3.5	Cam-clay Modificato. Superficie di snervamento e linea di stato critico nello spazio $p - q - v$ . . . . .	37
3.6	Cam-clay Modificato. Implicazioni dell'ipotesi di flusso plastico associato . . . . .	38
3.7	Cam Clay Modificato. Previsione della risposta di un campione di argilla debolmente sovraconsolidata durante una prova triassiale drenata standard . . . . .	39
4.1	Decomposizione elasto-plastica moltiplicativa del gradiente di deformazione . . . . .	48
4.2	Legame elastico. Influenza della tensione media $\check{p}$ sulla rigidezza a taglio (a) e della tensione deviatorica $\ \mathbf{t}\ $ sulla rigidezza volumetrica (b) . . . . .	56
4.3	Relazione bilogaritmica fra pressione di Kirchhoff e volume specifico . . . . .	60
4.4	Relazioni pressione-volume in termini di sforzi di Kirchhoff e di Cauchy . . . . .	63
4.5	Legame elastico. Inversione di segno del modulo tangente . . . . .	67
4.6	Legame elastico. Retta di massima tensione deviatorica . . . . .	68
4.7	Calcolo del parametro elastico $\alpha$ utilizzando i risultati di una prova triassiale non drenata . . . . .	70
4.8	Valore iniziale della pressione di preconsolidazione in termini di sforzi di Cauchy $p_{c0}$ e di Kirchhoff $\check{p}_{c0}$ . . . . .	71
4.9	Relazione fra il volume specifico iniziale $v_0$ ed il volume specifico $v_{c1}$ di un campione normalmente consolidato fino ad un valore unitario di pressione $p_{c1}$ . . . . .	72
4.10	Legame elastico con rigidezza a taglio costante. Previsione della risposta di un campione sottoposto a prova di compressione monoassiale . . . . .	75

4.11	Legame elastico definito da tre parametri. Condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente (a) e suoi effetti sulla risposta meccanica prevista (b) . . . . .	77
4.12	Legame elastico definito da tre parametri. Grafico delle condizioni di annullamento del determinante del tensore tangente sul piano $\check{p} - \check{q}$ . . .	78
5.1	Schema di un algoritmo di return mapping per il caso di plasticità perfetta. Stato di tentativo elastico: si calcola $\sigma_{n+1}^{tr}$ per mezzo delle relazioni costitutive elastiche. Passo di correzione plastica: lo stato tensionale di tentativo viene proiettato sulla superficie di snervamento $f(\sigma) = 0$ . . .	80
5.2	Schema dell'algoritmo. Passo di tentativo elastico: fissata la configurazione intermedia, si porta quella corrente nella sua posizione definitiva. Passo di correzione plastico: la configurazione intermedia viene aggiornata	85
6.1	Simulazione di una prova di compressione isotropa. Pressione di Kirchhoff $\check{p}$ vs. deformazione volumetrica logaritmica $\theta$ . . . . .	96
6.2	Simulazione di una prova di compressione isotropa. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico applicato in 300 (a) ed in 6 incrementi (b) . . . . .	97
6.3	Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media $\check{p}$ e tensione deviatorica $\check{q}$ di Kirchhoff, deformazione volumetrica $\theta$ e deviatorica $\check{\epsilon}_q$ , volume specifico $v$ . . . . .	98
6.4	Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla debolmente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 14 (a) ed in 6 incrementi (b) . . . . .	99
6.5	Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Risultati in termini di tensione media $\check{p}$ e tensione deviatorica $\check{q}$ di Kirchhoff, deformazione volumetrica $\theta$ e deviatorica $\check{\epsilon}_q$ , volume specifico $v$ . . . . .	100
6.6	Simulazione di una prova triassiale drenata su argilla fortemente sovraconsolidata. Velocità di convergenza della procedura numerica. Deformazione assiale applicata in 20 (a) ed in 10 incrementi (b) . . . . .	101
6.7	Prova di compressione isotropa su caolino speswhite. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Pressione $p$ vs. volume specifico $v$ . . .	102
6.8	Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto $q/p$ vs. deformazione volumetrica $\theta$ . . . . .	103
6.9	Prova triassiale drenata su caolino speswhite normal-consolidato. Previsione del modello e dati sperimentali [1]. Rapporto $q/p$ vs. deformazione deviatorica $\epsilon_q$ . . . . .	104
6.10	Prova triassiale drenata. Velocità di convergenza della procedura di Newton (5.47) . . . . .	104
6.11	Fondazione nastriforme su argilla tenera. Tensioni verticali in situ e carichi nodali equivalenti alla pressione della fondazione sul piano di posa	105

6.12	Fondazione nastriforme su argilla tenera. Mesh deformata e distribuzione delle tensioni verticali . . . . .	106
6.13	Fondazione nastriforme su argilla tenera. Cedimento del centro della fondazione $w$ in funzione del carico applicato . . . . .	107
6.14	Fondazione nastriforme su argilla tenera. Velocità di convergenza della procedura numerica. Carico imposto utilizzando incrementi da 2.0 kPa (a) e da 5.0 kPa (b) . . . . .	107

# Appendice A

## Calcolo di $\mathbf{R}'$

La soluzione dell'algoritmo di *return mapping* formulato nel par. 5.3.1 è ottenuta impiegando la procedura di Newton (5.47), la cui implementazione richiede il calcolo del gradiente:

$$\mathbf{R}' = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (\text{A.1})$$

dove  $\boldsymbol{\chi}$  è il vettore delle incognite:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma \\ \check{p} \\ \check{p}_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

ed  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi})$  il vettore dei residui:

$$R_1 = \hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = \frac{3 \|\mathbf{t}\|^2}{2 M^2} + \check{p}(\check{p} - \check{p}_c) \quad (\text{A.3})$$

$$R_2 = ghl - \check{p} \quad (\text{A.4})$$

$$R_3 = \check{p}_{c,n} \exp \left[ \frac{1}{\check{\nu} - \check{k}} \Delta\gamma (2\check{p} - \check{p}_c) \right] - \check{p}_c \quad (\text{A.5})$$

Il calcolo della matrice  $\mathbf{R}'$  è svolto nella seguente maniera:

### Derivate del residuo $R_1$

Si considerano i termini della  $\mathbf{R}'$  ottenuti derivando la funzione di snervamento (A.3); il primo di questi è:

$$R'_{11} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} \quad (\text{A.6})$$

Si derivano la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbf{t}^{tr} \left( \frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} m + \frac{\partial m}{\partial \Delta\gamma} h \right) \quad (\text{A.7})$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} = -\frac{1}{\check{k}} h (2\check{p} - \check{p}_c) \quad (\text{A.8})$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \Delta\gamma} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} g \left( h + \Delta\gamma \frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} \right) \quad (\text{A.9})$$

si sostituiscono la (A.9) e la (A.8) nella (A.7); si nota inoltre che, per effetto della posizione (5.37), la (5.30) può essere scritta:

$$\mathbf{t}^{tr} = 2\alpha g \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{A.10})$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} = \left( -\frac{1}{\check{k}} h a_1 a_2 + a_3 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{A.11})$$

dove:

$$a_1 = 2\check{p} - \check{p}_c \quad (\text{A.12})$$

$$a_2 = 2\alpha g m \left( 1 - \frac{6\alpha}{M^2} m g h \Delta\gamma \right) \quad (\text{A.13})$$

$$a_3 = -\frac{12\alpha^2}{M^2} (m g h)^2 \quad (\text{A.14})$$

Si sostituiscono la (A.11) e la (4.56<sub>2</sub>) nella (A.6) e si ricava il termine cercato:

$$R'_{11} = a_4 a_5 \left( a_3 - \frac{1}{\check{k}} h a_1 a_2 \right) \quad (\text{A.15})$$

dove:

$$a_4 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{A.16})$$

$$a_5 = \frac{3}{M^2} \quad (\text{A.17})$$

Si calcola ora la quantità:

$$R'_{12} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}} = 2\check{p} - \check{p}_c + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}} \quad (\text{A.18})$$

a tal fine, si derivano la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}} = \mathbf{t}^{tr} \left( \frac{\partial h}{\partial \check{p}} m + \frac{\partial m}{\partial \check{p}} h \right) \quad (\text{A.19})$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \check{p}} = -\frac{2\Delta\gamma}{\check{k}} h \quad (\text{A.20})$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \check{p}} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma g \frac{\partial h}{\partial \check{p}} \quad (\text{A.21})$$

si sostituiscono questa relazione e la (A.20) nella (A.19), tenendo conto della (A.10). Si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}} = -\frac{2\Delta\gamma}{\check{k}} ha_2 \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{A.22})$$

Per ricavare  $R'_{12}$ , si sostituisce la precedente equazione e la (4.56<sub>2</sub>) nella (A.18):

$$R'_{12} = a_1 - \frac{6\Delta\gamma}{\check{k}M^2} ha_2 a_4 \quad (\text{A.23})$$

Si calcola ora il terzo termine:

$$R'_{13} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}_c} = -\check{p} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}_c} \quad (\text{A.24})$$

è quindi necessario derivare la (5.42):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}_c} = \mathbf{t}^{tr} \left( \frac{\partial h}{\partial \check{p}_c} m + \frac{\partial m}{\partial \check{p}_c} h \right) \quad (\text{A.25})$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \check{p}_c} = \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} h \quad (\text{A.26})$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \check{p}_c} = -m^2 \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma g \frac{\partial h}{\partial \check{p}_c} \quad (\text{A.27})$$

si sostituiscono questa relazione e la (A.26) nella (A.25), tenendo conto della (A.10); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}_c} = \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} ha_2 \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{A.28})$$

Il termine cercato si calcola sostituendo la precedente equazione e la (4.56<sub>2</sub>) nella (A.24):

$$R'_{13} = -\check{p} + \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} ha_2 a_4 a_5 \quad (\text{A.29})$$

### Derivate del residuo $R_2$

Si considerano i termini della  $\mathbf{R}'$  ottenuti per derivazione della (A.4); il primo di questi è:

$$R'_{21} = \frac{\partial R_2}{\partial \Delta\gamma} = g \left( \frac{\partial h}{\partial \Delta\gamma} l + \frac{\partial l}{\partial \Delta\gamma} h \right) + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Delta\gamma} \quad (\text{A.30})$$

si deriva la (5.39) rispetto a  $\Delta\gamma$ :

$$\frac{\partial l}{\partial \Delta\gamma} = \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \left( \frac{3}{M^2} \Delta\gamma \|\mathbf{t}\|^2 - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \right) \quad (\text{A.31})$$

la (A.4) e la (5.39) rispetto a  $\mathbf{t}$ :

$$\frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} = gh \frac{\partial l}{\partial \mathbf{t}} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{t}} = \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \Delta\gamma \left( \frac{3}{M^2} \Delta\gamma \mathbf{t} - \mathbf{e}^{e,tr} \right) \quad (\text{A.33})$$

si sostituisce quest'ultima equazione in quella che la precede:

$$\frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} = \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \Delta\gamma gh \left( \frac{3}{M^2} \Delta\gamma \mathbf{t} - \mathbf{e}^{e,tr} \right) \quad (\text{A.34})$$

e questa, a sua volta, nella (A.30), unitamente alle (A.8, A.31, A.11); si ricava:

$$R'_{21} = \frac{1}{\check{k}} gh \left( \check{k}a_6 - la_1 - \frac{1}{\check{k}} ha_1 a_2 b_1 + a_3 b_1 \right) \quad (\text{A.35})$$

dove:

$$a_6 = \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \left( \frac{3}{M^2} \Delta\gamma \|\mathbf{t}\|^2 - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$a_7 = \frac{18\alpha}{\check{k}M^4} \Delta\gamma^2 \quad (\text{A.37})$$

$$b_1 = \check{k}a_7 a_4 - \frac{6\alpha}{M^2} \Delta\gamma \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \quad (\text{A.38})$$

Si consideri ora il termine:

$$R'_{22} = \frac{\partial R_2}{\partial \check{p}} = gl \frac{\partial h}{\partial \check{p}} - 1 + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}} \quad (\text{A.39})$$

Si sostituiscono in questa equazione le (A.20, A.34, A.22); si ha:

$$R'_{22} = -\frac{2\Delta\gamma}{\check{k}} gh (ha_2 a_8 + l) - 1 \quad (\text{A.40})$$

dove:

$$a_8 = \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\check{k}M^2} \left( \frac{3\Delta\gamma}{M^2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} - \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \right) \quad (\text{A.41})$$

La terza derivata del residuo  $R_2$  è data dalla:

$$R'_{23} = \frac{\partial R_2}{\partial \check{p}_c} = gl \frac{\partial h}{\partial \check{p}_c} + \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{t}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \check{p}_c} \quad (\text{A.42})$$

in questa si sostituiscono le (A.26, A.34, A.28); si ricava:

$$R'_{23} = \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} gh (ha_2 a_8 + l) \quad (\text{A.43})$$

**Derivate del residuo  $R_3$** 

I termini della  $\mathbf{R}'$  ottenuti per derivazione della (A.5) sono:

$$R'_{31} = \frac{\partial R_3}{\partial \Delta\gamma} = a_1 a_9 \quad (\text{A.44})$$

$$R'_{32} = \frac{\partial R_3}{\partial \check{p}} = 2a_9 \Delta\gamma \quad (\text{A.45})$$

$$R'_{33} = \frac{\partial R_3}{\partial \check{p}_c} = -(1 + a_9 \Delta\gamma) \quad (\text{A.46})$$

dove:

$$a_9 = \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}} \check{p}_{c,n} \exp \left[ \frac{\Delta\gamma}{\check{\lambda} - \check{k}} (2\check{p} - \check{p}_c) \right] \quad (\text{A.47})$$

**Riepilogo dei termini della  $\mathbf{R}'$** 

Infine, la matrice  $\mathbf{R}'$ , è ottenuta come:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} a_4 a_5 \left( a_3 - \frac{1}{\check{k}} h a_1 a_2 \right) & a_1 - \frac{6\Delta\gamma}{\check{k} M^2} h a_2 a_4 & -\check{p} + \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} h a_2 a_4 a_5 \\ \frac{g}{\check{k}} h \left( \check{k} a_6 - l a_1 - \frac{h}{\check{k}} a_1 a_2 b_1 + a_3 b_1 \right) & -\frac{2\Delta\gamma}{\check{k}} g h (h a_2 a_8 + l) - 1 & \frac{\Delta\gamma}{\check{k}} g h (h a_2 a_8 + l) \\ a_1 a_9 & 2a_9 \Delta\gamma & -(1 + a_9 \Delta\gamma) \end{bmatrix}$$

le espressioni dei coefficienti  $g$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $a_i$  e  $b_i$  sono riepilogate in App. C.

# Appendice B

## Calcolo della tangente algoritmica

Per la determinazione della tangente elasto-plastica algoritmica (cfr. par. 5.3.1) è necessario differenziare le relazioni (5.31, 5.32, 5.36); infatti è:

$$\mathbf{a}^{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \quad (\text{B.1})$$

in particolare si ha:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left( \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \otimes \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \quad (\text{B.3})$$

e inoltre:

$$\frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{1} \quad \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{B.4})$$

Per ottenere l'espressione in forma chiusa di  $\mathbf{a}^{ep}$ , si calcolano prima le derivate di  $\check{p}$ ,  $\mathbf{t}$  e  $\check{p}_c$ , sia rispetto a  $\theta^{e,tr}$  che rispetto a  $\mathbf{e}^{e,tr}$ , quindi, per ricavare il differenziale di  $\Delta\gamma$ , viene imposta la condizione di consistenza.

### Derivate rispetto a $\theta^{e,tr}$

Si deriva la (5.36) e la si esplicita rispetto a  $\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}}$ ; si ha:

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} = b_2 \left( a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} \right) \quad (\text{B.5})$$

dove:

$$b_2 = \frac{a_9}{1 + a_9 \Delta\gamma} \quad (\text{B.6})$$

La derivata della (5.31), se si tiene conto delle posizioni (5.37-5.39), assume la forma:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{\partial g}{\partial \theta^{e,tr}} hl + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} gl + \frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} gh \quad (\text{B.7})$$

pertanto si derivano la (5.37):

$$\frac{\partial g}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{1}{\check{k}} g \quad (\text{B.8})$$

la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} = -\frac{1}{\check{k}} h \left( a_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + 2 \Delta \gamma \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} - \Delta \gamma \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} \right) \quad (\text{B.9})$$

e la (5.39):

$$\frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} = a_6 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + a_7 \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \cdot \mathbf{t} - \frac{6\alpha \Delta \gamma}{\check{k} M^2} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.10})$$

Si deriva la (5.32), nella sua forma (5.42) ottenuta dalle posizioni (5.38, 5.41):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \theta^{e,tr}} h m + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} m + \frac{\partial m}{\partial \theta^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} h \quad (\text{B.11})$$

quindi si derivano la (A.10):

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \theta^{e,tr}} = \frac{2\alpha}{\check{k}} g \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.12})$$

e la (5.41), tenendo conto della (B.8):

$$\frac{\partial m}{\partial \theta^{e,tr}} = -\frac{6\alpha}{M^2} m^2 \left( \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} g h + \frac{\Delta \gamma}{\check{k}} g h + \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} \Delta \gamma g \right) \quad (\text{B.13})$$

Si sostituiscono le (A.10, B.12, B.13) nella (B.11); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left( a_3 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + a_2 \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} + a_2 \frac{h}{\check{k}} \right) \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.14})$$

questa espressione viene a sua volta sostituita nella (B.10); si ricava:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta^{e,tr}} = b_3 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + b_4 \frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} + b_4 \frac{h}{\check{k}} \quad (\text{B.15})$$

dove si è posto:

$$b_3 = a_6 + a_3 \left( a_4 a_7 - \frac{6\alpha \Delta \gamma}{\check{k} M^2} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \right) \quad (\text{B.16})$$

$$b_4 = a_2 \left( a_4 a_7 - \frac{6\alpha \Delta \gamma}{\check{k} M^2} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \right) \quad (\text{B.17})$$

Si sostituiscono le (B.15, B.8, B.9, B.5) nella (B.7), in cui può essere finalmente esplicitata la derivata di  $\check{p}$  rispetto a  $\theta^{e,tr}$ :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \theta^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + c_2 \quad (\text{B.18})$$

dove si è posto:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{\check{k}}gha_1(l + b_4h)(b_2\Delta\gamma - 1) + ghb_3}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \quad (\text{B.19})$$

$$c_2 = \frac{1}{\check{k}} \frac{\check{p} + b_4gh^2}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \quad (\text{B.20})$$

La sostituzione della (B.18) nella (B.5) fornisce la derivata di  $\check{p}_c$ :

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + d_2 \quad (\text{B.21})$$

dove:

$$d_1 = b_2(a_1 + 2\Delta\gamma c_1) \quad (\text{B.22})$$

$$d_2 = 2\Delta\gamma b_2 c_2 \quad (\text{B.23})$$

Le derivate di  $\check{p}$  (B.18) e  $\check{p}_c$  (B.21) vengono sostituite nella (B.9), in modo da ottenere:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta^{e,tr}} = f_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + f_2 \quad (\text{B.24})$$

dove si è posto:

$$f_1 = -\frac{1}{\check{\gamma}}h[a_1 + \Delta\gamma(2c_1 - d_1)] \quad (\text{B.25})$$

$$f_2 = -\frac{1}{\check{\gamma}}h\Delta\gamma(2c_2 - d_2) \quad (\text{B.26})$$

Infine, per ottenere la derivata di  $\mathbf{t}$ , si sostituisce la (B.24) nella (B.14):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^{e,tr}} = \left( u_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \theta^{e,tr}} + u_2 \right) \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.27})$$

dove:

$$u_1 = a_3 + a_2 f_1 \quad (\text{B.28})$$

$$u_2 = a_2 \left( f_2 + \frac{1}{\check{\gamma}}h \right) \quad (\text{B.29})$$

### Derivate rispetto a $\mathbf{e}^{e,tr}$

Si deriva la (5.36) e la si esplicita rispetto a  $\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}$ ; si ha:

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = b_2 \left( a_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + 2\Delta\gamma \frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right) \quad (\text{B.30})$$

La derivata della (5.31), se si tiene conto delle posizioni (5.37-5.39), assume la forma:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = g \left( \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} l + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} h \right) \quad (\text{B.31})$$

è infatti nulla la derivata di  $g$ . Si derivano la (5.38):

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = -\frac{1}{\check{k}} h \left( a_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + 2 \Delta \gamma \frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} - \Delta \gamma \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right) \quad (\text{B.32})$$

e la (5.39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} &= a_6 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + a_7 \left( \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right)^T \mathbf{t} - \frac{6\alpha \Delta \gamma}{\check{k} M^2} \left( \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right)^T \mathbf{e}^{e,tr} + \\ &+ \frac{2\alpha}{\check{k}} \left( \mathbf{e}^{e,tr} - \frac{3}{M^2} \Delta \gamma \mathbf{t} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Si deriva la (5.32), nella sua forma (5.42) ottenuta dalle posizioni (5.38, 5.41):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = \frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} h m + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} m + \frac{\partial m}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \mathbf{t}^{tr} h \quad (\text{B.34})$$

quindi si derivano la (A.10):

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{tr}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = 2\alpha g \mathbf{I} \quad (\text{B.35})$$

e la (5.41):

$$\frac{\partial m}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = -\frac{6\alpha}{M^2} g m^2 \left( \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} h + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \Delta \gamma \right) \quad (\text{B.36})$$

Si sostituiscono le (A.10, B.35, B.36) nella (B.34); si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = a_{10} \mathbf{I} + \sum_{A=1}^3 \mathbf{n}_A \otimes \left( a_3 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + a_2 \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \right) e_A^{e,tr} \quad (\text{B.37})$$

dove si è posto:

$$a_{10} = 2\alpha g h m \quad (\text{B.38})$$

Dalla sostituzione della (B.37) nella (B.33) e dopo vari passaggi si ricava:

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = b_3 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + b_4 \frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + b_5 \mathbf{e}^{e,tr} + b_6 \mathbf{t} \quad (\text{B.39})$$

dove si è posto:

$$b_5 = \frac{2\alpha}{\check{k}} \left( 1 - \frac{3}{M^2} \Delta \gamma a_{10} \right) \quad (\text{B.40})$$

$$b_6 = a_7 a_{10} - \frac{6\alpha \Delta \gamma}{\check{k} M^2} \quad (\text{B.41})$$

Si sostituisce la (B.30) nella (B.32) e questa, insieme alla (B.39), nella (B.31). Si può finalmente esplicitare la derivata di  $\check{p}$ :

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \quad (\text{B.42})$$

dove si è posto:

$$c_3 = \frac{ghb_5}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{k}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \quad (\text{B.43})$$

$$c_4 = \frac{ghb_6}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{k}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \quad (\text{B.44})$$

Inoltre, la sostituzione della (B.42) nella (B.30) fornisce la derivata di  $\check{p}_c$ :

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \quad (\text{B.45})$$

dove:

$$d_3 = 2\Delta\gamma b_2 c_3 \quad (\text{B.46})$$

$$d_4 = 2\Delta\gamma b_2 c_4 \quad (\text{B.47})$$

Le derivate di  $\check{p}$  (B.42) e  $\check{p}_c$  (B.45) vengono sostituite nella (B.32), in modo da ottenere:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = f_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + f_3 \mathbf{e}^{e,tr} + f_4 \mathbf{t} \quad (\text{B.48})$$

dove si è posto:

$$f_3 = -\frac{1}{\check{v}} h \Delta \gamma (2c_3 - d_3) \quad (\text{B.49})$$

$$f_4 = -\frac{1}{\check{v}} h \Delta \gamma (2c_4 - d_4) \quad (\text{B.50})$$

Infine, per ottenere la derivata di  $\mathbf{t}$ , si sostituisce la (B.48) nella (B.37):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \quad (\text{B.51})$$

dove:

$$u_3 = a_2 f_3 \quad (\text{B.52})$$

$$u_4 = a_2 f_4 \quad (\text{B.53})$$

**Imposizione della condizione di consistenza**

Se vi è sviluppo di deformazioni plastiche risulta:  $\Delta\gamma > 0$ ; quindi, le condizioni di Kuhn-Tucker (5.23<sub>3</sub>) implicano l'annullamento dell'equazione di snervamento  $\hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = 0$ . Differenziando questa relazione si ottiene la condizione di consistenza:

$$d\hat{f}(\boldsymbol{\beta}, \check{p}_c) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}_c} d\check{p}_c = 0 \quad (\text{B.54})$$

dove:

$$d\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.55})$$

$$d\check{p}_c = \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.56})$$

Si sostituiscono le (B.18, B.42, B.4) nella (B.2); si ottiene:

$$\frac{\partial \check{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = c_1 \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + c_2 \mathbf{1} + c_3 \mathbf{e}^{e,tr} + c_4 \mathbf{t} \quad (\text{B.57})$$

Analogamente, si sostituiscono le (B.27, B.51, B.4) nella (B.3); si ricava:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = u_1 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr} \otimes \mathbf{t} + a_{10} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (\text{B.58})$$

La sostituzione delle (B.57, B.58) nella (B.1) fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} &= (c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + (c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + (c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{t} + \\ &+ (d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{1} + a_{10} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Si sostituisce questa espressione nel differenziale di  $\boldsymbol{\beta}$  (B.55); si ottiene:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta} &= (c_1 \mathbf{1} + u_1 \mathbf{e}^{e,tr}) \left( \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \right) + (c_3 \mathbf{1} + u_3 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + \\ &+ (c_4 \mathbf{1} + u_4 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + (d_6 \mathbf{1} + u_2 \mathbf{e}^{e,tr}) (\mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr}) + a_{10} d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Nella precedente relazione si individua il differenziale di  $\Delta\gamma$ :

$$d(\Delta\gamma) = \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.61})$$

Inoltre si è posto:

$$d_5 = c_2 - \frac{1}{3} a_{10} \quad (\text{B.62})$$

La (B.60), insieme alla (4.55), viene sostituita nel primo addendo a secondo membro della (B.54); dopo alcuni passaggi si ha:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot d\boldsymbol{\beta} = \omega_1 d(\Delta\gamma) + \omega_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \omega_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \omega_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.63})$$

dove si è posto:

$$\omega_1 = a_1 c_1 + a_5 u_1 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.64})$$

$$\omega_2 = a_1 c_2 + a_5 u_2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.65})$$

$$\omega_3 = a_1 c_3 + a_5 u_3 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \quad (\text{B.66})$$

$$\omega_4 = a_1 c_4 + a_5 u_4 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} + a_5 a_{10} \quad (\text{B.67})$$

Si valuta adesso il differenziale  $d\check{p}_c$  della pressione di preconsolidazione:

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \theta^{e,tr}} \frac{\partial \theta^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + \left( \frac{\partial \mathbf{e}^{e,tr}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \right)^T \frac{\partial \check{p}_c}{\partial \mathbf{e}^{e,tr}} \quad (\text{B.68})$$

Si sostituiscono in questa equazione le (B.21, B.45, B.4):

$$\frac{\partial \check{p}_c}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = d_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} + d_2 \mathbf{1} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \quad (\text{B.69})$$

e si ricava il differenziale considerato:

$$d\check{p}_c = d_1 \frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_2 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_3 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + d_4 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.70})$$

Inoltre, derivando la condizione di snervamento (4.50), si ottiene:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \check{p}_c} = -\check{p} \quad (\text{B.71})$$

Le (B.63, B.70, B.71) vengono sostituite nell'equazione scalare (B.54) la cui risoluzione fornisce il differenziale del parametro di consistenza:

$$d(\Delta \gamma) = \eta_1 \mathbf{1} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \eta_2 \mathbf{e}^{e,tr} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} + \eta_3 \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\rho}^{e,tr} \quad (\text{B.72})$$

dove si è posto:

$$\eta_1 = -\frac{\omega_2 - \check{p}d_2}{\omega_1 - \check{p}d_1} \quad (\text{B.73})$$

$$\eta_2 = -\frac{\omega_3 - \check{p}d_3}{\omega_1 - \check{p}d_1} \quad (\text{B.74})$$

$$\eta_3 = -\frac{\omega_4 - \check{p}d_4}{\omega_1 - \check{p}d_1} \quad (\text{B.75})$$

Si sostituisce l'espressione di  $d(\Delta \gamma)$  nella (B.60) e finalmente, tenendo conto della (B.55), si ottiene il tensore algoritmico elasto-plastico:

$$\mathbf{a}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\rho}^{e,tr}} = (\delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{1} + (\delta_3 \mathbf{1} + \delta_4 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{e}^{e,tr} + (\delta_5 \mathbf{1} + \delta_6 \mathbf{e}^{e,tr}) \otimes \mathbf{t} + a_{10} \mathbf{I} \quad (\text{B.76})$$

dove:

$$\delta_1 = c_1\eta_1 + d_5 \quad \delta_2 = u_1\eta_1 + u_2 \quad (\text{B.77})$$

$$\delta_3 = c_1\eta_2 + c_3 \quad \delta_4 = u_1\eta_2 + u_3 \quad (\text{B.78})$$

$$\delta_5 = c_1\eta_3 + c_4 \quad \delta_6 = u_1\eta_3 + u_4 \quad (\text{B.79})$$

In componenti si ha:

$$a_{AB}^{ep} = (\delta_1 + \delta_2 e_A^{e,tr}) + (\delta_3 + \delta_4 e_A^{e,tr}) e_B^{e,tr} + (\delta_5 + \delta_6 e_A^{e,tr}) t_B + a_{10} \delta_{AB} \quad (\text{B.80})$$

dove  $\delta_{AB}$  è il simbolo di Kronecker. Le posizioni assunte durante i calcoli sono riepilogate in App. C.

# Appendice C

## Riepilogo dei coefficienti

Sono qui riepilogate le posizioni assunte nei calcoli di  $\mathbf{R}'$  (par. 5.3.2 e App. A) e del tensore algebrico  $\mathbf{a}^{ep}$  (par. 5.3.3 e App. B)

$$\begin{aligned}
 g &= p_0 \exp\left(\frac{\theta^{e,tr}}{\check{k}}\right) \\
 h &= \exp\left[-\frac{1}{\check{k}}\Delta\gamma(2\check{p} - \check{p}_c)\right] \\
 l &= 1 + \frac{\alpha}{\check{k}}\|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 + \frac{9\alpha}{\check{k}M^4}\Delta\gamma^2\|\mathbf{t}\|^2 - \frac{6\alpha}{\check{k}M^2}\Delta\gamma\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \\
 m &= \left(1 + \frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma gh\right)^{-1} \\
 \\
 a_1 &= 2\check{p} - \check{p}_c \\
 a_2 &= 2\alpha gm \left(1 - \frac{6\alpha}{M^2}mgh\Delta\gamma\right) \\
 a_3 &= -\frac{12\alpha^2}{M^2}(mgh)^2 \\
 a_4 &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} \\
 a_5 &= \frac{3}{M^2} \\
 a_6 &= \frac{6\alpha}{\check{k}M^2} \left(\frac{3}{M^2}\Delta\gamma\|\mathbf{t}\|^2 - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr}\right) \\
 a_7 &= \frac{18\alpha}{\check{k}M^4}\Delta\gamma^2 \\
 a_8 &= \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\check{k}M^2} \left(\frac{3\Delta\gamma}{M^2}\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e,tr} - \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2\right) \\
 a_9 &= \frac{1}{\check{\lambda} - \check{k}}\check{p}_{c,n} \exp\left[\frac{\Delta\gamma}{\check{\lambda} - \check{k}}(2\check{p} - \check{p}_c)\right] \\
 a_{10} &= 2\alpha ghm
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \check{k}a_7a_4 - \frac{6\alpha}{M^2}\Delta\gamma \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \\
b_2 &= \frac{a_9}{1 + a_9\Delta\gamma} \\
b_3 &= a_6 + a_3 \left( a_4a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\check{k}M^2} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \right) \\
b_4 &= a_2 \left( a_4a_7 - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\check{k}M^2} \|\mathbf{e}^{e,tr}\|^2 \right) \\
b_5 &= \frac{2\alpha}{\check{k}} \left( 1 - \frac{3}{M^2}\Delta\gamma a_{10} \right) \\
b_6 &= a_7a_{10} - \frac{6\alpha\Delta\gamma}{\check{k}M^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\frac{1}{\check{k}}gha_1(l + b_4h)(b_2\Delta\gamma - 1) + ghb_3}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \\
c_2 &= \frac{1}{\check{k}} \frac{\check{p} + b_4gh^2}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \\
c_3 &= \frac{ghb_5}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)} \\
c_4 &= \frac{ghb_6}{1 + \frac{2\Delta\gamma}{\check{k}}gh(l + b_4h)(1 - b_2\Delta\gamma)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= b_2(a_1 + 2\Delta\gamma c_1) \\
d_2 &= 2\Delta\gamma b_2 c_2 \\
d_3 &= 2\Delta\gamma b_2 c_3 \\
d_4 &= 2\Delta\gamma b_2 c_4 \\
d_5 &= c_2 - \frac{1}{3}a_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{1}{\check{k}}h[a_1 + \Delta\gamma(2c_1 - d_1)] \\
f_2 &= -\frac{1}{\check{k}}h\Delta\gamma(2c_2 - d_2) \\
f_3 &= -\frac{1}{\check{k}}h\Delta\gamma(2c_3 - d_3) \\
f_4 &= -\frac{1}{\check{k}}h\Delta\gamma(2c_4 - d_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_3 + a_2 f_1 \\
u_2 &= a_2 \left( f_2 + \frac{1}{\gamma} h \right) \\
u_3 &= a_2 f_3 \\
u_4 &= a_2 f_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= a_1 c_1 + a_5 u_1 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e, tr} \\
\omega_2 &= a_1 c_2 + a_5 u_2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e, tr} \\
\omega_3 &= a_1 c_3 + a_5 u_3 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e, tr} \\
\omega_4 &= a_1 c_4 + a_5 u_4 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}^{e, tr} + a_5 a_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\omega_2 - \check{p}d_2}{\omega_1 - \check{p}d_1} \\
\eta_2 &= -\frac{\omega_3 - \check{p}d_3}{\omega_1 - \check{p}d_1} \\
\eta_3 &= -\frac{\omega_4 - \check{p}d_4}{\omega_1 - \check{p}d_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= c_1 \eta_1 + d_5 \\
\delta_2 &= u_1 \eta_1 + u_2 \\
\delta_3 &= c_1 \eta_2 + c_3 \\
\delta_4 &= u_1 \eta_2 + u_3 \\
\delta_5 &= c_1 \eta_3 + c_4 \\
\delta_6 &= u_1 \eta_3 + u_4
\end{aligned}$$

# Notazione

Si elencano, in ordine alfabetico, i simboli utilizzati. I campi vettoriali e tensoriali sono indicati con lettere in grassetto; in particolare, si impiegano lettere maiuscole per i campi materiali e minuscole per quelli spaziali.

- $\mathbf{A}$  = accelerazione materiale di una particella
- $\mathbf{a}^e$  = tensore elastico tangente (parte “costitutiva” di  $\mathbf{c}$ )
- $\mathbf{a}^{ep}$  = tangente elasto-plastica algoritmica (parte “costitutiva” di  $\mathbf{c}$  algoritmico)
- $\mathbf{B}$  = forza di volume definita su  $\mathcal{B}$
- $\mathbf{b}$  = tensore di Cauchy-Green sinistro
- $\bar{\mathbf{b}}$  = parte isocora di  $\mathbf{b}$
- $\mathbf{b}^e$  = tensore di Cauchy-Green sinistro elastico
- $\mathbf{b}_t$  = forza di volume definita su  $\mathcal{S}$
- $\mathcal{B}$  = configurazione di riferimento
- $\partial\mathcal{B}$  = frontiera di  $\mathcal{B}$
- $\mathbb{C}$  = tensore di elasticità materiale
- $\mathbf{C}$  = tensore di Cauchy-Green destro
- $\bar{\mathbf{C}}$  = parte isocora di  $\mathbf{C}$
- $\mathbf{C}^p$  = tensore di Cauchy-Green destro plastico
- $\mathbf{c}$  = tensore di elasticità spaziale
- $\mathbf{c}_A^{tr}$  = parte “geometrica” di  $\mathbf{c}$
- $\mathbf{d}$  = tensore velocità spaziale di deformazione
- $D$  = densità di dissipazione plastica
- $\mathbf{e}$  = vettore delle distorsioni logaritmiche principali
- $\mathbf{e}^e$  = vettore delle distorsioni logaritmiche principali elastiche
- $\mathbf{e}^p$  = vettore delle distorsioni logaritmiche principali plastiche
- $E_d$  = dominio di elasticità
- $E_v$  = deformazione volumetrica
- $E_v^e$  = deformazione volumetrica elastica
- $E_v^p$  = deformazione volumetrica plastica
- $e$  = indice di porosità
- $\mathbf{F}$  = gradiente di deformazione
- $\mathbf{F}^e$  = gradiente di deformazione elastica
- $\mathbf{F}^p$  = gradiente di deformazione plastica
- $\mathbf{f}$  = gradiente di deformazione relativa
- $f$  = funzione di snervamento in termini di  $\boldsymbol{\sigma}$
- $\check{f}$  = funzione di snervamento in termini di  $\boldsymbol{\tau}$

- $\hat{f}$  = funzione di snervamento in termini di  $\beta$   
 $\mathbf{G}$  = tensore di deformazione di Green-Lagrange  
 $G_{\mathbf{X}}$  = gruppo di simmetria materiale in  $\mathbf{X}$   
 $H$  = contributo energetico della variabile di incrudimento  
 $\mathbb{I}$  = identità di  $Lin$   
 $\mathbf{I}$  = identità di  $Lin$   
 $i$  = variabile di incrudimento (una misura di tensione)  
 $J$  = determinante di  $\mathbf{F}$   
 $J^e$  = determinante di  $\mathbf{F}^e$   
 $J^p$  = determinante di  $\mathbf{F}^p$   
 $K$  = modulo elastico di rigidezza volumetrica  
 $\check{K}$  = modulo elastico di rigidezza volumetrica in termini di  $\check{p}$  e  $\theta$   
 $k$  = indice logaritmico di rigonfiamento, misurato in termini di  $\sigma$   
 $k^*$  = indice bi-logaritmico di rigonfiamento, misurato in termini di  $\sigma$   
 $\check{k}$  = indice bi-logaritmico di rigonfiamento, misurato in termini di  $\tau$   
 $\mathbf{l}$  = gradiente di velocità spaziale  
 $Lin$  = spazio delle trasformazioni lineari di  $Lin$  in se stesso  
 $Lin$  = spazio delle trasformazioni lineari di  $\mathcal{V}$  in se stesso  
 $Lin^+$  = insieme dei tensori di  $Lin$  a determinante positivo  
 $\mathbf{N}$  = normale a  $\partial\mathcal{B}$   
 $\mathbf{n}$  = normale a  $\partial\mathcal{S}$   
 $\mathbf{N}_A$  = base lagrangiana in  $\mathbf{X}$   
 $\mathbf{n}_A$  = base euleriana in  $\mathbf{x}$   
 $Orth$  = gruppo dei tensori ortogonali  
 $Orth^+$  = gruppo delle rotazioni  
 $\mathbf{P}$  = primo tensore di Piola-Kirchhoff  
 $p$  = tensione media di Cauchy  
 $\check{p}$  = tensione media di Kirchhoff  
 $p_0$  = tensione media iniziale  
 $p_c$  = pressione di Cauchy di preconsolidazione  
 $\check{p}_c$  = pressione di Kirchhoff di preconsolidazione  
 $p_{c0}$  = pressione di Cauchy di preconsolidazione iniziale  
 $\check{p}_{c0}$  = pressione di Kirchhoff di preconsolidazione iniziale  
 $q$  = invariante di dev ( $\sigma$ )  
 $\check{q}$  = invariante di dev ( $\tau$ )  
 $R$  = campo dei numeri reali  
 $R^+$  = insieme dei numeri reali positivi  
 $R^3$  = spazio euclideo  
 $\mathbf{S}$  = secondo tensore di Piola-Kirchhoff  
 $\mathcal{S}$  = configurazione corrente  
 $\partial\mathcal{S}$  = frontiera di  $\mathcal{S}$   
 $Skw$  = spazio dei tensori antisimmetrici di  $Lin$   
 $Sym$  = spazio dei tensori simmetrici di  $Lin$   
 $Sym^+$  = insieme dei tensori simmetrici definiti positivi

$\mathbf{t}$  = vettore delle tensioni deviatoriche principali di Kirchhoff  
 $\mathbf{t}^{\mathbf{N}}$  = forza di superficie su  $\partial\mathcal{B}$   
 $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$  = forza di superficie su  $\partial\mathcal{S}$   
 $\mathbf{U}$  = tensore destro di allungamento  
 $\mathbf{u}$  = spostamento di un punto  
 $Uni$  = gruppo dei tensori unimodulari  
 $\mathbf{V}$  = velocità materiale di una particella  
 $\mathbf{v}$  = velocità spaziale di una particella  
 $V$  = volume della configurazione corrente  
 $V_s$  = volume corrente della fase solida  
 $V_{s0}$  = volume iniziale della fase solida  
 $V_v$  = volume corrente dei pori  
 $V_0$  = volume della configurazione di riferimento  
 $v$  = volume specifico nella configurazione corrente  
 $v_0$  = volume specifico nella configurazione di riferimento  
 $v_{c1}$  = volume specifico di un'argilla normal-consolidata per pressione ( $p$ ) unitaria  
 $v_p$  = volume specifico nella configurazione intermedia  
 $\mathcal{V}$  = spazio vettoriale associato ad  $R^3$   
 $\mathbf{w}$  = tensore velocità di rotazione ("spin tensor")  
 $W$  = densità energia di deformazione elastica in termini di  $\mathbf{F}$   
 $\bar{W}$  = densità energia di deformazione elastica in termini di  $\mathbf{C}$   
 $\tilde{W}$  = densità energia di deformazione elastica in termini di invarianti di  $\mathbf{C}$   
 $\acute{W}$  = densità energia di deformazione elastica in termini di allungamenti principali  
 $\check{W}$  = densità energia di deformazione elastica in termini di  $\mathbf{b}$   
 $\hat{W}$  = densità energia di deformazione elastica in termini di  $\boldsymbol{\rho}$   
 $w_v$  = sottoenergia di deformazione volumetrica  
 $\mathbf{X}$  = punto materiale  
 $\mathbf{x}$  = posizione corrente del punto materiale  
 $\mathbf{Z}$  = tensore sinistro di allungamento

$\alpha$  = costante del legame elastico  
 $\beta_A$  = tensioni principali di Kirchhoff (autovalori di  $\boldsymbol{\tau}$ )  
 $\boldsymbol{\beta}$  = vettore dei  $\beta_A$   
 $\dot{\gamma}$  = moltiplicatore plastico  
 $\Delta\gamma$  = parametro di consistenza  
 $\delta_{AB}$  = simbolo di Kronecker  
 $\boldsymbol{\varepsilon}$  = tensore di deformazione infinitesima  
 $\varepsilon_v$  = traccia di  $\boldsymbol{\varepsilon}$   
 $\theta$  = deformazione volumetrica logaritmica  
 $\theta^e$  = deformazione volumetrica logaritmica elastica  
 $\theta^p$  = deformazione volumetrica logaritmica plastica  
 $\lambda$  = indice logaritmico di compressione vergine, misurato in termini di  $\boldsymbol{\sigma}$   
 $\lambda^*$  = indice bi-logaritmico di compressione vergine, misurato in termini di  $\boldsymbol{\sigma}$

$\check{\lambda}$  = indice bi-logaritmico di compressione vergine, misurato in termini di  $\boldsymbol{\tau}$   
 $\lambda_A$  = allungamenti principali  
 $\mu$  = modulo elastico di rigidezza a taglio  
 $\mu_u$  = modulo elastico di rigidezza a taglio in condizioni non drenate  
 $\nu$  = coefficiente di Poisson  
 $\check{\nu}$  = coefficiente di Poisson "logaritmico"  
 $\xi$  = variabile di incrudimento (una misura di deformazione)  
 $\boldsymbol{\rho}$  = vettore delle deformazioni logaritmiche principali  
 $\boldsymbol{\rho}^e$  = vettore delle deformazioni logaritmiche principali elastiche  
 $\boldsymbol{\rho}^p$  = vettore delle deformazioni logaritmiche principali plastiche  
 $\varrho$  = densità definita su  $\mathcal{S}$   
 $\varrho_0$  = densità definita su  $\mathcal{B}$   
 $\boldsymbol{\sigma}$  = tensore degli sforzi di Cauchy  
 $\sigma_A$  = tensioni di Cauchy principali (autovalori di  $\boldsymbol{\sigma}$ )  
 $\boldsymbol{\tau}$  = tensore degli sforzi di Kirchhoff  
 $\phi_t$  = moto di  $\mathcal{B}$   
 $\varphi$  = deformazione di  $\mathcal{B}$   
 $\psi$  = energia libera

$\nabla$  = gradiente di un campo spaziale  
 $D$  = gradiente di un campo materiale  
 $\dot{\cdot}$  = derivata temporale  
 $\ddot{\cdot}$  = derivata seconda temporale  
 $\circ$  = derivata di Jaumann (derivata corotazionale)  
 $\det(\cdot)$  = determinante  
 $\text{dev}(\cdot)$  = proiettore deviatorico di un tensore di *Sym*  
 $L_v(\cdot)$  = derivata di Lie  
 $\text{sym}(\cdot)$  = proiettore simmetrico di un tensore di *Lin*  
 $\text{skw}(\cdot)$  = proiettore antisimmetrico di un tensore di *Lin*  
 $\text{tr}(\cdot)$  = traccia di un tensore di *Lin*  
 $(\cdot)^T$  = operatore di trasposizione  
 $\|(\cdot)\|$  = norma euclidea di un vettore o di un tensore  
 $\emptyset$  = insieme vuoto  
 $\cdot$  = prodotto scalare  
 $\times$  = prodotto vettoriale  
 $\otimes$  = prodotto diadico  
 $\cup$  = unione  
 $\cap$  = intersezione  
 $\subset$  = inclusione  
 $\in$  = appartenenza  
 $\forall$  = quantificatore universale  
 $\exists$  = quantificatore esistenziale  
 $:=$  = simbolo di definizione